

Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo
INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Superfícies de Weingarten e o Teorema de Hopf

por
MICHELE CUNHA DA SILVA

Orientador: MANFREDO PERDIGÃO DO CARMO

28 de outubro de 2005.

Agradecimentos

À Deus, que se fez presente e orientou todo o meu caminho, me dando força para lutar contra as dificuldades.

À minha família, que em sua simplicidade foi exemplo de retidão e honestidade.

Ao grande mestre Manfredo Perdigão do Carmo, que soube ser orientador, conselheiro, amigo, exemplo, ânimo. Agradeço novamente a Deus por ter colocado esta pessoa incrível em meu caminho.

Aos amigos, Dimas, Geisa, Heudson e Tim, que colaboraram com este trabalho e ajudaram a transformá-lo em realidade. A estes e a todos os meus outros amigos, pelo carinho, paciência, atenção e incentivo.

Ao Leonardo, por ter me trago o sorriso que eu havia perdido.

Resumo

Este trabalho estuda condições sobre as quais superfícies fechadas e de gênero zero são isométricas a uma esfera. Nos concentramos, basicamente, em um artigo de Hopf de 1951. Neste artigo, são consideradas superfícies dotadas de uma relação W entre as curvaturas principais, as chamadas Superfícies de Weingarten.

Demonstramos o Teorema de Hopf que afirma que uma Superfície de Weingarten analítica, fechada, com gênero zero e dotada de uma propriedade nos pontos umbílicos, é isométrica a uma esfera. Fazemos isto introduzindo um sistema de parâmetros complexos na Segunda Forma Fundamental, e obtemos a Forma Quadrática de Hopf. A partir desta, estudamos localmente os pontos umbílicos da superfície.

Observamos que o artigo de Hopf se coloca como um trabalho seminal, ou seja, se originam dele outros trabalhos extremamente interessantes. Citamos dois destes trabalhos, um de Chern de 1955 e um recente artigo de Alencar, do Carmo e Tribuzy. O primeiro, remove a hipótese de analiticidade do Teorema de Hopf e supõe apenas que a superfície é de classe C^3 . Já o segundo, usa as demonstrações dos teoremas de Hopf e Chern como fonte de inspiração para provar um resultado bem geral.

Palavras-chave: curvaturas principais, Superfície de Weingarten, analiticidade.

Conteúdo

1	Introdução	5
2	Preliminares	10
2.1	Noções Básicas	10
2.2	Parâmetros Isotérmicos	12
2.3	Parâmetros Complexos	14
2.4	Mudança de Parâmetros	16
2.5	Índice de um ponto umbílico isolado	17
3	Resultado Principal	21
3.1	Superfícies de Weingarten	21
3.2	Teorema Principal e Corolários	22
3.3	Demonstração do Teorema Principal	24
4	Alguns Resultados Relacionados com o Teorema de Hopf	30

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho descreve um teorema publicado em um artigo de Heinz Hopf (Ver [8]). Neste artigo, a pergunta inicial é se existem, além das esferas, outras superfícies fechadas com curvatura média constante $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = c$, onde k_1 e k_2 são as curvaturas principais da superfície, e supõe-se sempre que $k_1 \geq k_2$.

Até então, a resposta a esta questão era dada por um teorema de Liebmann, publicado em 1900 no *Mathematische Annalen* vol. 53, 91-112, e era limitada aos ovalóides. Estes são superfícies em \mathbb{R}^3 , compactas, conexas e com curvatura Gaussiana $K = k_1 k_2 > 0$. O Teorema de Liebmann diz que as esferas são os únicos ovalóides com curvatura média constante.

O intuito inicial de Hopf era demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 1.1. *Dentre todas as superfícies imersas em \mathbb{R}^3 fechadas com gênero zero, as esferas são as únicas com curvatura média constante.*

Neste teorema, diferentemente do Teorema de Liebmann, cabem nas hipóteses superfícies não convexas de gênero zero.

Hopf aplica na demonstração do Teorema 1.1 o Teorema de Poincaré (1885) que será enunciado na seção 2.5 do Capítulo 2, e observa que o mesmo método pode ser aplicado em superfícies com uma hipótese mais fraca que a de curvatura média constante. Surge, então, a perspectiva de resultados novos, além do mencionado no Teorema 1.1.

No mesmo artigo, Hopf faz uso do Teorema de Poincaré para mostrar o teorema seguinte (local) que tem o Teorema 1.1 (global!) como corolário.

Teorema 1.2. *Seja F um pedaço de superfície imersa em \mathbb{R}^3 com curvatura média H constante que não seja um pedaço de esfera ou de plano. Seja p um*

ponto umbílico de F , ou seja, um ponto onde $k_1 = k_2$. Então, p é um ponto umbílico isolado e seu índice é negativo.

O índice mencionado acima será definido cuidadosamente na seção 2.5 do Capítulo 2. Mas podemos adiantar que, no caso de uma superfície compacta de gênero zero, segue-se do Teorema de Poincaré que a soma dos índices de todos os seus pontos umbílicos isolados é positiva e, portanto, algum destes pontos deve possuir índice positivo. Decorre então do Teorema 1.2 que, nas hipóteses do Teorema 1.1, devemos ter uma esfera.

A inspiração para a demonstração do Teorema 1.2 parte de utilizar, para curvatura média constante, métodos que foram úteis em superfícies mínimas, a saber, a aplicação de variáveis complexas ao estudo das superfícies com H constante.

Além do Teorema que foi mencionado anteriormente, também se deve a Liebmann um outro teorema que diz que as esferas são as únicas superfícies com curvatura Gaussiana K constante e, neste caso, não precisamos considerar somente os ovalóides. De fato, como numa superfície fechada existem pontos com $K > 0$, segue da constância de K que $K > 0$ em qualquer ponto da superfície e temos assim um ovalóide.

Os dois teoremas de Liebmann citados podem ser provados como caso especial de um teorema geral. A prova deste teorema, é basicamente a mesma dada por Hilbert (Ver [6], capítulo 5, seção 2) em 1901 para o teorema com a hipótese K constante. Esta prova explora o fato de que em uma tal superfície uma curvatura principal atinge seu máximo e a outra atinge seu mínimo no mesmo ponto. A mesma demonstração ainda vale quando a soma $k_1 + k_2$ é uma constante e vale também para o seguinte teorema.

Teorema 1.3. *Num ovalóide, que não é uma esfera, uma curvatura principal não pode ser uma função monótona decrescente da outra.*

A descoberta deste teorema é a devida a S. S. Chern (Ver [4]). No mesmo artigo, Chern afirmou que um teorema análogo para função monótona crescente não é válido. Um exemplo disto é dado por um elipsóide de revolução. Considere uma elipse com eixos de comprimento $2a$ e $2b$, com $a > b$, e gire-a em torno do eixo menor. Se escrevermos as equações paramétricas da elipse como

$$x = a \cos t, \quad z = b \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

obtemos para as curvaturas principais do elipsóide

$$k_1 = \frac{a}{b} (b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t)^{-1/2}$$

e

$$k_2 = ab(b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t)^{-3/2},$$

donde observamos que $k_1 \geq k_2$ e $k_2 = \frac{b^4}{a^2} k_1^3$, ou seja, k_2 é uma função monótona crescente de k_1 .

Após generalizar o teorema que trata de curvatura média H constante de ovalóides para qualquer superfície de gênero zero, a pergunta natural de Hopf dizia respeito à possibilidade de generalizar o Teorema 1.3 da mesma forma. E isto foi feito em certo sentido, pois Hopf conseguiu provar o teorema para uma classe maior de superfícies do que aquelas onde uma curvatura principal é uma função monótona decrescente da outra. E é disto que trata nosso trabalho.

