

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

**Grades Reduzidas na Resolução Espectral
das Equações de Águas Rasas**

por

José de Arimatéia Fernandes

sob orientação do

Prof. Dan Marchesin

Rio de Janeiro - RJ

06 de Julho de 2004

**Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
Curso de Doutorado em Matemática**

**Grades Reduzidas na Resolução Espectral
das Equações de Águas Rasas**

por

José de Arimatéia Fernandes

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Doutorado em Matemática
- IMPA, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: Dinâmica dos Fluidos

Aprovada por:

Dr. André Nachbin (IMPA)

Dr. Bruno Costa (UFRJ)

Dra. Monique Moura Carmona (IMPA)

Dr. Pedro Leite da Silva Dias (INPE / USP)

Dr. Dan Marchesin (IMPA)
Orientador

06 de Julho de 2004

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao Prof. Dan Marchesin pela orientação e ensinamentos, presteza, incentivo e apoio, os quais nunca me faltaram durante todo o meu doutorado.

Também gostaria de agradecer:

À Monique Moura Carmona e ao Prof. Bruno Costa, pelos comentários e sugestões na tese.

À CAPES pelo apoio financeiro por meio do programa PICDT.

À minha família pela força, carinho e solidariedade sempre presentes. Em especial à minha mãe D. Beatriz.

À minha noiva, Joelma Dias, que soube suportar minha impaciência e ausência em muitas horas.

Ao Departamento de Matemática e Estatística da UFCG pelo apoio e companheirismo dos colegas professores e funcionários. Em especial ao chefe do Departamento, Prof. Antonio José da Silva. Também ao Prof. Aparecido Jesuíno de Souza, que me enveredou pelo caminho da Dinâmica dos Fluidos. Aos Profs. Antonio Luiz de Melo e Claudianor Oliveira pela amizade.

Ao grupo de Dinâmica dos Fluidos do IMPA pela interação no Laboratório e nos Seminários. Em especial ao Prof. André Nachbin e aos colegas Paul Krause e Milton Braitt.

Aos colegas do IMPA, em especial ao Luis Bladismir, Sérgio Muñoz, Bernardo Nunes e Mahendra Panthee.

Ao IMPA, pela Instituição de excelência que representa. Aos seus professores e funcionários.

Ao meus colegas cariocas e ao Rio de Janeiro, por ainda ser uma cidade maravilhosa.

Dedicatória

A Deus, por tudo.

Resumo

O objetivo deste trabalho é analisar o erro na parte espectral de modelos de circulação geral devido ao uso de grade reduzida em vez de grade plena convencional.

O cálculo dos coeficientes de Fourier-Legendre em uma expansão em harmônicos esféricos pode ser numericamente exato quando uma grade Gaussiana normal é utilizada, mas há introdução de erro devido ao uso de grade reduzida.

Neste trabalho, deduzimos uma fórmula para o cálculo do erro introduzido pelo uso de grades reduzidas na avaliação de harmônicos esféricos. Aplicamos esta fórmula para obter uma estimativa quadrática do erro associado à grade reduzida. Aplicamo-la também na avaliação do erro em harmônicos de Hough.

Consideramos o sistema de equações de águas rasas linearizadas no plano, para utilizarmos o método espectral, usando série de Fourier no quadrado periódico, e analisarmos o efeito do uso de grades reduzidas na evolução das ondas planares que são solução do referido sistema. Estamos interessados em estudar apenas a parte linear do método, que é a parte espectral. Este estudo foi feito com a intenção de avaliar quaisquer erros, inclusive *aliasing*, mais facilmente que na esfera. Há um erro não linear associado ao transporte lagrangeano, o qual não é tratado, porque está fora do escopo desta tese. Mostramos que os únicos erros lineares espaciais introduzidos pela redução da grade, além do erro de truncamento, são os erros de *aliasing*.

Com esses resultados obtidos, fazemos um estudo detalhado do erro de truncamento espectral em conjunto com o erro de *aliasing* em transformadas de Fourier-Legendre. Concluimos que existe margem para conseguir grades reduzidas melhores que as de Courtier-Naughton (CN) e Hortal-Simmons (HS), do ponto de vista do balanço entre erro e custo. Isto é, a grade de (HS) tem erro exagerado, conforme Courtier-Naughton perceberam e corroboramos neste trabalho, mas a grade de (CN) é cara demais, pois reduz exageradamente o erro.

O objetivo deste estudo é que ele possa guiar a especificação ótima da redução da grade em modelos operacionais de circulação global espectrais semilagrangeanos.

Abstract

The objective of this work is to analyze the error in the spectral part of general circulation models when reduced grids are used, instead of the conventional Gaussian grid.

The numerical calculation of the Fourier-Legendre coefficients in the spherical harmonic expansion when a normal Gaussian grid is used can be done with good accuracy, but there is introduction of errors by the use of reduced grids.

In this work we obtain a formula for the calculation of the error generated by the use of reduced grids in the evaluation of spherical harmonics. We apply this formula to get a quadratic estimate of the error associated with the reduced grid and also to evaluate the error in Hough harmonics.

We apply the spectral method, using Fourier series in the periodic square, for the analysis of the errors introduced by the use of reduced grids in the evolution of plane waves that are solutions of a linearized system of shallow water equations in the plane. We are interested in studying only the linear part of the method, that is the spectral part. This study was made with the intention to evaluate any errors, including aliasing, more easily than in the sphere. There is a nonlinear error associated with the Lagrangian transport, which is not treated, because it is not part of the target of this thesis. We show that the errors of aliasing are the only spatial errors in the linearized equations, besides the spectral truncation error.

