

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
Instituto de Matemática Pura e Aplicada

**Hipersuperfícies com Curvatura Média
Constante, Índice Finito e Volume com
Crescimento Polinomial**

Dayse Haime Pastore

Rio de Janeiro
Janeiro 2001

Dedico este trabalho aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por sua luz durante todos esses anos, aos meus pais e meu irmão por seu carinho e apoio, ao meu orientador Manfredo P. do Carmo por sua confiança, compreensão e amizade.

Aos meus amigos que me apoiaram, me ouviram, me compreenderam durante todo esse tempo, em especial agradeço a Patricia Helena Nogueira que me ajudou enumeras vezes com as minhas vírgulas. E é claro não poderia deixar de agradecer a Ronaldo Freire por sua ajuda.

A Jorge Vitório Pereira não sei como agradecer, pelo seu carinho, pelo seu amor e também por seus puxões de orelha.

Aos meus professores durante o mestrado e aqueles da graduação, como Flôrencio Guimarães, Luzia Casatti, Walmecir Bayer, e outros que me ensinaram a gostar de aprender matemática.

Ao IMPA e seus funcionários de um modo geral, pelas condições tão favoráveis.

A Capes por seu apoio financeiro deste a minha graduação.

Por fim agradeço a todos que de uma forma ou de outra me ajudaram na realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, seguindo um artigo do Hilário Alencar e Manfredo P. do Carmo, estudaremos uma estimativa para a curvatura média de hipersuperfícies completas, não compactas, de volume com crescimento polinomial, índice finito, em função da sua curvatura de Ricci.

Antes daremos uma pequena noção de variedade Riemanniana e de outros conceitos de Geometria Riemanniana.

Palavras-chave: hipersuperfícies, volume e índice.

Sumário

1	Preliminares	9
1.1	Noções básicas	9
1.2	Caso particular do ambiente \mathbb{R}^{n+1}	22
2	Resultado Principal	25
2.1	Volume e Índice	28
2.2	Teorema Principal	37

Introdução

Superfícies de curvatura média constante são objetos de grande importância na Matemática. A sua importância provém do fato que ela aparece naturalmente em vários contextos. Historicamente a curvatura média apareceu nos trabalhos de físicos-matemáticos que queriam achar explicações para problemas de capilaridade; por exemplo: tem curvatura média constante a superfície de um líquido que é ponto crítico da área e faz ângulo constante com as paredes do reservatório esférico que o contém.

Verificou-se posteriormente que a curvatura média constante estava relacionada com o problema isoperimétrico. Dado um domínio limitado D em \mathbb{R}^n , com fronteira ∂D diferenciável, este domínio é uma solução do problema isoperimétrico, isto é, ele tem a menor área possível, envolvendo um volume fixo, se e somente se, a curvatura média de ∂D for constante.

Os exemplos mais simples de superfícies em \mathbb{R}^3 de curvatura média constante são o plano, o cilindro e a esfera. Esses exemplos fazem parte de uma família de superfícies de curvatura média constante invariantes por rotações que inclui o onduloide, o catenoide e o nodoide (ver figura 1). O perfil de uma tal superfície é gerado por um foco de uma seção cônica (elipses para o caso do onduloide, parábolas para o catenoide e hipérbolas para o nodoide) que rolam sem escorregarem ao longo do eixo de rotação. Essa construção foi descoberta por Delaunay em 1841 [De], e estas superfícies de rotação são simplesmente chamadas de Superfícies de Delaunay.

Vale observar citar que o cilindro é a única superfície regrada com curvatura média constante $H \neq 0$ (ver Darboux [Da]).

A próxima série de exemplos são as superfícies helicoidais, tais superfícies são invariantes por movimentos helicoidais, com $H = const.$. Elas foram explicitamente descritas por do Carmo e Dajczer [DdC].