A classe de superfícies que nos interessa é a de Superfícies de Weingarten, ou W-Superfícies, que são superfícies nas quais existe uma relação

$$W(k_1, k_2) = 0.$$

As Superfícies de Weingarten podem ser interpretadas da seguinte maneira:

Considere, além de um pedaço de superfície F , um plano no qual k_1 e k_2 são coordenadas ortogonais e cada ponto $p \in F$ corresponde a um ponto do plano cujas coordenadas são as curvaturas principais em p . Em geral, quando o par de funções (k_1, k_2) é funcionalmente independente, a imagem de F é bidimensional; se existe uma relação W entre k_1 e k_2 , a imagem é uma curva, e F é uma Superfície de Weingarten. A curva imagem da equação W chama-se o W-diagrama da superfície. O caso em que as duas curvaturas principais são constantes, tem como diagrama um único ponto, e não será considerado, pois como é bem conhecido (Ver [6], pág. 147) F é um pedaço de esfera ou de plano.

Considerando a questão de superfícies fechadas, Hopf levanta então a seguinte questão geral:

“Que Superfícies de Weingarten fechadas existem?”

Para ter uma idéia da resposta, vamos considerar alguns exemplos. Primeiro, as superfícies fechadas de rotação, pois como k_1 e k_2 são constantes em qualquer círculo de rotação, a imagem da superfície no plano (k_1, k_2) é

a mesma imagem de um meridiano e é, então, uma curva. Segundo, as superfícies tubulares fechadas, isto é, superfícies geradas quando consideramos uma curva fechada no espaço e, em cada ponto, colocamos um disco de raio r (pequeno), ortogonal à curva, com o centro do disco na curva; nestas superfícies, uma curvatura principal é constante e seu W-diagrama está em uma linha paralela a um dos eixos. No primeiro caso, obtemos superfícies de gênero 0 ou 1 e, no segundo, superfícies de gênero 1.

Um problema proposto por Hopf, ao que eu saiba ainda não resolvido, é se estas são as únicas Superfícies de Weingarten fechadas que existem.

O Teorema 1.1 diz que nenhuma Superfície de Weingarten fechada de gênero 0, além da esfera, possui um diagrama que faça um ângulo de 45° com o eixo coordenado k_1 e seja ortogonal à reta $k_1 = k_2$. (Como é fácil ver, isto é equivalente a $k_1 + k_2 = \text{constante}$).

O Teorema 1.1 segue do Teorema 1.2 porque puderam ser feitas algumas afirmações sobre os pontos umbílicos das superfícies com curvatura média constante. Com isto em mente, vamos também examinar localmente, no caso de certas Superfícies de Weingarten, os pontos umbílicos. No plano (k_1, k_2) , um ponto umbílico corresponde a um ponto da diagonal, isto é, da reta de equação $k_1 = k_2$. Consideraremos, portanto, uma curva do diagrama que passa por este ponto e chegaremos a conclusões semelhantes as do Teorema 1.2.

Nosso objetivo é usar estas tais conclusões para provar o seguinte teorema de Hopf:

Teorema 1.4. *Considere uma imersão em \mathbb{R}^3 de uma superfície abstrata S , fechada, de gênero zero e analítica. Suponha que ela seja uma Superfície de Weingarten com a propriedade $\frac{dk_1}{dk_2} = -1$ nos pontos umbílicos (chamaremos tais Superfícies de Weingarten de particulares). Então, S é isométrica a uma esfera com a métrica induzida.*

Provaremos este teorema no Capítulo 3 deste trabalho e, para isto, dedicaremos o Capítulo 2 aos preliminares necessários à prova.

Observamos, ainda, que o interesse por este tema foi além do trabalho de Hopf. No Capítulo 4, comentaremos dois artigos, um de Chern e outro de Hilário Alencar, Manfredo do Carmo e Renato Tribuzy, relacionados a este assunto. O artigo de Hopf se coloca como ponto de partida para uma

grande discussão sobre as superfícies dotadas de propriedades envolvendo as curvaturas principais k_1 e k_2 .

Capítulo 2

Preliminares

Veremos neste capítulo algumas noções básicas de Geometria Diferencial. Admitiremos as notações e resultados do livro *Differential Geometry of Curves and Surfaces* (Ver [6]).

2.1 Noções Básicas

Definição 2.1. Uma *superfície abstrata* é um conjunto S e uma família de aplicações injetivas $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow S$ de conjuntos abertos U_α de \mathbb{R}^2 em S tais que

1. $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = S$;
2. Para qualquer par α e β , com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^2 e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ e $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$ são diferenciáveis.

O par (U_α, x_α) com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma parametrização (ou sistema de coordenadas) de S em p ; $x_\alpha(U_\alpha)$ é chamada uma vizinhança coordenada de p .

Definição 2.2. Sejam S_1 e S_2 superfícies abstratas. Uma aplicação $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ é **diferenciável** em $p \in S_1$, se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2$, de uma vizinhança de $\varphi(p)$ existir uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$ de uma vizinhança de p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : x^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$. A aplicação φ é diferenciável em S_1 se é diferenciável em todo $p \in S_1$.

É fácil verificar que a definição não depende da escolha das parametrizações.

Seja S uma superfície abstrata. Uma função diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ é chamada uma curva diferenciável em S . Suponha $\alpha(0) = p \in S$, e seja $D(p)$ o conjunto das funções em S que são diferenciáveis em p . O vetor tangente à curva em $t = 0$ é a função

$$\alpha'(0)(f) = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, f \in D(p).$$

Um vetor tangente em um ponto $p \in S$ é o vetor tangente em $t = 0$ para alguma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ com $\alpha(0) = p$.

O conjunto de todos os vetores tangentes a S em p forma um espaço vetorial indicado por $T_p S$, o **espaço tangente** em S .

Com a noção de espaço tangente, podemos definir, em superfícies abstratas, a diferencial de uma aplicação diferenciável.

Definição 2.3. *Sejam S_1 e S_2 superfícies abstratas e considere a aplicação diferenciável $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$. Para cada $p \in S_1$ e cada $w \in T_p S_1$, considere uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_1$, com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$. Seja $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\varphi(p)}(S_2)$ dada por $d\varphi_p(w) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear bem definida, chamada **diferencial** de φ em p .*

Ver [6], pág. 84 para a prova de que a aplicação $d\varphi_p$ é linear e não depende de α mas apenas de seu vetor tangente.

Definição 2.4. *Uma **métrica Riemanniana** (ou **estrutura Riemanniana**) em uma superfície diferenciável M é uma correspondência que associa a cada $p \in M$ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente $T_p M$, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $x(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U .*

Esta definição não depende da escolha do sistema de coordenadas.

Uma superfície diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma **superfície Riemanniana**.

Definição 2.5. Uma aplicação diferenciável $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ de uma superfície abstrata S em \mathbb{R}^3 é dita uma **imersão** se a diferencial $d\varphi_p : T_p S \rightarrow T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^3$ é injetiva. Se, além disso, S possui uma métrica \langle, \rangle e

$$\langle d\varphi_p(v), d\varphi_p(w) \rangle_{\varphi(p)} = \langle v, w \rangle_p, \quad v, w \in T_p S,$$

φ é dita uma **imersão isométrica**.

A imagem $\varphi(S)$ de uma imersão $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ pode conter auto-interseções.

Definição 2.6. Seja S uma superfície abstrata. Uma imersão $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um **mergulho**, se considerando em $\varphi(S)$ a topologia induzida de \mathbb{R}^3 , φ é um homeomorfismo.

Definição 2.7. Uma curva parametrizada não constante, $\gamma : I \rightarrow S$ é chamada uma **geodésica** em $t \in I$ se o seu campo de vetores tangentes $\gamma'(t)$ é paralelo ao longo de γ em t , isto é

$$\frac{D}{dt} \gamma'(t) = 0,$$

onde $\frac{D}{dt} \gamma'(t)$ é a derivada covariante do campo de vetores $\gamma'(t)$ (Ver [6], pág. 238); γ é uma **geodésica parametrizada** se é geodésica para todo $t \in I$.

Definição 2.8. Uma superfície regular S é denominada **completa** quando para qualquer $p \in S$, qualquer geodésica parametrizada $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow S$ de S , partindo de $p = \gamma(0)$, pode ser estendida em uma geodésica parametrizada $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow S$, definida sobre toda a reta real \mathbb{R} .