Once these results were obtained, we made a detailed study of the spectral truncation error together with the aliasing in Fourier-Legendre transforms. We show that there is a gap between Courtier-Naughton and Hortal-Simmons reduced grids, in sense of balance between error and cost. The objective of this analysis is to serve as a guide to optimal balance specification of reduced grids in operational semilagrangian spectral global circulation models.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Ondas em Meios Homogêneos e Heterogêneos	3
2.1	Propagação em Meio Homogêneo Anisotrópico	3
2.2	Reflexão e Transmissão de Ondas	6
2.2.1	Interação das Ondas de Gravidade com a Interface	7
2.2.2	Interação da Onda de Rossby com a Interface	9
2.3	Método de Diferenças Finitas	10
3	Análise da Parte Espectral do Método Semilagrangeano	11
3.1	Águas Rasas Discretizadas em Grade Uniforme	11
3.2	O Método Numérico Espectral em Grades Reduzidas	14
3.3	O Erro de Aliasing	16
4	A DFT Unidimensional	22
4.1	Propriedades da DFT	22
4.2	A Fórmula de Poisson	23
4.3	Decaimento dos Coeficientes de Fourier	24
4.4	Erro nos Coeficientes de Fourier	25
5	A DFT Bidimensional em Grade Uniforme	26
5.1	Propriedades	26
5.2	A Fórmula de Poisson	27
5.3	Decaimento dos Coeficientes de Fourier	28
5.4	Erro nos Coeficientes de Fourier	30
6	A DFT Bidimensional em Grade Reduzida	31
6.1	Propriedades	31
6.2	A Fórmula de Poisson	32
6.3	Erro nos Coeficientes de Fourier	34
6.4	Erro na DFT2GR Inversa	34
7	Harmônicos Esféricos	36
7.1	Decaimento dos Coeficientes de Fourier-Legendre	38
7.2	Erro na Transformada de Fourier-Legendre	39
7.2.1	Fórmula de Poisson para Grade Uniforme	39
7.2.2	Fórmula de Poisson para Grade Reduzida	41
7.3	Erro na Transformada Inversa de Fourier-Legendre	43
8	Erro na Avaliação de Expansões em Harmônicos Esféricos	45
8.1	Erro na Avaliação de um Coeficiente Harmônico	45
8.2	Erro em Combinação de Harmônicos Esféricos	46
8.2.1	Erro na Norma do Máximo	47
8.2.2	Erro na Norma Quadrática	47
8.3	Erro na Avaliação de um Harmônico de Hough	52
8.4	As Grades Reduzidas	52

8.5	Resultados Numéricos	54
8.5.1	Erro de <i>Aliasing</i> e Truncamento em Harmônicos Esféricos	54
8.5.2	Erro de <i>Aliasing</i> e Truncamento em Harmônicos de Hough	54
8.6	Cálculo da Energia Cinética com Aliasing	55
8.7	Conclusões	57
	Referências	58
A	As Equações de Águas Rasas na Terra	60
B	Identities para Funções Ondulatórias	63
C	Relação de Dispersão em Diferenças Finitas	65
D	Transformada de Legendre	67
D.1	Funções de Legendre	67
D.2	Transformada de Legendre Discreta	69
E	Harmônicos Esféricos	70
F	Harmônicos de Hough	71
F.1	Energia Cinética de um Estado típico da Atmosfera ..	74
F.2	Programas utilizados	77

1 Introdução

O método espectral, especialmente combinado ao tratamento semilagrangiano dos termos de transporte, é muito eficiente computacionalmente quando usado em Modelos de Circulação Geral. A principal fonte de ineficiência é o excesso de pontos nas vizinhanças dos polos na grade Gaussiana utilizada em métodos espectrais convencionais, pois com o aumento da resolução dos modelos, os pontos polares se tornam mais próximos. A integração de modelos espectrais usando-se uma grade reduzida tem sido considerada por alguns autores, a ponto de ser usada regularmente. Como a grade reduzida tem poucos pontos ao longo dos círculos de latitude longe do equador, a vantagem no seu uso ocorre no sentido em que o erro não é exagerado, mas a redução de custo é substancial, uma vez que ela gera uma economia no excesso de cálculo. Hortal e Simmons [9] fizeram integrações de modelos espectrais nos quais a grade Gaussiana de pontos em que os termos não lineares são avaliados é reduzida. Então um problema no polo pode surgir do uso de uma grade gaussiana reduzida no método da transformada espectral, uma vez que altos números de ondas podem não ter uma boa representação nas regiões próximas aos polos, devido ao erro de *aliasing* que surge com a redução da grade. De fato, no trabalho de [9] foram notados problemas de ruídos nas vizinhanças dos polos na integração de modelos espectrais.

Neste trabalho, mostramos que no método espectral, a propagação de ondas de água rasa não sofre alterações por uso de grades reduzidas, como é o caso de diferenças finitas, mostrado por Elvius e Sündstrom [7] entre outros. Os únicos erros são devidos ao truncamento espectral (cuja teoria é bem conhecida) e ao *aliasing*. Por isso o nosso objetivo é deduzir uma fórmula para estimar o erro de *aliasing* combinado com o truncamento espectral, no cálculo dos coeficientes de Fourier-Legendre devido à redução da grade. Essa fórmula avalia o erro do método espectral pelo uso de uma grade reduzida no cálculo dos coeficientes espectrais. Analisamos esse erro, na norma do máximo, no caso de um harmônico de Hough e também obtemos uma estimativa geral para o erro na norma quadrática de uma combinação linear de harmônicos esféricos.

No capítulo 2, descrevemos as equações de águas rasas linearizadas, que analisamos no estudo de propagação de onda num meio heterogêneo, usando série de Fourier no quadrado periódico. Este estudo foi feito com a intenção de avaliar quaisquer erros, inclusive *aliasing*, mais facilmente que na esfera. Também obtemos soluções analíticas num domínio periódico. Com isto concluímos que no método espectral a propagação de ondas de água rasa lineares num meio heterogêneo não é alterada com a mudança de meio. No capítulo 3, tratamos destas equações discretizadas temporalmente e concluímos que o método espectral não sofre com variações de malha do tipo grade reduzida. Este comportamento difere dos métodos de diferenças finitas, em que a velocidade de propagação numérica das ondas depende da grade e, com isto, são geradas reflexões espúrias e transmissões alteradas.