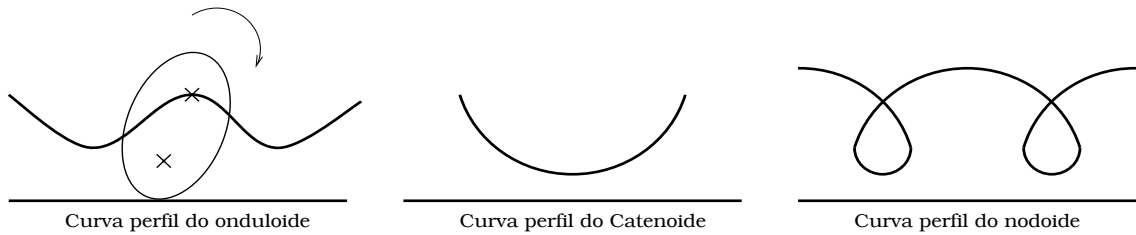


Figura 1: Algumas curvas perfil de Superfícies de Delaunay

Note que nos exemplos citados acima a única superfície compacta com curvatura média constante é a esfera. Isso levou Heinz Hopf, a fazer a seguinte pergunta:

“Toda superfície compacta M com $H = \text{constante}$ é uma esfera?”

A primeira resposta parcial a essa pergunta, dada pelo próprio Hopf em 1951, foi a seguinte:

“Sim, se M for homeomorfa à esfera.”

Uma segunda resposta parcial foi dada por Alexandroff em 1956:

“Sim, se M é mergulhada.”

Em 1984, João Lucas Barbosa e Manfredo do Carmo responderam pela terceira vez essa pergunta:

“Sim, se M é estável.”

A pergunta foi finalmente respondida em toda a generalidade por Wente [W] que apresentou toros (não mergulhados) que possuem curvatura média constante.

A noção de estabilidade se relaciona com a noção de índice de uma certa forma quadrática, como veremos no Capítulo 2 (em verdade a estabilidade significa dizer que o índice é zero, pois o índice é o número de direções linearmente independentes segundo as quais a área diminui), com isso estudaremos superfícies com índice finito.

Neste trabalho, seguindo um artigo do Hilário Alencar e Manfredo do Carmo, estudaremos uma estimativa para a curvatura média de hipersuperfícies completas, não-compactas, em função da sua curvatura de Ricci, admitidas certas condições sobre o seu volume e seu índice.

Uma consequência interessante do resultado obtido é a seguinte:

“Se índice de M é finito, M tem volume de crescimento polinomial, curvatura de Ricci do espaço ambiente é maior ou igual a zero e M tem curvatura média constante, então M é mínima.”

Em particular, se obtém um resultado de Chern:

“Gráficos completos de um espaço euclidiano com curvatura média constante são mínimos”. O que será visto com detalhes no Capítulo 2.

As superfícies de curvatura média constante são objetos interessantes a serem estudados, por sua raridade e complexidade e contemplados, pelas suas belas formas.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Noções básicas

Veremos neste capítulo noções básicas de Geometria Riemanniana. Toda a Geometria Riemanniana é construída em cima do conceito de variedade diferenciável. Intuitivamente, uma variedade diferenciável é um espaço topológico onde cada ponto possui uma vizinhança “equivalente” a um aberto de \mathbb{R}^n .

Definição 1.1.1 Uma *variedade diferenciável de dimensão n* é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de conjuntos abertos U_α de \mathbb{R}^n em M tais que

1. $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$;
2. Para qualquer par α e β , com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, o conjunto $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$ são diferenciáveis;
3. A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é máxima em relação as condições (1) e (2).

O par (U_α, x_α) (ou a aplicação x_α) com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ é chamada uma *parametrização* (ou *sistema de coordenadas*) de M em p ; $x_\alpha(U_\alpha)$ é dita uma *vizinhança coordenada em p* .

Para evitar complicações com notação, sempre que falarmos diferenciável queremos dizer infinitamente diferenciável.

Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é *diferenciável* em $p \in M_1$, se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$ de uma vizinhança de $\varphi(p)$, existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$ de uma vizinhança de p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$. A aplicação φ é diferenciável em um conjunto aberto de M_1 , se for diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Dado uma variedade diferenciável M e $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ uma família máxima em relação a definição 1.1.1. Dizemos que M é uma variedade suave se toda x_α for C^∞ .

Seja M uma variedade diferenciável. Uma função diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é dita uma *curva diferenciável em M* . Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja $\mathcal{D}(p)$ o conjunto das funções em M que são diferenciáveis em p . O *vetor tangente à curva α em $t = 0$* é a função

$$\alpha'(0)(f) = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}(p).$$

Ou seja, associamos à curva α , a aplicação

$$\alpha'(0) : \mathcal{D}(p) \rightarrow \mathbb{R}.$$

E é esta última que entendemos como um *vetor tangente a $p = \alpha(0)$* .