2.2 Parâmetros Isotérmicos

Adotaremos um sistema de parâmetros isotérmicos, ou seja, parâmetros u e v tais que $E = G$ e $F = 0$, onde E , F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental. Tais parâmetros isotérmicos existem em qualquer superfície (Ver [6], pág. 227).

Neste sistema, a curvatura Gaussiana K e a curvatura média H são dadas por:

$$K = k_1 k_2 = \frac{eg - f^2}{E^2}, \quad (2.1)$$

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{e + g}{2E}, \quad (2.2)$$

onde e , f e g são os coeficientes da segunda forma fundamental e k_1, k_2 são as curvaturas principais, que convencionamos satisfazendo $k_1 \geq k_2$ (Ver [6], pág. 155-156).

A equação das linhas de curvatura

$$(fE - eF)du^2 + (gE - eG)dudv + (gF - fG)dv^2 = 0$$

(Ver [6], pág. 161), pode ser reescrita em parâmetros isotérmicos como

$$fEdu^2 + E(g - e)dudv - fEdv^2 = 0,$$

isto é,

$$-fdu^2 + (e - g)dudv + fdv^2 = 0. \quad (2.3)$$

As equações de Mainardi-Codazzi são dadas nos parâmetros adotados por:

$$e_v - f_v = \frac{E_v}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) = \frac{E_v}{2E} (e + g) = E_v H,$$

$$f_v - g_v = \frac{-G_u}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) = \frac{-E_u}{2E} (e + g) = -E_u H,$$

(Ver [6], pág.236).

Como $EH = \frac{e+g}{2}$, teremos

$$E_v H = -EH_v + \frac{e_v + g_v}{2}$$

e

$$E_u H = -EH_u + \frac{e_u + g_u}{2},$$

e as equações de Mainardi-Codazzi, se tornam

$$\left(\frac{e - g}{2} \right)_u + f_v = EH_u, \quad (2.4)$$

$$\left(\frac{e - g}{2} \right)_v + f_u = -EH_v. \quad (2.5)$$

2.3 Parâmetros Complexos

A vantagem de introduzir parâmetros isotérmicos é que eles realizam uma transformação conforme local do plano \mathbb{R}^2 na superfície S , isto é, a métrica $ds^2 = E(du^2 + dv^2)$ é, em cada ponto, um múltiplo positivo da métrica do plano. Portanto, a mudança de parâmetros isotérmicos $(u, v) \rightarrow (x, y)$ é uma transformação conforme local em \mathbb{R}^2 , com jacobiano não nulo.

Se introduzirmos os parâmetros complexos $z = u + iv$, $\bar{z} = x + iy$, a mudança de tais parâmetros é uma transformação holomorfa local no plano complexo $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ com derivada diferente de zero. Portanto, podemos considerar S localmente como uma superfície de Riemann (variedade complexa de dimensão um).

É conveniente introduzir, formalmente, as diferenciais

$$dz = du + idv \quad , \quad d\bar{z} = du - idv$$

e também os vetores

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right\} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right\}.$$

Observe que $\frac{\partial}{\partial z}(dz) = 1$, $\frac{\partial}{\partial z}(d\bar{z}) = 0$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(dz) = 0$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(d\bar{z}) = 1$.

Considere a segunda forma fundamental

$$II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2.$$

Vamos reescrevê-las em parâmetros complexos. Então

$$\begin{aligned} II &= \frac{e}{4}(dz^2 + d\bar{z}^2) - \frac{1}{2}if(dz + d\bar{z})(dz - d\bar{z}) - \frac{g}{4}(dz - d\bar{z})^2 \\ &= \frac{e}{4}(dz^2 + 2dzd\bar{z} + d\bar{z}^2) - \frac{1}{2}if(dz^2 - d\bar{z}^2) - \frac{g}{4}(dz^2 - 2dzd\bar{z} + d\bar{z}^2) \\ &= \left(\frac{e-g}{4} - \frac{1}{2}if \right) dz^2 + \frac{1}{2}(e+g)dzd\bar{z} + \left(\frac{e-g}{4} + \frac{1}{2}if \right) d\bar{z}^2. \end{aligned}$$

Fazendo

$$\phi(z, \bar{z}) = \frac{e-g}{2} - if, \tag{2.6}$$

$$\psi(z, \bar{z}) = e + g,$$

teremos

$$II = \frac{1}{2}(\phi dz^2 + \psi dzd\bar{z} + \overline{\phi d\bar{z}^2}). \quad (2.7)$$

A expressão ϕdz^2 é chamada a **Forma Quadrática de Hopf** e desempenha um papel essencial em tudo o que faremos neste trabalho. Como acabamos de ver, ela é a componente dz^2 da "complexificação" da segunda forma fundamental em parâmetros isotérmicos.

Analisemos, agora, a função $\phi(z, \bar{z})$ definida acima.

$$\begin{aligned} |\phi|^2 &= \left(\frac{e-g}{2}\right)^2 + f^2 \\ &= \frac{e^2 - 2eg + g^2 + 4f^2}{4} \\ &= \frac{e^2 + 2eg + g^2 - 4(eg - f^2)}{4} \\ &= \left(\frac{e+g}{2}\right)^2 - (eg - f^2) \\ &= E^2 H^2 - E^2 K \\ &= E^2(H^2 - K). \end{aligned}$$

Daí decorre que

$$\begin{aligned} \frac{|\phi|^2}{E^2} &= \frac{1}{4}(k_1^2 + 2k_1k_2 + k_2^2) - k_1k_2 \\ &= \frac{1}{4}(k_1^2 - 2k_1k_2 + k_2^2) \\ &= \left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{|\phi|}{E} = \frac{|k_1 - k_2|}{2}. \quad (2.8)$$

Portanto, os pontos umbílicos ($k_1 = k_2$) de uma superfície S são os zeros de ϕ .

Observe agora que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\{\phi(dz)^2\} &= \operatorname{Im}\left\{\left(\frac{e-g}{2} - if\right) \cdot (du^2 + 2idudv - dv^2)\right\} \\ &= (e-g)dudv - fdu^2 + fdv^2. \end{aligned}$$

Comparando o acima com a equação 2.3 das linhas de curvatura, obtemos que o anulamento da parte imaginária da forma de Hopf

$$\operatorname{Im}\{\phi(dz)^2\} = 0, \quad (2.9)$$

representa a equação das linhas de curvatura de S .

Com relação às equações 2.4 e 2.5, de Mainardi- Codazzi, multiplicando 2.5 por i e somando com 2.4, obtemos

$$\left[\left(\frac{e-g}{2}\right)_u + f_v\right] + i\left[\left(\frac{e-g}{2}\right)_v - f_u\right] = E(H_u - iH_v),$$

ou seja,

$$2\phi_z = 2EH_z.$$

Logo, as equações de Mainardi- Codazzi em parâmetros complexos têm a forma

$$\phi_z = EH_z. \quad (2.10)$$

2.4 Mudança de Parâmetros

Como o estudo anterior foi feito localmente, vamos analisar o comportamento de ϕdz^2 em uma mudança de parâmetros. Na verdade, não precisaremos disto neste trabalho e só o faremos aqui por completeza. Veremos que a forma de Hopf não depende da escolha de parâmetros e, portanto, está definida globalmente.

Considere os parâmetros isotérmicos x e y tais que $w = x + iy$ é uma função analítica de $z = u + iv$ com derivada não nula, ou seja, $w = w(z)$ e $w' \neq 0$. Desta forma, os novos parâmetros também são isotérmicos e temos uma correspondência conforme entre o plano uv e o plano xy .

Decorre da definição de ϕ e de e , f e g que

$$\phi = \frac{e-g}{2} - if$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}[(X_u \cdot N_u - X_v \cdot N_v) - i(X_u \cdot N_u + X_v \cdot N_v)] \\
&= -\frac{1}{2}(X_u - iX_v)(N_u - iN_v) \\
&= -\frac{1}{2} \cdot 2X_z \cdot 2N_z \\
&= -2X_z \cdot N_x,
\end{aligned}$$

onde X é o vetor posição e N é o vetor normal à superfície.