A única limitação dos métodos espectrais, introduzida pelo uso de grade reduzida, é o erro de *aliasing* combinado com o truncamento espectral, que são os objetos de estudo dos capítulos restantes. No capítulo 4, fazemos uma revisão dos resultados clássicos de transformada de Fourier discreta unidimensional. Nos capítulos 5 e 6, deduzimos fórmulas para o erro de *aliasing* combinado ao truncamento espectral em

grade bidimensional uniforme e reduzida, respectivamente, usando transformadas de Fourier nas direções x e y . Já no capítulo 7, estas fórmulas de erro são deduzidas para o caso de transformadas de Fourier-Legendre, usando-se os harmônicos esféricos. Este é o capítulo central da tese.

No trabalho de Courtier e Naughton [5] foi sugerida uma grade reduzida com mais pontos nas latitudes mais próximas aos polos, que a grade reduzida introduzida por Hortal e Simmons. Isto faz com que o erro de *aliasing* diminua sensivelmente nas regiões polares. No capítulo 8, constatamos que o erro de *aliasing* combinado ao erro de truncamento espectral é pequeno, quando usamos a grade reduzida sugerida por [5] na avaliação de harmônicos de Hough. Mostramos que existe margem para conseguir grades reduzidas melhores que as de (CN) e (HS), no sentido de balanço entre erro e custo. Ou seja, a de (HS) tem erro exagerado, como Courtier-Naughton perceberam e corroboramos neste trabalho, mas a grade de (CN) é cara demais, pois reduz exageradamente o erro. Analisamos também o efeito do uso da grade reduzida no erro de *aliasing* combinado ao truncamento espectral na energia cinética dos harmônicos de Hough.

Obtemos uma estimativa do erro de *aliasing* juntamente com o truncamento espectral na norma quadrática, que permitirá determinar grades reduzidas ótimas, no sentido de que o erro na representação em harmônicos esféricos seja menor que uma tolerância especificada.

2 Ondas em Meios Homogêneos e Heterogêneos

Neste capítulo usamos o modelo de águas rasas no plano, para analisar o efeito do uso de grade reduzida na evolução de ondas planares, onde adotamos uma grade reduzida planar como modelo de grade reduzida na esfera.

Com a motivação de estudar o efeito em métodos numéricos de grades não uniformes ou não isotrópicas, utilizamos inicialmente como modelo destes métodos numéricos, EDP's de evolução com ondas gravitacionais possuindo velocidades distintas nas direções x e y .

2.1 Propagação em Meio Homogêneo Anisotrópico

Consideramos o sistema de equações de água-rasa planar linearizado em torno do estado estacionário (U, V, Φ) constante, com o vetor de onda $\mathbf{c} = (c_x, c_y)$, conforme o sistema (A.3) do apêndice A, possuindo componentes distintas nas direções x e y . Assim, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} + c_x^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + V \frac{\partial v}{\partial y} + c_y^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} & = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} + V \frac{\partial \phi}{\partial y} + \Phi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) & = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

num domínio plano $0 \leq x \leq L_x$ e $0 \leq y \leq L_y$. As condições de contorno são periódicas tanto na direção x como na direção y .

Procuramos solução de (2.1) da forma

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix} (x, y, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha(k, l) e^{-i(w_x k x + w_y l y - w t)} \begin{pmatrix} u_{k,l}^0 \\ v_{k,l}^0 \\ \phi_{k,l}^0 \end{pmatrix},$$

onde denotamos

$$w_x = \frac{2\pi}{L_x} \text{ e } w_y = \frac{2\pi}{L_y}.$$

Substituindo esta solução em (2.1) e abandonando os índices k, l obtemos

$$\begin{pmatrix} w - U w_x k - V w_y l & 0 & -c_x^2 w_x k \\ 0 & w - U w_x k - V w_y l & -c_y^2 w_y l \\ -\Phi w_x k & -\Phi w_y l & w - U w_x k - V w_y l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \\ \phi^0 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.2)$$

Introduzimos a notação

$$G_{k,l} = \sqrt{\Phi [c_x^2 (w_x k)^2 + c_y^2 (w_y l)^2]}. \quad (2.3)$$

Anulando o determinante da matriz (2.2) resulta a equação cúbica

$$(w - Uw_xk - Vw_y l) [(w - Uw_xk - Vw_y l)^2 - G_{k,l}^2] = 0. \quad (2.4)$$

Uma das raízes da equação (2.4) é

$$w_0 = Uw_xk + Vw_y l. \quad (2.5)$$

Para $w \neq Uw_xk + Vw_y l$ obtemos ao extrair o valor de w na equação (2.4)

$$w_+ = Uw_xk + Vw_y l + G_{k,l} \quad (2.6)$$

ou

$$w_- = Uw_xk + Vw_y l - G_{k,l}. \quad (2.7)$$

O autovetor para o autovalor w_0 dado em (2.5) é solução de

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -c_x^2 w_x k \\ 0 & 0 & -c_y^2 w_y l \\ -w_x k \Phi & -w_y l \Phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \\ \phi^0 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.8)$$

Se $k \neq 0$ ou $l \neq 0$ então, sem perda de generalidade, supomos $k \neq 0$, pois o caso em que $l \neq 0$ é análogo, logo

$$\begin{cases} \phi^0 & = 0 \\ w_x k u^0 + w_y l v^0 & = 0 \Rightarrow u^0 = -\frac{w_y l}{w_x k} v^0, \quad k \neq 0. \end{cases}$$

Assim, obtemos o autovetor

$$\mathbf{R}_0(k, l) = (-w_y l, w_x k, 0)^T. \quad (2.9)$$

Agora, o autovetor para o autovalor w_+ dado em (2.6) é solução de

$$\begin{pmatrix} G_{k,l} & 0 & -c_x^2 w_x k \\ 0 & G_{k,l} & -c_y^2 w_y l \\ -w_x k \Phi & -w_y l \Phi & G_{k,l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \\ \phi^0 \end{pmatrix} = 0, \quad (2.10)$$

logo

$$\begin{cases} G_{k,l} u^0 - c_x^2 w_x k \phi^0 & = 0 \\ G_{k,l} v^0 - c_y^2 w_y l \phi^0 & = 0 \\ -w_x k \Phi u^0 - w_y l \Phi v^0 + G_{k,l} \phi^0 & = 0 \end{cases}$$

e as duas primeiras equações acima nos dão

$$\begin{cases} u^0 & = \frac{c_x^2 w_x k}{G_{k,l}} \phi^0 \\ v^0 & = \frac{c_y^2 w_y l}{G_{k,l}} \phi^0 \end{cases}$$

que nos dá o autovetor

$$\mathbf{R}_+(k, l) = \left(c_x^2 w_x k, c_y^2 w_y l, G_{k,l} \right)^T. \quad (2.11)$$