O conjunto de todos os vetores tangentes a M em p forma um espaço vetorial indicado por $T_p M$, *o espaço tangente de M em p* .

Definição 1.1.2 Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \rightarrow N$ é dita uma *imersão* se $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$ é injetiva para todo $p \in M$.

Observação 1.1.1 No caso particular em que a codimensão da imersão for 1, ou seja, $\varphi : M^n \rightarrow N^{n+1}$, $\varphi(M) \subset N$ é chamada uma *hipersuperfície*.

Definição 1.1.3 Seja M uma variedade diferenciável. Dizemos que M é *orientável* se ela admite uma família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ satisfazendo (1) e (2) da definição 1.1.1 tal que, para todo par α e β , com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$ tem determinante positivo.

Seja M^n uma variedade diferenciável e considere o conjunto

$$TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_p M\}.$$

Temos que TM possui uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão $2n$ (Ver [dC1]). A variedade diferenciável TM é chamada o *fibrado tangente* de M .

Definição 1.1.4 Um *campo vetorial* X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um vetor $X(p) \in T_p M$. Em termos de aplicação, X é uma aplicação de M em seu fibrado tangente TM . Dizemos que o campo vetorial é diferenciável se a aplicação $X : M \rightarrow TM$ for diferenciável.

Proposição 1.1.1 *Sejam X e Y campos vetoriais diferenciáveis em uma variedade diferenciável M . Então existe um único campo vetorial Z tal que, para toda $f \in \mathcal{D}$, $Zf = (XY - YX)f$. Aqui, \mathcal{D} denota o conjunto das funções diferenciáveis em M .*

Prova: Para provarmos a existência de Z , defina Z_α em cada vizinhança coordenada $x_\alpha(U_\alpha)$ de uma família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ satisfazendo (1) e (2) da definição 1.1.1 em M pela expressão prevista, se provarmos a unicidade teremos que $Z_\alpha = Z_\beta$ em $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, o que define Z em toda variedade M . Para a unicidade, seja $p \in M$ e $x : U \rightarrow M$ uma parametrização em p , e tome

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

as expressões de X e Y nessas parametrizações. Então para todo $f \in \mathcal{D}$,

$$X(Y(f)) = X\left(\sum_j b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$Y(X(f)) = Y\left(\sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i,j} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Portanto na parametrização x , Z é dado por

$$Z(f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) = \sum_{i,j} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j},$$

o que prova a Proposição. ■

Definição 1.1.5 O campo vetorial Z dado pela proposição acima é chamado o *colchete* de X e Y e é denotado por $[X, Y] = XY - YX$.

Definição 1.1.6 Uma *métrica Riemanniana* em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (que é, uma forma bilinear, simétrica e definida positiva) no espaço tangente $T_p M$. Pedimos que a métrica varie diferenciavelmente; mais precisamente: se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em p , com $x(x_1, \dots, x_n) = q \in X(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U .

Definição 1.1.7 Uma *variedade Riemanniana* é uma variedade diferenciável com uma métrica Riemanniana dada.

A prova da próxima proposição pode ser encontrada na página 43 de [dC1].

Proposição 1.1.2 *Uma variedade diferenciável M (Hausdorff com base enumerável) possui uma métrica Riemanniana.*

Definição 1.1.8 Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ (f é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável) é chamada uma *isometria* se

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)},$$

para todo $p \in M$ e $u, v \in T_p M$.

Observação 1.1.2 Denotaremos por $\chi(M)$ o conjunto de todos os campos vetoriais de classe C^∞ em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções que assumem valores reais de classe C^∞ definidas em M .

Um outro conceito muito importante em Geometria Riemanniana é o de conexão afim. Essencialmente, uma conexão nos diz como derivar campos de vetores. Após definirmos uma conexão afim, particularizaremos o conceito para termos a noção de conexão Riemanniana. Com ela estaremos aptos a trabalhar formalmente com conceitos como curvatura, transporte paralelo, etc.

Definição 1.1.9 Uma *conexão afim* ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação :

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

que é denotada por $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$.