Se $\psi(w, \bar{w})$ denota a função análoga a $\phi(z, \bar{z})$ para os parâmetros x e y , então $\psi = -2X_w N_w$

Como $X_z = X_w \cdot \frac{dw}{dz}$ e $N_z = N_w \cdot \frac{dw}{dz}$,

$$\begin{aligned}
\phi &= -2X_z N_z = -2X_w \frac{dw}{dz} \cdot N_w \frac{dw}{dz} \\
&= -2X_w N_w \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 = \psi \left(\frac{dw}{dz} \right)^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\phi dz^2 = \psi dw^2$$

e ϕdz^2 realmente não depende da escolha de parâmetros.

2.5 Índice de um ponto umbílico isolado

Um campo vetorial em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ é uma aplicação que associa a cada $q \in U$ um vetor $w(q) \in \mathbb{R}^2$. O campo vetorial w é diferenciável se, escrevendo $q = (x, y)$ e $w(q) = (a(x, y), b(x, y))$, as funções a e b são diferenciáveis em U .

Um campo de direções r em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ é uma correspondência que associa a cada $p \in U$ uma linha $r(p)$ em \mathbb{R}^2 passando por p . r é diferenciável em $p \in U$ se existe um campo de vetores diferenciável e não nulo w , definido em uma vizinhança $V \subset U$ de p , tal que para cada $q \in V$, $w(q) \neq 0$ é uma base de $r(q)$; r é diferenciável em U se é diferenciável para cada $p \in U$.

Para cada campo vetorial diferenciável w em $U \subset \mathbb{R}^2$ existe um campo de direções diferenciável $r(p)$ correspondente, que é dado pela linha gerada por $w(p)$, $p \in U$.

Podemos definir campos vetoriais também em superfícies.

Definição 2.9. *Um campo vetorial w em um conjunto $U \subset S$ de uma superfície regular S é uma correspondência que associa a cada $p \in U$ um vetor $w(p) \in T_p S$. O campo vetorial w é diferenciável em $p \in U$ se, para alguma parametrização $x(u, v)$ em p , as funções $a(u, v)$ e $b(u, v)$ dadas por*

$$w(p) = a(u, v)x_u + b(u, v)x_v$$

são funções diferenciáveis em p .

Analogamente, podemos definir campos de direções em superfícies.

Na linguagem das equações diferenciais, um campo de direções é usualmente dado por

$$a(x, y)\frac{dx}{dt} + b(x, y)\frac{dy}{dt} = 0,$$

significando simplesmente que a um ponto $q = (x, y)$ associamos a reta passando por q e que contém o vetor $(b, -a)$ ou qualquer um de seus múltiplos não nulos.

Em uma vizinhança de um ponto não umbílico $p \in S$, é possível decompor a equação diferencial das linhas de curvatura 2.3 em dois fatores lineares distintos. Cada um destes fatores determina um campo diferenciável de direções e, em cada ponto de uma vizinhança de p , as direções dadas pelos fatores são distintas (Ver [6], pág. 185).

Seja v um campo vetorial diferenciável em uma superfície orientada S . Dizemos que um ponto $p \in S$ é um ponto **singular** de v se $v(p) = 0$. Um ponto singular p é **isolado** se existe uma vizinhança V de p em S tal que v não possui pontos singulares em V diferentes de p .

Para cada ponto singular isolado p de um campo vetorial v , podemos associar um número inteiro, chamado índice de v , que é definido como segue. Seja $x : U \rightarrow S$ uma parametrização ortogonal em $p = x(0, 0)$ compatível

com a orientação de S , e seja $\alpha : [0, l] \rightarrow S$ uma curva parametrizada simples, fechada e regular por partes tal que $\alpha([0, l]) \subset x(U)$ é a fronteira de uma região simples R contendo p como único ponto singular. Seja $v = v(t)$, $t \in [0, l]$, a restrição de v ao longo de α e considere $\varphi = \varphi(t)$ uma determinação diferenciável de ângulo de x_u a $v(t)$. Como α é fechada, existe um inteiro i definido por

$$2\pi i = \varphi(l) - \varphi(0) .$$

i é chamado o **índice** de v em p . É possível mostrar que o índice não depende das escolhas da curva α e da parametrização x (Ver [6], pág. 280).

Precisamos enunciar o Teorema de Poincaré que será bastante usado no que faremos adiante. Mas, para isto temos que definir o gênero g de uma superfície compacta e conexa $S \subset \mathbb{R}^3$.

Sabemos que toda superfície compacta e conexa $S \subset \mathbb{R}^3$ é homeomorfa a uma esfera com um número g de alças, ou “buracos” (Ver [6], pág. 273). O número g é chamado o **gênero** de S . Por exemplo, o gênero da esfera é 0, do tóro é 1, do bi-tóro é 2 e, em geral, do n -tóro é n .

Teorema 2.1 (Poincaré). *A soma dos índices de um campo vetorial v com pontos singulares isolados em uma superfície compacta S é igual a $2 - 2g$.*

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em [6], pág. 281.

No caso de campos de direções diferenciáveis, cada campo nos fornece, localmente, um campo vetorial diferenciável. E, neste caso, o índice j do campo de direções diferenciável r numa singularidade isolada p será definido como a metade do índice i determinado pelo campo vetorial a ele associado, ou seja, teremos $j = \frac{i}{2}$.

Considerando a equação 2.9 das linhas de curvatura, $Im\{\phi(dz)^2\} = 0$, vemos que esta equação determina dois campos de direções (as direções principais) e que as singularidades destes campos são os zeros da função ϕ dada por 2.6, ou seja, os pontos umbílicos de uma superfície S .

Considere, portanto, p um ponto umbílico isolado de uma superfície S . Então, p é uma singularidade isolada do campo de direções determinado pela equação $Im\{\phi(dz)^2\} = 0$. Decorre desta equação que

$$arg \phi + 2arg dz = m\pi , m \in \mathbb{Z}$$

ou

$$\arg dz = \frac{m\pi}{2} - \frac{1}{2} \arg \phi, \quad (2.11)$$

onde dz representa o vetor tangente a uma linha de curvatura em cada ponto. Assim, o índice j deste campo em p é dado por

$$j = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \delta(\arg dz),$$

onde $\delta(\arg dz)$ representa, neste caso, a variação de ângulo $\varphi(l) - \varphi(0)$.

Pela relação dada por 2.11,

$$j = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{4} \delta(\arg \phi). \quad (2.12)$$

Capítulo 3

Resultado Principal

3.1 Superfícies de Weingarten

Nesta seção introduziremos alguns conceitos necessários para enunciar o principal resultado deste trabalho. Começaremos lembrando a definição de Superfície de Weingarten dada no Capítulo 1, a qual é nosso objeto de estudo, e imporemos algumas condições em seus pontos umbílicos.

Definição 3.1. *Uma **Superfície de Weingarten** (ou W -superfície) é uma superfície dotada de uma relação entre as curvaturas principais k_1 e k_2 , dada por $W(k_1, k_2) = 0$.*

Admitiremos que W tem primeiras derivadas contínuas e que $(W_{k_1}, W_{k_2}) \neq (0, 0)$ quando $k_1 = k_2$.

Vamos ainda admitir a hipótese crucial $\frac{dk_1}{dk_2} = -1$ nos pontos umbílicos. Superfícies de Weingarten munidas desta propriedade são chamadas **particulares**.

Dada uma Superfície de Weingarten S , suponhamos que p_0 seja um ponto umbílico tal que existe uma sequência $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ de pontos não umbílicos convergindo para p_0 .

Seja $h = H(p_0) = k_1(p_0) = k_2(p_0)$.