De modo análogo, para o autovalor w_- dado em (2.7) obtemos o autovetor

$$\mathbf{R}_-(k, l) = \left(c_x^2 w_x k, c_y^2 w_y l, -G_{k,l} \right)^T. \quad (2.12)$$

Agora se $kl = 0$, por exemplo, supondo $k = 0$ e $l \neq 0$, pois o caso $k \neq 0$ e $l = 0$ é análogo, então por (2.8), obtemos que $\mathbf{R}_0 = (1, 0, 0)^T$ e por (2.10), segue que $\mathbf{R}_+ = (0, c_y^2 w_y l, G_{0,l})^T$ e analogamente $\mathbf{R}_- = (0, c_y^2 w_y l, -G_{0,l})^T$.

Notemos que se $k = l = 0$ em (2.8) e (2.10), então os autovetores \mathbf{R}_0 , \mathbf{R}_+ e analogamente \mathbf{R}_- são constantes, que não tem interesse.

Portanto, demonstramos o seguinte

Teorema 2.1 *A solução geral não estacionária do sistema (2.1) pode ser escrita na forma*

$$\mathbf{S}(x, y, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{l=-\infty \\ (k,l) \neq (0,0)}}^{\infty} \left[\alpha_+(k, l) e^{-i(w_x k x + w_y l y - w_+ t)} \mathbf{R}_+ + \alpha_-(k, l) e^{-i(w_x k x + w_y l y - w_- t)} \mathbf{R}_- + \alpha_0(k, l) e^{-i(w_x k x + w_y l y - w_0 t)} \mathbf{R}_0 \right]$$

onde w_+ , w_- e w_0 são os autovalores e $\mathbf{R}_+(k, l)$, $\mathbf{R}_-(k, l)$ e $\mathbf{R}_0(k, l)$ são os respectivos autovetores do sistema matricial (2.2) e $\mathbf{S} = (u, v, \phi)^T$.

A solução do sistema (2.1) correspondente aos índices $k = 0$, $l = 0$ é constante, sendo assim estacionária, logo não sofre interferência do meio e não tem interesse físico, portanto não será analisada, também porque agora estamos interessados na solução da perturbação em torno do estado básico constante (U, V, Φ) .

Os autovetores \mathbf{R}_+ e \mathbf{R}_- correspondem às ondas de gravidade (ondas rápidas) e \mathbf{R}_0 corresponde à onda de Rossby (onda lenta), conforme [13].

Os coeficientes α_+ , α_- e α_0 são determinados a partir de alguma condição inicial dada, conforme a observação seguinte.

Observação 2.1 *A solução do sistema (2.1) fica completamente determinada, quando é dada uma condição inicial $(u(x, y, 0), v(x, y, 0), \phi(x, y, 0))^T$. De fato, para $t = 0$, mas $(k, l) \neq (0, 0)$ na solução geral dada no Teorema 2.1, obtemos o sistema*

$$\begin{cases} [\alpha_+(k, l) + \alpha_-(k, l)] c_x^2 w_x k - \alpha_0(k, l) w_y l & = \hat{u}_0 \\ [\alpha_+(k, l) + \alpha_-(k, l)] c_y^2 w_y l + \alpha_0(k, l) w_x k & = \hat{v}_0 \\ [\alpha_+(k, l) - \alpha_-(k, l)] G_{k,l} & = \hat{\phi}_0, \end{cases}$$

onde os segundos membros acima são os coeficientes de Fourier dos dados iniciais. Logo, a solução deste sistema nos fornece os coeficientes de Fourier α_+ , α_- e α_0 .

2.2 Reflexão e Transmissão de Ondas

Consideremos uma onda incidente (índice i) sobre a fronteira $y = 0$, deslocando-se no semiplano $y > 0$, onde possui vetor de onda $\mathbf{c}_1 = (c_{x,1}, c_{y,1})^T$. Admitindo que esta onda possui no semiplano $y < 0$ vetor de onda $\mathbf{c}_2 = (c_{x,2}, c_{y,2})^T$, então na passagem pela interface $y = 0$, esta onda irá produzir uma onda refletida (índice r) e uma transmitida (índice t), conforme a figura 1.

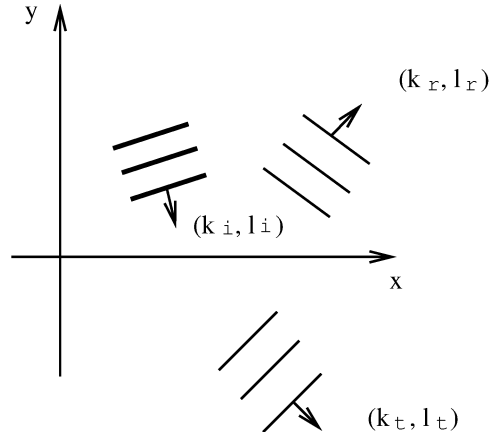


Figura 1: Reflexão de ondas planares.

Na descrição acima, estamos supondo o domínio infinito. Mas, no que se segue, consideraremos comprimentos de onda finitos, submúltiplos do período, para que o tratamento seja consistente com o da seção anterior, em que consideramos o domínio periódico.