Aqui $X, Y, Z \in \chi(M)$ e $f, g \in D(M)$.

Como havíamos dito, a conexão é uma forma de derivar campos, como nos mostra a proposição abaixo. De fato, através dela temos garantida a existência e unicidade da derivada covariante de um campo ao longo da curva. Para uma demonstração, veja página 50 de [dC1].

Proposição 1.1.3 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Então existe um único campo vetorial V ao longo de uma curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ associado a um campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , chamado derivada covariante de V ao longo de c , tal que*

1. $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$;
2. $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}(V) + f\frac{DV}{dt}$, onde W é um campo vetorial ao longo de c e f é uma função diferenciável em I ;
3. Se V é induzido pelo campo vetorial $Y \in \chi(M)$, i.e., $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$.

Definição 1.1.10 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é dito *paralelo* quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.*

Com a proposição a seguir, cuja prova pode ser encontrada na página 52 de [dC1], verificamos a existência e unicidade do transporte paralelo de vetores ao longo de uma curva.

Proposição 1.1.4 *Sejam M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ , $c : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável em M e V_0 um campo vetorial tangente a M em $c(t_0)$, $t_0 \in I$ (i.e., $V_0 \in T_{c(t_0)}M$). Então existe um único campo vetorial paralelo V ao longo de c , tal que $V(t_0) = V_0$ ($V(t)$ é chamado o transporte paralelo de $V(t_0)$ ao longo de c).*

Definição 1.1.11 *Sejam M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Uma conexão é dita *compatível* com a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, quando para qualquer curva suave c e qualquer par de campos paralelos P e P' ao longo de c , temos $\langle P, P' \rangle = \text{const}$.*

Definição 1.1.12 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade suave M é *simétrica* quando:*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \text{ para todo } X, Y \in \chi(M).$$

O próximo resultado é devido ao geômetra italiano Levi-Civita. Para uma prova deste resultado ver [dC1].

Teorema 1.1.1 *[Levi-Civita] Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições*

1. ∇ é simétrica;
2. ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

A conexão dada pelo teorema acima é denominada *conexão de Levi-Civita (ou Riemanniana) de M* . A partir de agora sempre que nos referirmos a uma conexão em uma variedade Riemanniana, estaremos nos referindo a esta conexão.

A seguir, veremos as definições de gradiente e divergente em termos intrínsecos. Estas generalizam as definições clássicas que são feitas em termos de coordenadas no espaço Euclidiano com a métrica canônica.

Definição 1.1.13 Seja $X \in \chi(M)$ e $f \in \mathcal{D}(M)$. O *divergente de X* é a função $\operatorname{div} X : M \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para cada $p \in M$, temos $\operatorname{div} X(p) = \text{traço da aplicação linear } Y(p) \rightarrow \nabla_Y X(p)$, para todo $Y \in \chi(M)$.

Definição 1.1.14 O *gradiente de f* é o campo vetorial $\operatorname{grad} f$ em M definido por:

$$\langle \operatorname{grad} f(p), v \rangle = df_p(v); \quad p \in M, \quad v \in T_p M.$$

Definição 1.1.15 O *laplaciano de M* é um operador $\Delta : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ definido por:

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f, \quad f \in \mathcal{D}(M).$$

Considere um ponto $p \in M$, onde M é uma variedade Riemanniana de dimensão n . Existe uma vizinhança aberta $U \subset M$ de p e n campos de vetores $E_1, E_2, \dots, E_n \in \chi(U)$, que são ortonormais em cada ponto de U . Além disto estes campos são tais que, em p , $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$, para quaisquer i, j .

A uma tal família E_i , $i = 1, \dots, n$, de campos de vetores, damos o nome de *referencial (local) geodésico em p* .

Dado qualquer referencial geodésico, E_i , $i = 1, \dots, n$ em uma vizinhança de $p \in M$, valem as seguintes identidades:

1. $\operatorname{grad} f(p) = \sum_{i=1}^n (E_i(f)) E_i$;
2. $\operatorname{div} X(p) = \sum_{i=1}^n (E_i(f_i))(p)$, onde $X = \sum_{i=1}^n f_i E_i$;
3. $\Delta f(p) = \sum_{i=1}^n E_i(E_i(f))(p)$.