Então, de $\frac{dk_1}{dk_2} = -1$ nos pontos umbílicos, segue-se que

$$\lim_{p_n \rightarrow p_0} \frac{k_1(p_n) - h}{k_2(p_n) - h} = -1 \quad (3.1)$$

3.2 Teorema Principal e Corolários

Teorema 3.1 (Hopf). *Considere um imersão em \mathbb{R}^3 de uma superfície abstrata S , fechada, de gênero zero e analítica (isto quer dizer que as parametrizações e as mudanças de parâmetros são analíticas reais). Suponha que ela seja uma superfície de Weingarten particular. Então, com a métrica induzida ela é isométrica a uma esfera.*

Corolário 3.1. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície imersa, analítica, fechada, com gênero zero e curvatura Gaussiana K constante. Então, S é isométrica a uma esfera.*

Prova.

Neste caso, temos que a condição de Weingarten é dada por

$$W(k_1, k_2) = k_1 k_2 - c = 0$$

e segue-se que

$$dk_1 \cdot k_2 + dk_2 \cdot k_1 = 0 .$$

Logo,

$$\frac{dk_1}{dk_2} = -\frac{k_1}{k_2} = -1$$

nos pontos umbílicos.

Portanto, S é isométrica a uma esfera. □

Corolário 3.2. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície imersa, analítica, fechada, com gênero zero e curvatura média H constante. Então, S é isométrica a uma esfera.*

Prova.

Neste caso, a condição de Weingarten é dada por

$$W(k_1, k_2) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) - c = 0 .$$

Decorre daí que

$$\frac{1}{2}(dk_1 + dk_2) = 0$$

ou seja,

$$\frac{dk_1}{dk_2} = -1 .$$

Assim, S é isométrica a uma esfera. □

Observação: No caso do Corolário 3.2, a hipótese de analiticidade não é necessária, pois o fato da curvatura média H ser constante implica que a imersão é analítica. De fato, se a superfície é localmente descrita por $z = z(x, y)$ temos

$$H = \frac{(1 + z_y)^2 z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (1 + z_x)^2 z_{yy}}{2(1 + z_x^2 + z_y^2)^{3/2}} = c$$

(ver [6], pág. 163).

Logo,

$$(1 + z_y^2)z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (1 + z_x^2)z_{yy} - 2c(1 + z_x^2 + z_y^2)^{3/2} = 0 \quad (3.2)$$

Uma equação diferencial parcial de segunda ordem na variável dependente u e com variáveis independentes x e y é uma equação da forma

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G ,$$

onde os coeficientes são funções de x e y e não se anulam simultaneamente. Uma equação do tipo acima é **elíptica** num ponto (x_0, y_0) quando

$$B^2(x_0, y_0) - 4A(x_0, y_0)C(x_0, y_0) < 0 .$$

Na equação 3.2 temos que

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= (-2z_x z_y)^2 - 4(1 + z_x^2)(1 + z_y^2) = \\ &= 4z_x^2 z_y^2 - 4 - 4z_x^2 - 4z_y^2 - 4z_x^2 z_y^2 = \\ &= -4(1 + z_x^2 + z_y^2) < 0 . \end{aligned}$$

Portanto, a equação 3.2 é uma equação diferencial elíptica em todos os pontos.

Um teorema de Bernstein (Ver [3]) afirma que uma solução C^3 de uma equação diferencial elíptica é analítica. Assim, as superfícies com curvatura média constante são de fato analíticas.

3.3 Demonstração do Teorema Principal

Estamos agora em condição de provar o teorema de Hopf enunciado na seção 3.2. Esta demonstração se concentra nos pontos umbílicos de S e usa fortemente sua analiticidade.

Teorema 3.2 (Hopf). *Considere um imersão em \mathbb{R}^3 de uma superfície abstrata S , fechada, de gênero zero e analítica. Suponha que ela seja uma superfície de Weingarten particular. Então, com a métrica induzida ela é isométrica a uma esfera.*

Prova.

Precisamos primeiramente caracterizar os pontos umbílicos de S .

Lema 3.1. *Dado um ponto umbílico $p_0 \in S$, então*

- i) *ou p_0 é ponto interior do conjunto U dos pontos umbílicos de S ;*
- ii) *ou p_0 é ponto umbílico isolado com índice negativo.*

Prova.

Suponhamos que i) não ocorra. Precisamos mostrar que p_0 é um ponto isolado e que seu índice é negativo. Faremos isto nos três lemas seguintes. Escolha um parâmetro complexo z em uma vizinhança de p_0 tal que $z(p_0) = 0$.

Lema 3.2. *Considerando S nas condições do Teorema de Hopf, temos que ϕ , definida anteriormente, é dada por*

$$\phi = cz^n + r^{n+1}B ,$$

onde $c \neq 0$ e B é limitado numa vizinhança suficientemente pequena de $z = 0$.

Prova.

Como S é analítica, ϕ e H têm desenvolvimentos em série de Taylor em torno de p_0 . Logo, como $z = 0$ é um ponto umbílico, isto é, $\phi(0) = 0$, teremos

$$\phi(z, \bar{z}) = \phi^{(n)}(z, \bar{z}) + \phi^{(n+1)}(z, \bar{z}) + \dots , \quad n > 0$$

e

$$H(z, \bar{z}) = H^{(0)}(z, \bar{z}) + H^{(1)}(z, \bar{z}) + \dots ,$$

onde $\phi^{(k)}$, respectivamente $H^{(k)}$, é a k -ésima diferencial de ϕ , respectivamente de H , em p_0 e, portanto, uma forma homogênea de grau k . Temos também que $\phi^{(n)} \neq 0$ e, como $H^{(0)}$ é de grau zero, $H^{(0)} = H(p_0) = h$. Assim,

$$H(z, \bar{z}) - h = H^{(1)}(z, \bar{z}) + \dots$$

Sabemos da equação 2.10 que ϕ e H satisfazem a relação

$$\frac{1}{E} \phi_{\bar{z}} = H_z.$$

Substituindo as séries de Taylor de ϕ e H na equação acima, obtemos

$$\frac{1}{E} (\phi^{(n)}(z, \bar{z}) + \dots)_{\bar{z}} = (H^{(0)}(z, \bar{z}) + H^{(1)}(z, \bar{z}) + \dots)_z,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2E} [(\phi_u^{(n)} + i\phi_v^{(n)}) + \dots] = \frac{1}{2} [(H_u^{(0)} - iH_v^{(0)}) + (H_u^{(1)} - iH_v^{(1)}) + \dots],$$

onde $\phi_u^{(i)}$, $\phi_v^{(i)}$, $H_u^{(i)}$ e $H_v^{(i)}$ são formas homogêneas reais de grau i . Comparando os graus concluímos que $H_u^{(k)} = H_v^{(k)} = 0$, para $k < n$. Então, $H^{(k)}$ é constante. Mas, como $H^{(k)}$ é uma forma homogênea de grau k , $H^{(k)} = 0$, $0 < k < n$.

Então,

$$H(z, \bar{z}) - h = H^{(n)}(z, \bar{z}) + H^{(n+1)}(z, \bar{z}) + \dots \quad (3.3)$$

Como p_0 não é ponto interior de U , existe uma sequência de pontos não umbílicos $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ convergindo para p_0 , e da equação 3.1 segue-se que

$$\lim_{p_n \rightarrow p_0} \frac{k_1(p_n) - h}{k_2(p_n) - h} = -1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{p_n \rightarrow p_0} \frac{\frac{k_1(p_n) - h}{k_2(p_n) - h} + 1}{\frac{k_1(p_n) - h}{k_2(p_n) - h} - 1} = \lim_{p_n \rightarrow p_0} \frac{\frac{k_1(p_n) - h + k_2(p_n) - h}{k_2(p_n) - h}}{\frac{k_1(p_n) - h - k_2(p_n) + h}{k_2(p_n) - h}} \\ &= \lim_{p_n \rightarrow p_0} \frac{k_1(p_n) + k_2(p_n) - 2h}{k_1(p_n) - k_2(p_n)} = \lim_{p_n \rightarrow p_0} \frac{2[H(p_n) - h]}{k_1(p_n) - k_2(p_n)} \end{aligned}$$

$$= \lim_{p_n \rightarrow p_0} \frac{H(p_n) - h}{\frac{1}{2}[k_1(p_n) - k_2(p_n)]} .$$