Devemos estabelecer uma condição de continuidade, no eixo dos x , para a componente normal da velocidade e para o geopotencial da soma das ondas incidente, refletida e transmitida. Representamos cada uma dessas ondas, respectivamente, na direção dos vetores com 3 componentes \mathbf{R}_i , \mathbf{R}_r e \mathbf{R}_t e impomos a seguinte condição de continuidade em $y = 0$, $\forall x$ e $\forall t$

$$\left[\alpha_i e^{-i(w_x k_i x + w_i t)} \mathbf{R}_i + \alpha_r e^{-i(w_x k_r x + w_r t)} \mathbf{R}_r \right] \cdot \mathbf{e} = \left[\alpha_t e^{-i(w_x k_t x + w_t t)} \mathbf{R}_t \right] \cdot \mathbf{e}. \quad (2.13)$$

onde $\mathbf{e} = (0, 1, 0)^T$ para a componente normal da velocidade ou $\mathbf{e} = (0, 0, 1)^T$ para o geopotencial. Sem perda de generalidade, podemos supor $\alpha_i = 1$.

Agora, admitimos que há dois meios homogêneos unidos em $y = 0$, conforme a figura 2, em que $c_{x,1} = c_{y,1} = c$, $c_{x,2} = c + \delta$ ($\delta \approx 0$) e $c_{y,2} = c$. Desse modo, temos um meio isotrópico no semiplano $y > 0$ e outro meio isotrópico no semiplano $y < 0$.

Nas duas próximas subseções 2.2.1 e 2.2.2, impomos a condição de continuidade (2.13) para cada uma das ondas de gravidade \mathbf{R}_+ e \mathbf{R}_- e também para a onda de Rossby \mathbf{R}_0 . Desse modo analisamos o efeito do meio na propagação de cada uma dessas ondas.

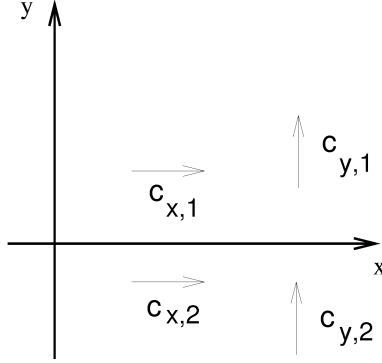


Figura 2: Vetores de Onda.

2.2.1 Interação das Ondas de Gravidade com a Interface

Sem perda de generalidade, supomos que $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_-$, isto é, a onda incidente na interface $y = 0$ é a onda de gravidade do autovetor \mathbf{R}_- . Neste caso, a onda refletida tem a direção do autovetor \mathbf{R}_+ (assim, $\mathbf{R}_r = \mathbf{R}_+$) e, sem perda de generalidade, supondo que $k_i > 0$, $k_r > 0$ e $k_t > 0$, segue que a condição de continuidade (2.13) para este caso fica

$$\left[e^{-i(w_x k_i x + w_- t)} \mathbf{R}_- + \alpha_r e^{-i(w_x k_r x + w_+ t)} \mathbf{R}_+ \right] \cdot \mathbf{e} = \left[\alpha_t e^{-i(w_x k_t x + w_-^* t)} \mathbf{R}_-^* \right] \cdot \mathbf{e}, \quad (2.14)$$

onde $\mathbf{R}_-^* = \mathbf{R}_t$ é o vetor na direção da onda transmitida através da interface $y = 0$, resultado do desvio da onda incidente \mathbf{R}_- .

Para $\mathbf{e} = (0, 1, 0)$ em (2.14), a continuidade da componente normal da velocidade em (2.14), juntamente com as fórmulas (2.11) e (2.12) nos dão

$$c_{y,1}^2 l_i e^{-i(w_x k_i x + w_- t)} + \alpha_r c_{y,1}^2 l_r e^{-i(w_x k_r x + w_+ t)} = \alpha_t c_{y,2}^2 l_* e^{-i(w_x k_t x + w_-^* t)}. \quad (2.15)$$

Denotemos, daqui em diante

$$G_{k,t}^{(i)} = \sqrt{\Phi \left[c_{x,i}^2 (w_x k)^2 + c_{y,i}^2 (w_y l)^2 \right]}, \quad i = 1, 2. \quad (2.16)$$

Para $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$ em (2.14), a continuidade na componente do geopotencial em (2.14) nos dá

$$-G_{k_i, l_i}^{(1)} e^{-i(w_x k_i x + w_- t)} + \alpha_r G_{k_r, l_r}^{(1)} e^{-i(w_x k_r x + w_+ t)} = -\alpha_t G_{k_t, l_t}^{(2)} e^{-i(w_x k_t x + w_-^* t)}. \quad (2.17)$$

Em (2.15) os coeficientes das exponenciais complexas não são nulos, logo pelo lema B.1 do apêndice B, para a condição de continuidade (2.15) ser válida para todo t , devemos ter $w_- = w_-^* = w_+$. Do mesmo modo, a única maneira de (2.15) ser válida para todo x é que $k_i = k_r = k_t = k$. Agora

$$w_- = U w_x k + V w_y l_i - G_{k, l_i}^{(1)},$$

$$w_+ = Uw_x k + Vw_y l_r + G_{k,l_r}^{(1)},$$

$$w_-^* = Uw_x k + Vw_y l_* - G_{k,l_*}^{(2)},$$

onde supomos que as componentes do vetor velocidade $(U, V)^T$ são suficientemente pequenas para que o sinal das frequências acima sejam determinadas pelo termo da raiz quadrada, ou seja, U e V são tais que

$$G_{k,l} > Uw_x k + Vw_y l.$$

Então usando o fato que $w_- = w_+$, resulta que

$$Uw_x k + Vw_y l_i - G_{k,l_i}^{(1)} = Uw_x k + Vw_y l_r + G_{k,l_r}^{(1)},$$

donde obtemos l_r em termos de l_i . Denotemos por simplicidade $l_i = l$. Por argumentos geométricos semelhantes ao que são feitos em [14], obtemos que os ângulos de incidência e reflexão devem ser iguais.