Observamos que a partir destas igualdades pode-se ver claramente que as definições feitas anteriormente realmente generalizam as definições clássicas.

Proposição 1.1.5 *Sejam $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ funções suaves. Então*

$$\Delta fg = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle.$$

Prova: Seja E_1, \dots, E_n um referencial geodésico. Das fórmulas apresentadas anteriormente, temos que

$$\begin{aligned} \Delta f g &= \sum_{i=1}^n E_i(E_i(f.g)) = \sum_{i=1}^n (E_i(gE_i(f)) + E_i(fE_i(g))) \\ &= \sum_{i=1}^n (E_i(f)E_i(g) + gE_i(E_i(f)) + E_i(f)E_i(g) + fE_i(E_i(g))) \\ &= \sum_{i=1}^n (gE_i(E_i(f)) + fE_i(E_i(g)) + 2E_i(f)E_i(g)). \end{aligned}$$

Como $\langle E_i, E_i \rangle = 1$, temos que

$$\Delta(f.g) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle .$$

■

Corolário 1.1.1 *Sejam $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ funções suaves não nulas. Então*

$$\Delta\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{\Delta f}{f^2} + 2\frac{\|\text{grad } f\|^2}{f^3};$$

$$\Delta\left(\frac{g}{f}\right) = \left(\frac{\Delta g}{g} - \frac{\Delta f}{f}\right)\frac{g}{f} - \left(\frac{2}{f}\right)\langle \text{grad } f, \text{grad } \left(\frac{g}{f}\right) \rangle .$$

Prova: Como $f\frac{1}{f} = 1$, temos que $0 = \frac{1}{f}\Delta f + f\Delta\left(\frac{1}{f}\right) + 2\langle \text{grad } f, \text{grad } \left(\frac{1}{f}\right) \rangle$. Usando que $\text{grad } \left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{\text{grad } f}{f^2}$, obtemos a primeira fórmula. Para provar a segunda observe que

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{g}{f}\right) &= \Delta\left(g \cdot \frac{1}{f}\right) = \frac{1}{f}\Delta g + g\Delta\left(\frac{1}{f}\right) - \frac{2}{f^2}\langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle \\ &= \frac{1}{f}\Delta g + g\left(-\frac{\Delta f}{f^2} + 2\frac{\|\text{grad } f\|^2}{f^3}\right) - \frac{2}{f^2}\langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle \\ &= \left(\frac{\Delta g}{g} - \frac{\Delta f}{f}\right)\frac{g}{f} + \frac{2}{f}\langle \text{grad } f, \frac{g\text{grad } f}{f^2} \rangle - \frac{2}{f}\langle \text{grad } f, \frac{\text{grad } g}{f} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\Delta g}{g} - \frac{\Delta f}{f}\right)\frac{g}{f} + \frac{2}{f}\langle \text{grad } f, \frac{g \cdot \text{grad } f}{f^2} - \frac{f \cdot \text{grad } g}{f^2} \rangle \\
&= \left(\frac{\Delta g}{g} - \frac{\Delta f}{f}\right)\frac{g}{f} - \left(\frac{2}{f}\right)\langle \text{grad } f, \text{grad } \left(\frac{g}{f}\right) \rangle.
\end{aligned}$$

■

Definiremos agora a curvatura de uma variedade Riemanniana. Intuitivamente, a curvatura representa o quanto uma variedade deixa de ser Euclidiana.

Definição 1.1.16 A *curvatura* R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \chi(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \chi(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Definição 1.1.17 Seja $x = z_n$ um vetor unitário em $T_p M$, e tome uma base ortonormal $\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$ do hiperplano em $T_p M$ ortogonal a x , a *curvatura de Ricci* na direção x é definida por

$$\text{Ric}_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle,$$

e a *curvatura escalar* em p é definida por

$$K(p) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j=1}^n \langle R(z_i, z_j)z_i, z_j \rangle.$$

Vamos provar que as expressões acima não dependem da escolha das correspondentes bases ortonormais. Para isso daremos uma caracterização intrínseca das expressões acima. Sejam $x, y \in T_p M$, defina a forma bilinear

$$Q(x, y) = \text{traço da aplicação } z \rightarrow R(x, z)y.$$

Escolhendo uma base ortonormal $\{z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = x\}$ de $T_p M$, temos

$$Q(x, y) = \sum_i \langle R(x, z_i)y, z_i \rangle = \sum_i \langle R(y, z_i)x, z_i \rangle = Q(y, x).$$

Isto prova, que Q é simétrica e satisfaz $Q(x, x) = (n - 1)\text{Ric}_p(x)$, demonstrando assim que Ric_p está intrinsicamente definida.