Vimos que na equação 2.8 que

$$\frac{|\phi|}{E} = \frac{|k_1 - k_2|}{2} .$$

Logo, num sistema isotérmico com $E(p_0) = 1$ e lembrando que admitimos $k_1 \geq k_2$, temos

$$\lim_{p_n \rightarrow p_0} \frac{H(p_n) - h}{|\phi(p_n)|} = 0 . \quad (3.4)$$

Substituindo a equação 3.3 no limite acima, segue-se que

$$\lim_{p_n \rightarrow p_0} \frac{H^{(n)} + \dots}{|\phi^{(n)} + \dots|} = 0 .$$

Se escrevemos z em termos de coordenadas polares r e θ , obtemos

$$H^{(m)} = r^m H^{(m)}(\cos\theta, \sin\theta) = r^m H^{(m)}(\theta),$$

e

$$\phi^{(m)} = r^m \phi^{(m)}(\cos\theta, \sin\theta) = r^m \phi^{(m)}(\theta),$$

onde $H^{(m)}$ e $\phi^{(m)}$ são polinômios homogêneos de grau m em $\cos\theta$ e $\sin\theta$. Então,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{p_n \rightarrow p_0} \frac{r^n H^{(n)} + \dots}{|r^n \phi^{(n)} + \dots|} \\ &= \lim_{p_n \rightarrow p_0} \frac{H^{(n)}(\theta) + r H^{(n+1)}(\theta) + \dots}{|\phi^{(n)}(\theta) + r \phi^{(n+1)}(\theta) + \dots|} \\ &= \frac{H^{(n)}(\theta)}{|\phi^{(n)}(\theta)|} = \frac{r^n H^{(n)}(\theta)}{|r^n \phi^{(n)}(\theta)|} = \frac{H^{(n)}(z, \bar{z})}{\phi^{(n)}(z, \bar{z})} \end{aligned}$$

Logo, $H^{(n)}(z, \bar{z}) = 0$ e, conseqüentemente, $(H^{(n)}(z, \bar{z}))_z = 0$. De 2.10 segue-se, então, que $(\phi^{(n)}(z, \bar{z}))_{\bar{z}} = 0$. Portanto, $\phi^{(n)}(z, \bar{z})$ é uma função analítica de z e, sendo homogênea de grau n , $\phi^{(n)} = cz^n$, $c \neq 0$. Assim,

$$\phi = cz^n + \phi^{(n+1)} + \dots ,$$

ou seja,

$$\phi = cz^n + r^{n+1}B ,$$

onde $|B| < M \in \mathbb{R}_+^*$ numa vizinhança suficientemente pequena de $z = 0$. \square

Lema 3.3. p_0 é um ponto umbílico isolado.

Prova.

Admitindo a caracterização de ϕ dada pelo lema 3.2, consideremos uma vizinhança de p_0 com $r < \frac{|c|}{M}$.

Suponha $\phi = 0$ em algum ponto z diferente de 0 nesta vizinhança.

Então, para tal z , obtemos sucessivamente

$$cz^n = -r^{n+1}B ,$$

$$|c|r^n = r^{n+1}|B| ,$$

donde

$$|c| = r|B| , \text{ para algum } r \neq 0$$

Logo, como $B < M$, teremos $|c| < rM$, ou seja, $\frac{|c|}{M} < r$. Absurdo!

Assim, p_0 é isolado. \square

Para finalizar a demonstração do lema 3.1, basta mostrar que o índice de p_0 é negativo.

Lema 3.4. O índice j de p_0 é dado por $j = -\frac{n}{4}$, para $n \in \mathbb{N}$.

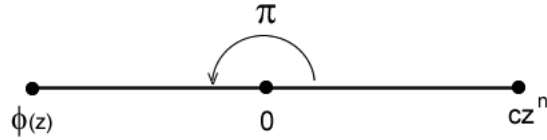
Prova.

Como $\delta(\arg cz^n) = 2\pi n > 0$ e da equação 2.12 sabemos que $j = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{4} \delta(\arg \phi)$, temos apenas que mostrar que $\delta(\arg \phi(z)) = \delta(\arg cz^n)$ numa vizinhança com $r < \frac{|c|}{M}$.

Nesta vizinhança temos

$$|\phi - cz^n| = |r^{n+1}B| = r^{n+1}|B| < r^{n+1}M < r^{n+1}\frac{|c|}{r} = r^n|c| = |cz^n|$$

Geometricamente, isto implica que $\phi(z)$, 0 e cz^n nunca podem estar alinhados de modo que 0 esteja entre $\phi(z)$ e cz^n .



Logo, $\arg \phi(z) - \arg cz^n \neq k\pi$, para todo inteiro ímpar k .
Temos, então que

$$\frac{\delta(\arg \phi) - \delta(\arg cz^n)}{2\pi} = m, m \in \mathbb{Z}$$

enquanto que

$$\frac{\arg \phi - \arg cz^n}{2\pi} \neq \frac{k}{2},$$

k inteiro ímpar.

Pela continuidade de $\arg \phi(z) - \arg cz^n$, temos então que $\delta(\arg \phi) - \delta(\arg cz^n) = 0$.

Portanto, $\delta(\arg \phi(z)) = \delta(\arg cz^n)$, e $j = -\frac{n}{4} < 0$.

□

Dos Lemas 3.3 e 3.4, segue então que p_0 é um ponto umbílico isolado com índice negativo, provando o Lema 3.1.

□

Utilizando a caracterização dos pontos umbílicos, dada pelo Lema 3.1, e o Teorema de Poincaré, vamos mostrar que todos os pontos da superfície S são umbílicos.

Lema 3.5. *Todos os pontos de S são umbílicos.*

Prova.

Seja U o conjunto dos pontos umbílicos de S .

Como o gênero de S é 0 , U é não vazio, pelo Teorema de Poincaré.

Se U é finito, pelo Teorema de Poincaré novamente, segue-se que U contém algum ponto com índice positivo, contradizendo o Lema 3.1. Logo, U é infinito.

Como S é compacta, U tem um ponto de acumulação p . U é fechado, pois é o conjunto dos zeros da função contínua $k_1 - k_2$. Como p é ponto de acumulação de U , $p \in U$, e $p \in \text{int}U$ pelo Lema 3.1.

Provaremos agora que U é aberto e, assim, todo ponto de S pertence a $\text{int}U$.

Suponha que exista $q \notin \text{int}U$. Então, um caminho contínuo ligando p a q tem um primeiro ponto r comum com $\overline{S - \text{int}U}$. r é ponto de acumulação de U , logo $r \in U$. Mas, $r \notin \text{int}U$. Absurdo! Logo, q não existe, ou seja, $\text{int}U = S$.

Como U é aberto e fechado, $U = S$ e portanto, todos os pontos de S são umbílicos.

□

Como a esfera é a única superfície fechada em que todos os pontos são umbílicos, isto termina a demonstração do Teorema de Hopf.

□

Observação: Convém ressaltar que, em nossa demonstração, a relação de Weingarten $W(k_1, k_2) = 0$ não foi utilizada. Apenas usamos a relação 3.4. Portanto, o diagrama de curvatura no plano (k_1, k_2) não precisa ser uma curva, mas pode ser uma região que encontra a diagonal de uma maneira especial.

Capítulo 4

Alguns Resultados Relacionados com o Teorema de Hopf

Como vimos na Introdução deste trabalho, o estudo de superfícies dotadas de uma relação entre as curvaturas principais, as Superfícies de Weingarten, despertou o interesse de vários matemáticos. Artigos relacionados com o assunto surgiram após o artigo de Hopf de que tratamos. Neste capítulo, mencionaremos o artigo “On Special W-Surfaces” de Chern (Ver [5]). Mencionaremos, também, o preprint “A theorem of H. Hopf and the Cauchy-Riemann inequality”, de Hilário Alencar, Manfredo do Carmo e Renato Tribuzy (Ver [2]), que tomou os artigos de Hopf e Chern como inspiração.