Agora como $w_- = w_-^*$, cancelando o termo comum $Uw_x k$, temos que

$$Vw_y l - G_{k,l}^{(1)} = Vw_y l_* - G_{k,l_*}^{(2)},$$

donde ao usarmos $c_{x,1} = c_{y,1} = c_{y,2} = c$ e $c_{x,2} = c + \delta$, também usando a notação consistente com (2.3)

$$G_{k,l}(\delta) = \sqrt{\Phi \left[(c + \delta)^2 (w_x k)^2 + c^2 (w_y l)^2 \right]}, \quad (2.18)$$

obtemos

$$Vw_y l - G_{k,l}(0) - Vw_y l_* + G_{k,l_*}(\delta) = 0. \quad (2.19)$$

Para cada l fixado, denotemos o primeiro membro da equação (2.19) por $H_l(l_*, \delta)$. Logo $H_l(l_*, \delta) = 0$, a qual é satisfeita por $l_* = l$ e $\delta = 0$. Mas

$$\frac{\partial H_l}{\partial l_*}(l, 0) = -Vw_y + \frac{\Phi c^2 w_y^2 l_*}{G_{k,l_*}(0)}.$$

Supomos que a componente V seja tal que $\frac{\partial H_l}{\partial l_*}(l, 0) \neq 0$. Logo, pelo Teorema da Função Implícita, para cada $\delta \approx 0$, existe um único $l_* \neq l$, mas próximo de l , o qual depende de l e δ , tal que $H_l(l_*, \delta) = 0$.

Agora voltemos à condição de continuidade (2.14). Temos que

$$\mathbf{R}_- = \left(c_{x,1}^2 w_x k, c_{y,1}^2 w_y l, -G_{k,l}^{(1)} \right)^T,$$

$$\mathbf{R}_+ = \left(c_{x,1}^2 w_x k, c_{y,1}^2 w_y l_r, G_{k,l_r}^{(1)} \right)^T,$$

$$\mathbf{R}_-^* = \left(c_{x,2}^2 w_x k, c_{y,2}^2 w_y l_*, -G_{k,l_*}^{(2)} \right)^T.$$

Por outro lado, cancelando-se os termos da exponencial complexa em (2.15) e o termo $c_{y,1} = c_{y,2} = c$, obtemos

$$l + \alpha_r l_r = \alpha_t l_*. \quad (2.20)$$

Em (2.17), ao usarmos $c_{x,1} = c_{y,1} = c_{y,2} = c$ e $c_{x,2} = c + \delta$, obtemos

$$-G_{k,l}(0) + \alpha_r G_{k,l_r}(0) = -\alpha_t G_{k,l_*}(\delta). \quad (2.21)$$

Das equações (2.20) e (2.21), obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\frac{l_r}{l} \alpha_r + \frac{l_*}{l} \alpha_t & = 1 \\ \frac{G_{k,l_r}(0)}{G_{k,l}(0)} \alpha_r + \frac{G_{k,l_*}(\delta)}{G_{k,l}(0)} \alpha_t & = 1. \end{cases} \quad (2.22)$$

Para $\delta \approx 0$, mostramos que existe único l_* dado em termos de l , com $l_* \neq l$, pelo teorema da função implícita. Sendo $l_* \neq l$, pelo sistema (2.22), $\alpha_t \neq 1$ e $\alpha_r \neq 0$, temos desvio, mudança de amplitude e reflexão da onda incidente na interface $y = 0$.

2.2.2 Interação da Onda de Rossby com a Interface

Agora supomos que a onda incidente \mathbf{R}_i na interface $y = 0$ seja a onda de Rossby do vetor \mathbf{R}_0 , dado na equação (2.9). Uma vez que não há outro tipo de onda de Rossby, a única onda de Rossby \mathbf{R}_0 ao passar na interface não produzirá ondas refletidas (então $\mathbf{R}_r = \mathbf{0}$), mas poderá ter sua transmissão alterada, ou seja, um possível desvio ou mudança de amplitude. Analisemos agora este caso, considerando uma condição de continuidade análoga à (2.14), a qual para este caso fica

$$\left[e^{i(w_x k_0 x + w_0 t)} \mathbf{R}_0 \right] \cdot \mathbf{e} = \left[\alpha_t e^{i(w_x k_0^* x + w_0^* t)} \mathbf{R}_0^* \right] \cdot \mathbf{e}, \quad (2.23)$$

onde $\mathbf{R}_t = \mathbf{R}_0^*(k, l_*) = (-w_y l_*, w_x k, 0)^T$ é o vetor na direção da onda de Rossby transmitida através da interface $y = 0$. Temos também $w_0 = Uk_0 + Vl$ e $w_0^* = Uk_0^* + Vl_*$.

Para $\mathbf{e} = (0, 1, 0)$ em (2.23), a continuidade da componente normal da velocidade nos dá

$$w_x k_0 e^{-i(w_x k_0 x + w_0 t)} = \alpha_t w_x k_0^* e^{-i(w_x k_0^* x + w_0^* t)}. \quad (2.24)$$

Em (2.24), os coeficientes das exponenciais complexas não são nulos, logo pelo lema B.1 do apêndice B, para a condição de continuidade (2.24) ser válida para todo t , devemos ter $w_0 = w_0^*$. Do mesmo modo, a única maneira de (2.24) ser válida para todo x é que $k_0^* = k_0 = k$. Assim $Uk + Vl = Uk + Vl_*$, logo $l = l_*$, se $V \neq 0$. Agora se $V = 0$, então l e l_* não aparecem nas equações, logo não importam os seus valores.

Em qualquer caso, de (2.24), cancelando os termos da exponencial complexa, obtemos

$$w_x k = \alpha_t w_x k$$

donde $\alpha_t = 1$, se $k \neq 0$. O caso $k = 0$ não nos interessa porque o vetor $\mathbf{R}_0 = (-w_y l, 0, 0)^T$ é paralelo ao eixo- x , não havendo assim interação com a interface.

Portanto, para a onda de Rossby temos uma propagação adequada, uma vez que a onda incidente na interface $y = 0$ é totalmente transmitida sem desvio.