Trataremos agora do artigo “On Special W-Surfaces”, de Chern.

Chern prova o resultado de Hopf em um contexto um pouco diferente. A principal diferença é que a hipótese de analiticidade é removida e a imersão da superfície S é considerada apenas de classe C^3 . Na verdade, Philip Hartman e Aurel Wintner publicaram uma demonstração deste resultado no artigo “Umbilical points and W-Surfaces”, em 1954 (Ver [7]). Entretanto, Chern apresentou em 1955 uma demonstração mais elegante para o tal teorema.

Estaremos interessados em Superfícies de Weingarten para as quais a relação $W(k_1, k_2) = 0$ pode ser escrita na forma

$$f(H, \mu) = 0 \quad , \quad \mu = H^2 - K, \quad (4.1)$$

onde f é de classe C^1 .

Uma diferença com relação ao artigo de Hartman-Wintner é que a função f é admitida de classe C^2 por eles e de classe C^1 por Chern.

Como

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad , \quad \mu = \left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2$$

e W também é de classe C^1 , em Superfícies de Weingarten temos

$$W_{k_1} = \frac{1}{2}f_H + \frac{k_1 - k_2}{2}f\mu, \tag{4.2}$$

$$W_{k_2} = \frac{1}{2}f_H - \frac{k_1 - k_2}{2}f\mu.$$

Com isto, em um ponto umbílico, temos

$$W_{k_1} \cdot W_{k_2} = \frac{1}{4}f_H^2 \geq 0. \tag{4.3}$$

No artigo de Chern, uma Superfície de Weingarten com a propriedade 4.1 é chamada **especial** se $f_H \neq 0$ em todo ponto umbílico.

Afirmção 4.1. *O fato de ser $f_H \neq 0$ nos pontos umbílicos é equivalente a que $W_{k_1} \neq 0$ e $W_{k_2} \neq 0$ nestes pontos.*

Prova.

Se $f_H \neq 0$ quando $k_1 = k_2$, decorre de 4.3 que $W_{k_1} \cdot W_{k_2} \neq 0$ e, portanto, $W_{k_1} \neq 0$ e $W_{k_2} \neq 0$ nos pontos umbílicos.

Por outro lado,

$$f_{k_1} = W_{k_1} = \frac{1}{2}f_H + \frac{k_1 - k_2}{2}f\mu,$$

$$f_{k_2} = W_{k_2} = \frac{1}{2}f_H - \frac{k_1 - k_2}{2}f\mu.$$

Somando as equações acima, nos pontos umbílicos obtemos

$$2f_{k_1} = 2f_{k_2} = f_H.$$

Se $W_{k_1} \neq 0$ e $W_{k_2} \neq 0$, temos $f_{k_1} \neq 0$ e $f_{k_2} \neq 0$ e, assim, $f_H \neq 0$, o que conclui a prova.

□

O resultado que Chern demonstra é referente a Superfícies de Weingarten especiais, e não a Superfícies de Weingarten particulares como fez Hopf. O primeiro, faz uso da hipótese $f_H \neq 0$, e não da hipótese $\frac{dk_1}{dk_2} = -1$ que é crucial na demonstração de Hopf. O resultado que Chern demonstra e enunciaremos a seguir é sobretudo importante porque vamos supor que a imersão é apenas de classe C^3 , e não analítica.

O teorema de Chern é o seguinte:

Teorema 4.1. *Considere uma imersão em \mathbb{R}^3 de uma superfície abstrata S , fechada, de gênero zero e classe C^3 , ou seja, as parametrizações e as mudanças de parâmetros são de classe C^3 . Suponha que ela seja uma Superfície de Weingarten especial. Então, com a métrica induzida, S é isométrica a uma esfera.*

Prova.

A demonstração faz uso de dois lemas que requerem algum cuidado e serão aqui admitidos.

Considere novamente os parâmetros isotérmicos u e v e os parâmetros complexos $z = u + iv$ e $\bar{z} = u - iv$. Considere, também, a primeira e a segunda forma fundamental da superfície, $E(du^2 + dv^2)$ e $edu^2 + 2fdudv + gdv^2$, respectivamente.

Como

$$\mu = \left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2,$$

segue-se da equação 2.8 que

$$\mu = \frac{1}{E^2} \cdot \phi \cdot \bar{\phi},$$

onde

$$\phi(z, \bar{z}) = \frac{e - g}{2} - if$$

é a forma de Hopf já citada na equação 2.6.

Se a superfície é uma Superfície de Weingarten satisfazendo a equação 4.1, temos em uma vizinhança de um ponto umbílico que

$$f_H \cdot H_z + f_\mu \cdot \mu_z = 0,$$

já que f é de classe C^1 e a imersão é considerada de classe C^3 , implicando em H e μ serem de classe C^1 .

Como a Superfície de Weingarten é especial, $f_H \neq 0$ nos pontos umbílicos e, da equação anterior, obtemos

$$H_z = -\frac{f_\mu}{f_H} \cdot \mu_z.$$

Então, da equação 2.10 de Mainardi-Codazzi, segue-se que

$$\begin{aligned} \phi_{\bar{z}} &= EH_z = E \cdot \left(-\frac{f_\mu}{f_H} \right) \cdot \mu_z \\ &= E \cdot \left(-\frac{f_\mu}{f_H} \right) \cdot \left(\frac{1}{E^2} \phi \bar{\phi} \right)_z \\ &= E \cdot \left(-\frac{f_\mu}{f_H} \right) \cdot \frac{(\phi \bar{\phi})_z \cdot E^2 - \phi \bar{\phi} \cdot 2EE_z}{E^4} \\ &= -\frac{f_\mu}{Ef_H} \cdot (\phi \bar{\phi})_z + \frac{f_\mu}{f_H} \cdot \frac{2E_z}{E^2} \cdot \phi \bar{\phi}. \end{aligned}$$

Fazendo

$$P = -\frac{f_\mu}{Ef_H}$$

e

$$Q = \frac{f_\mu}{f_H} \cdot \frac{2E_z}{E^2},$$

temos

$$\phi_{\bar{z}} = P \cdot (\phi \bar{\phi})_z + Q \cdot \phi \bar{\phi}, \quad (4.4)$$

ou seja, ϕ satisfaz a uma equação diferencial não linear.

Enunciaremos agora os lemas que foram mencionados no início da demonstração.

Lema 4.1. *Seja $\phi(z, \bar{z})$ uma solução da equação 4.4, em uma vizinhança suficientemente pequena de $z = 0$, no qual $\phi = 0$. Suponha que*

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\phi(z, \bar{z})}{z^{k-1}} = 0.$$

Então,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\phi(z, \bar{z})}{z^k}$$

existe.

Lema 4.2. *Nas hipóteses do Lema 4.1, suponha que*

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\phi(z, \bar{z})}{z^k} = 0, \quad \forall k \geq 1.$$

Então, $\phi(z, \bar{z}) \equiv 0$ em alguma vizinhança de $z = 0$.

Dos Lemas 4.1 e 4.2 decorre o Teorema 4.1. De fato, do Lema 4.2 segue-se que, se $z = 0$ não possui uma vizinhança constituída inteiramente por pontos umbílicos, existe um inteiro $k \geq 1$ tal que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\phi(z, \bar{z})}{z^{k-1}} = 0$$

e

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\phi(z, \bar{z})}{z^k}$$

poderia não existir. Mas, pelo Lema 4.1,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\phi(z, \bar{z})}{z^k}$$

existe, e é então não nulo, digamos igual a $c \neq 0$. Portanto, podemos escrever

$$\phi(z, \bar{z}) = cz^k + R, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{R}{z^k} = 0.$$

Isto mostra que 0 é um ponto umbílico isolado e que seu índice é negativo. Mas, pelo Teorema de Poincaré, a soma dos índices de um campo de direções com número finito de singularidades, em uma superfície de gênero zero, é positiva. Portanto, o Teorema 4.1 segue deste fato.