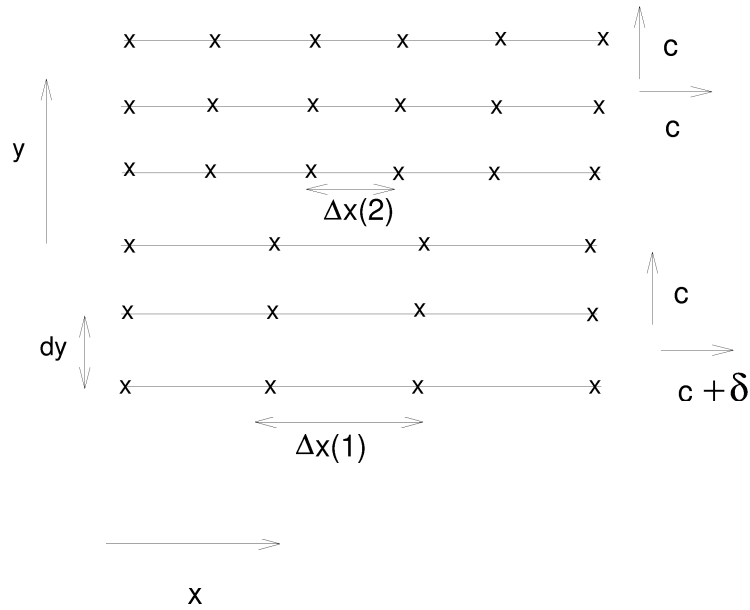


Figura 3: Grade planar representando um meio heterogêneo.

2.3 Método de Diferenças Finitas

Consideremos uma malha com distribuição uniforme de pontos em cada linha horizontal, conforme a figura 3. Esta malha é um modelo simplificado de grade planar reduzida, em que temos um meio heterogêneo constituído por dois meios homogêneos separados por uma interface, onde o meio superior é isotrópico: $\mathbf{c} = (c_{x,1}, c_{y,1}) = (c, c)$, e o meio inferior é anisotrópico: $\mathbf{c} = (c_{x,2}, c_{y,2}) = (c + \delta, c)$, $\delta \approx 0$.

Mostramos no lema C.1 do apêndice C que o método de diferenças finitas aplicado ao sistema de equações de água-rasa resulta numa relação de dispersão em que a velocidade de propagação da onda depende do meio, ou seja, de Δx . Portanto para método de diferenças finitas, grades diferentes funcionam como meios com ligeira diferença de velocidade. Assim, a mudança na velocidade de propagação de uma onda numa simulação numérica, quando passa de um meio homogêneo para o outro é devida à redução no número de pontos, ou seja, à variação de Δx .

Essa observação juntamente com os resultados mostrados nas subseções 2.2.1 e 2.2.2 demonstram o seguinte

Teorema 2.2 *Suponhamos válida a condição de continuidade (2.13). Então no método de diferenças finitas, a transmissão de onda de gravidade através da interface $y = 0$ é realizada com mudança de amplitude, desvio e reflexão ($\alpha_t \neq 1$, $\alpha_r \neq 0$ e $\mathbf{R}_- \neq \mathbf{R}_-^*$). Para a onda de Rossby, a propagação é adequada, no sentido de que a onda incidente \mathbf{R}_- é totalmente transmitida sem desvio, reflexão e mudança de amplitude ($\alpha_t = 1$, $\alpha_r = 0$ e $\mathbf{R}_- = \mathbf{R}_-^*$).*

3 Análise da Parte Espectral do Método Semilagrangeano

Neste capítulo analisamos o efeito do uso de grade reduzida na evolução de ondas de água-rasa planares linearizadas no contexto do método espectral que é utilizado no procedimento semilagrangeano. Nosso objetivo é mostrar que a propagação dessas ondas não sofre interferência, por uso de grades reduzidas, diferentemente do método de diferenças finitas, conforme mostramos no capítulo 2. Mostraremos que o único erro na parte espectral é devido ao *aliasing* combinado com o truncamento espectral.

3.1 Águas Rasas Discretizadas em Grade Uniforme

Consideramos o sistema (2.1) no caso $U = V = 0$, porque os termos de advecção de onde eles se originam não são tratados espectralmente, mas sim pela parte lagrangeana. Então discretizemos o sistema (2.1) usando diferença finita

$$\frac{\partial()}{\partial t} = \frac{()^+ - ()^-}{\Delta t}, \quad (3.1)$$

onde Δt é o passo de tempo.

Nas derivadas espaciais u_x , v_y , ϕ_x e ϕ_y , fazemos um tratamento implícito dos termos lineares que produzem as ondas de gravidade (ondas rápidas), usando o operador de média temporal, que resulta na seguinte discretização do sistema (2.1)

$$\begin{cases} \frac{u^+ - u^-}{\Delta t} + c_x^2 \frac{\phi_x^+ + \phi_x^-}{2} = 0 \\ \frac{v^+ - v^-}{\Delta t} + c_y^2 \frac{\phi_y^+ + \phi_y^-}{2} = 0 \\ \frac{\phi^+ - \phi^-}{\Delta t} + \Phi \left(\frac{u_x^+ + u_x^-}{2} + \frac{v_y^+ + v_y^-}{2} \right) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Procuramos solução numérica do esquema (3.2) da forma

$$\begin{pmatrix} u^- \\ v^- \\ \phi^- \end{pmatrix} (x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha(k, l) e^{-i(w_x kx + w_y ly - wt)} \begin{pmatrix} u_{k,l}^0 \\ v_{k,l}^0 \\ \phi_{k,l}^0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

e

$$\begin{pmatrix} u^+ \\ v^+ \\ \phi^+ \end{pmatrix} (x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha(k, l) e^{-i(w_x kx + w_y ly - w(t+\Delta t))} \begin{pmatrix} u_{k,l}^0 \\ v_{k,l}^0 \\ \phi_{k,l}^0 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Substituindo (3.3) e (3.4) em (3.2), cancelando o termo $e^{-i(w_x kx + w_y ly - wt)}$ e aban-

donando os índices k, l , obtemos

$$\begin{cases} \frac{e^{iw\Delta t} - 1}{\Delta t} u^0 - \frac{e^{iw\Delta t} + 1}{2} i c_x^2 k \phi^0 & = 0, \\ \frac{e^{iw\Delta t} - 1}{\Delta t} v^0 - \frac{e^{iw\Delta t} + 1}{2} i c_y^2 l \phi^0 & = 0, \\ \frac{e^{iw\Delta t} - 1}{\Delta t} \phi^0 - \Phi \frac{e^{iw\Delta t} + 1}{2} (iku^0 + ilv^0) & = 0. \end{cases}$$