□

Observação: Como já mencionamos, a prova do Teorema de Hopf não utiliza a relação de Weingarten, mas apenas a relação 3.4. A demonstração de Chern remove a analiticidade, mas faz uso da relação de Weingarten. É possível que, para o caso em que usamos a relação 3.4, a analiticidade seja de fato necessária.

Passaremos agora a comentar o artigo “A theorem of H. Hopf and the Cauchy-Riemann inequality” de Alencar, do Carmo e Tribuzy (Ver [2]).

A prova do Teorema de Hopf serviu de inspiração para o resultado que comentaremos. O ponto da demonstração que chamou a atenção foi o fato da analiticidade da forma de Hopf ϕ ser usada somente para mostrar que ϕ é identicamente nula ou possui zeros isolados.

Antes de enunciar o teorema do artigo em questão, precisamos de algumas definições.

Denotaremos por $M^2(c)$ uma superfície Riemanniana de dimensão 2 com curvatura Gaussiana c constante e que, neste texto, será considerada completa e simplesmente conexa.

Consideremos uma superfície M imersa em $M^2(c) \times \mathbb{R}$ e introduzamos em M a forma quadrática, definida por Abresch e Rosenberg (Ver [1])

$$Q(X, Y) = 2H\alpha(X, Y) - c(d\xi \cdot X, d\xi \cdot Y),$$

onde X e Y são vetores tangentes a M , $\xi : M^2(c) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a projeção natural em \mathbb{R} , isto é, $\xi(p, t) = t$, $t \in \mathbb{R}$, α é a segunda forma fundamental em parâmetros isotérmicos dada pela equação 2.7 e H é a curvatura média em M .

Dada Q acima, considere o termo que possui $dzdz$, que é a componente $(2, 0)$ de Q , denotada por $Q^{(2,0)}$. No caso de α , sua componente $(2, 0)$ é dada por

$$\alpha^{(2,0)} = \frac{1}{2}\phi dzdz.$$

Estamos agora em condição de enunciar o Teorema de Alencar, do Carmo e Tribuzy.

Teorema 4.2. *Seja M uma superfície compacta, imersa em $M^2(c) \times \mathbb{R}$ e de gênero zero. Admita que*

$$|dH| \leq g|Q^{(2,0)}|,$$

onde $|dH|$ é a norma da diferencial dH da curvatura média H de M , e g é uma função real, contínua e não negativa. Então, $Q^{(2,0)} \equiv 0$, e M é uma superfície mergulhada invariante por rotações em $M^2(c) \times \mathbb{R}$.

Abresch e Rosenberg provaram este resultado para o caso H constante. No entanto, veremos que o mesmo resultado ainda vale se H não é necessariamente uma constante, mas se sua diferencial dH satisfaz a uma certa desigualdade.

A demonstração deste teorema usa fortemente os lemas a seguir, que são uma adaptação dos Lemas 4.1 e 4.2, de Chern.

Lema 4.3. *Seja $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa definida em um conjunto aberto U que contém a origem $z = 0$. Admita que*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \leq h(z) |f(z)|,$$

onde h é uma função real, contínua e não negativa. Admita ainda que $z = z_0$ é um zero de f e o fato de que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z^{k-1}} = 0, \quad k \geq 1.$$

Então,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z^k}$$

existe.

Lema 4.4. *Além das hipóteses do Lema 4.3, admita que*

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z^k} = 0, \quad \forall k \geq 1.$$

Então, $f \equiv 0$ em uma vizinhança de $z = 0$.

A demonstração dos Lemas 4.3 e 4.4 é semelhante a dos Lemas 4.1 e 4.2, substituindo a hipótese de ϕ ser solução da equação diferencial dada pela equação 4.4 pelas propriedades atribuídas a f no Lema 4.3. Na verdade, os autores do artigo em questão, perceberam que apenas a desigualdade

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \leq h(z) |f(z)|$$

era necessária para provar os Lemas de Chern.

A partir destes dois lemas obtemos o lema seguinte, que é peça fundamental na prova do Teorema 4.2.

Lema 4.5. *Seja $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa definida em um conjunto aberto U que contém a origem $z = 0$. Admita que*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \leq h(z) |f(z)|,$$

onde h é uma função real, contínua e não negativa. Admita também que $z = z_0$ é um zero de f . Então, $f \equiv 0$ em uma vizinhança $V \subset U$ de z_0 , ou

$$f(z) = (z - z_0)^k f_k(z), \quad k \geq 1,$$

onde $f_k(z)$ é uma função contínua com $f_k(z_0) \neq 0$.

O Lema 4.5 segue dos Lemas 4.3 e 4.4.

De posse do Lema 4.5, podemos nos concentrar na demonstração do Teorema 4.2.

Consideremos parâmetros isotérmicos u e v em um aberto $U \subset M$ e façamos $z = u + iv$, $dz = du + idv$, $d\bar{z} = du - idv$. Vamos considerar $Q^{(2,0)} = \frac{1}{2}\psi(z)dzdz$ e admitir que exista um ponto $z_0 \in U$ tal que $\psi(z_0) = 0$. Façamos

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right), \quad \bar{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

Como u e v são isotérmicos, $\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle = \lambda^2$. Notemos, ainda, que $Q(Z, Z) = \psi(z)$.

Após longos cálculos (Ver [2]), obtemos

$$\bar{Z}Q(Z, Z) = 2\lambda^2 Z(H)H + 2\alpha(Z, Z)(\bar{Z}H).$$

Como

$$|Z(H)| = |dH(Z)| \leq |dH||Z| = |dH|\lambda$$

e, analogamente,

$$|\bar{Z}(H)| = |dH(\bar{Z})| \leq |dH||\bar{Z}| = |dH|\lambda,$$

temos

$$|\bar{Z}Q(Z, Z)| \leq \{2\lambda^3|H| + 2\lambda|\alpha(Z, Z)|\}|dH|.$$

Por hipótese do Teorema 4.2, $|dH| \leq g|Q^{(2,0)}|$. Logo,

$$|\bar{Z}Q(Z, Z)| \leq h(z)|Q(Z, Z)|,$$

onde h é contínua e não negativa.

Aplicando o Lema 4.5, concluímos que $Q(Z, Z) \equiv 0$ em uma vizinhança V de z_0 ou este zero é isolado e o índice do campo de direções determinado por

$Im\{Q(Z, Z)dz^2\} = 0$ é negativo. Se $Q(Z, Z)$ não é identicamente nula, todos os seus zeros são isolados e possuem índice negativo. Como M tem gênero zero, a soma dos índices das singularidades de qualquer campo de direções é 2. Esta contradição mostra que $Q(Z, Z) \equiv 0$ e, como Abresch e Rosenberg demonstraram em seu artigo, M é uma superfície mergulhada invariante por rotações em $M^2(c) \times \mathbb{R}$.

Bibliografia

- [1] Abresch, V., Rosenberg, R. *A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $S^2 \times \mathbb{R}$ and $H^2 \times \mathbb{R}$* . Acta Math. 193, N^o 2, 2004.
- [2] Alencar, H., do Carmo, M., Tribuzy, R. *A theorem of H. Hopf and the Cauchy-Riemann inequality*. preprint.
- [3] Bernstein. S. *Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre*. Math. Ann. 59, 20-76, 1904.
- [4] Chern, S.S. *Some new characterizations of the Euclidean sphere*. Duke Math. J., vol 12, p. 279-290, 1945.
- [5] Chern, S.S. *On special W-Surfaces*. Proceedings of the American Mathematical Society, vol 6, N^o 5, p. 783-786, 1955.
- [6] do Carmo, M. *Differential Geometry of curves and Surfaces*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1976.
- [7] Hartman, P., Wintner, A. *Umbilical points and W-surfaces*. American J. Math. 76, p. 502-508, 1954.
- [8] Hopf, H., *Über Flächen mit einer Relation zwischen den Hauptkrümmungen*. Mathematische Nachrichten 4, p. 232-249, 1951.
- [9] Hopf, H. *Differential Geometry for the Large*. Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, v.1000, pp. 136-146, 1983.