Multiplicando cada equação acima por $e^{-\frac{i}{2}w\Delta t}$ obtemos

$$\begin{cases} \frac{-2iS}{\Delta t} u^0 - C c_x^2 i k \phi^0 & = 0 \\ \frac{-2iS}{\Delta t} v^0 - C c_y^2 i l \phi^0 & = 0 \\ \frac{-2iS}{\Delta t} \phi^0 - \Phi C i k u^0 - \Phi C i l v^0 & = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

onde

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \text{sen} \left(-w \frac{\Delta t}{2} \right)$$

e

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \text{cos} \left(-w \frac{\Delta t}{2} \right),$$

ou na forma matricial, denotando $T = S/C$, obtemos

$$\begin{pmatrix} -\frac{2T}{\Delta t} & 0 & -c_x^2 w_x k \\ 0 & -\frac{2T}{\Delta t} & -c_y^2 w_y l \\ -\Phi w_x k & -\Phi w_y l & -\frac{2T}{\Delta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \\ \phi^0 \end{pmatrix} = 0, \quad (3.6)$$

onde o caso $k = 0, l = 0$ é especial e nos dá $(u^0, v^0, \phi^0)^T = (0, 0, 0)$, que não tem interesse.

Ao zerar o determinante do sistema (3.6), obtemos a seguinte relação de dispersão

$$\frac{-2T}{\Delta t} \left(\frac{4T^2}{\Delta t^2} - \Phi (w_y l)^2 c_y^2 \right) + \Phi (w_x k)^2 c_x^2 \frac{2T}{\Delta t} = 0.$$

Seja $z = -\frac{2T}{\Delta t}$, então usando a notação (2.3), a relação de dispersão fica

$$z^3 - G_{k,l}^2 z = 0. \quad (3.7)$$

Donde obtemos

$$z_0 = 0 \quad (3.8)$$

ou

$$z_+ = G_{k,l} \quad (3.9)$$

$$z_- = -G_{k,l}. \quad (3.10)$$

Quando $\Delta t \rightarrow 0$, a matriz (3.6) converge para a matriz (2.2), com $U = V = 0$. Isto mostra que o esquema (3.2) é consistente. Também as matrizes (3.6) e (2.2) têm os mesmos autovetores. Assim, os autovetores do sistema discretizado (3.2) são iguais aos autovetores \mathbf{R}_+ , \mathbf{R}_- e \mathbf{R}_0 do sistema analítico (2.1), escolhendo $U = V = 0$.

Denotemos $\mathbf{S}^+ = (u^+, v^+, \phi^+)^T$. Então demonstramos o seguinte resultado

Teorema 3.1 *O esquema numérico (3.2) é consistente. Além disso, a sua solução geral não estacionária é dada por*

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^+(x, y, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{l=-\infty \\ (k,l) \neq (0,0)}}^{\infty} & \left[\alpha_+(k, l) e^{-i(w_x kx + w_y ly - z_+ t)} \mathbf{R}_+ + \right. \\ & + \alpha_-(k, l) e^{-i(w_x kx + w_y ly - z_- t)} \mathbf{R}_- + \\ & \left. + \alpha_0(k, l) e^{-i(w_x kx + w_y ly - z_0 t)} \mathbf{R}_0 \right], \end{aligned}$$

onde z_+ , z_- e z_0 são os autovalores dados em (3.8), (3.9) e (3.10) e $\mathbf{R}_+(k, l)$, $\mathbf{R}_-(k, l)$ e $\mathbf{R}_0(k, l)$ são os respectivos autovetores do sistema matricial (3.6), dados por (2.9), (2.11) e (2.12). Os coeficientes $\alpha_+(k, l)$, $\alpha_-(k, l)$ e $\alpha_0(k, l)$ podem ser determinados a partir da condição inicial dada.

Temos que

$$z = -\frac{2T}{\Delta t} = -2 \frac{\text{tg}\left(-w \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t} \rightarrow w,$$

quando $\Delta t \rightarrow 0$. Portanto, os autovalores dados em (3.8), (3.9) e (3.10) convergem para os autovalores dados em (2.5), (2.6) e (2.7), respectivamente, quando $\Delta t \rightarrow 0$. Notemos que os autovalores (3.8), (3.9) e (3.10) não dependem de Δx ; eles dependem apenas de Δt .

Consideremos uma grade de pontos com duplo valor de Δx conforme a figura 5. Nesta grade, mostramos que o método espectral aplicado ao sistema de equações de água-rasa resulta numa relação de dispersão em que a frequência da onda não depende do meio, ou seja, de Δx . Logo a velocidade de propagação também não depende do meio. Os modos \mathbf{R}_+ , \mathbf{R}_- e \mathbf{R}_0 também não dependem de Δx . Assim para método espectral, grades diferentes não interferem na velocidade de propagação da onda.

O erro de *aliasing* ocorre quando altos números de onda interferem em números de onda mais baixos, provocando uma má representação da onda na grade dada. Isto pode ocorrer mesmo para as grades uniformes de pontos. Examinaremos o erro de *aliasing* com mais detalhes na seção 3.3. Supomos, agora, que estejamos numa situação em que este erro não interfira na parte espectral do modelo de água-rasa dado pelo sistema (2.1). Essas observações juntamente com os resultados mostrados nas subseções 2.2.1 e 2.2.2 demonstram o seguinte

Teorema 3.2 *Suponhamos válida a condição de continuidade (2.13). No método espectral, para ondas que se propagam sem erro de aliasing em nenhuma das duas grades onde Δx está fixado, a transmissão de onda através da interface $y = 0$ é realizada sem desvio, mudança de amplitude ($\alpha_t = 1$) ou reflexão ($\alpha_r = 0$).*