Por outro lado, à forma bilinear Q em $T_p M$ corresponde a uma aplicação linear auto-adjunta K , dada por

$$\langle K(x), y \rangle = Q(x, y).$$

Tomando uma base ortonormal $\{z_1, \dots, z_n\}$, temos

$$\text{traço de } K = \sum_j \langle K(z_j), z_j \rangle = \sum_j Q(z_j, z_j) = (n - 1) \sum_j \text{Ric}_p(z_j) = n(n - 1)K(p),$$

o que demonstra a afirmação .

Seja $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m=k}$ uma imersão de variedade diferenciável M em uma variedade Riemanniana \overline{M} . Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p \overline{M}$ decompõe $T_p \overline{M}$ na soma direta

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp,$$

onde $(T_p M)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p \overline{M}$.

A conexão Riemanniana de \overline{M} será indicada por $\overline{\nabla}$.

Se X e Y são campos vetoriais locais em M , e $\overline{X}, \overline{Y}$ são extensões locais para \overline{M} , defina

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T,$$

onde $(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T$ é a componente tangencial de $\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}$.

Observação 1.1.3 Observe que essa é a conexão Riemanniana relativa à métrica induzida em M .

Proposição 1.1.6 Se $X, Y \in \chi(M)$, a aplicação $B : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)^\perp$ dada por

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Prova: Da propriedade de linearidade de uma conexão temos que B é aditiva em X e Y e

$$B(fX, Y) = fB(X, Y), \quad f \in D(U).$$

Agora, mostraremos que

$$B(X, fY) = fB(X, Y), \quad f \in D(U).$$

Denotando a extensão de f em \bar{U} por \bar{f} , temos que

$$B(X, fY) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{f} \bar{Y} - \nabla_X fY = \bar{f} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} + \bar{X}(\bar{f}) \bar{Y} - f \nabla_X Y - X(f)Y.$$

Como $f = \bar{f}$, $\bar{X}(\bar{f}) = X(f)$ e $Y = \bar{Y}$ em M , concluímos que

$$B(X, fY) = fB(X, Y)$$

como queríamos.

Para mostrar que B é simétrica, usamos a simetria da conexão Riemanniana, para obter

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y = \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X} + [\bar{X}, \bar{Y}] - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Como $[\bar{X}, \bar{Y}] = [X, Y]$ em M , segue-se o resultado. ■

Como B é bilinear, podemos escrever B em um sistema de coordenadas o que mostra que o valor de $B(X, Y)(p)$ só dependa dos valores de $X(p)$ e $Y(p)$.

Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$. A aplicação $H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, \quad x, y \in T_p M,$$

pela Proposição 1.1.6, é uma forma bilinear simétrica.

Definição 1.1.18 A forma quadrática Π_η definida em $T_p M$ por

$$\Pi_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

é chamada a *segunda forma fundamental de f em p* ao longo do vetor normal η .

Observação 1.1.4 Como H_η é uma forma bilinear simétrica, podemos sempre associar a ela um operador auto-adjunto $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ dado por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle.$$

A proposição seguinte expressa o operador linear associado à segunda forma em termos da derivada covariante.

Proposição 1.1.7 *Seja $p \in M$, $x \in T_p M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a M . Então*

$$S_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_x N)^\perp.$$

Prova: Sejam $x, y \in T_p M$ e X, Y extensões locais de x, y , respectivamente, tangentes a M . Então $\langle N, Y \rangle = 0$, e portanto

$$\begin{aligned} \langle S_\eta(x), y \rangle &= \langle B(X, Y)(p), N \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N \rangle(p) = \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle(p) \\ &= -\langle Y, \bar{\nabla}_X N \rangle(p) = \langle -\bar{\nabla}_x N, y \rangle, \quad \text{para todo } y \in T_p M. \end{aligned}$$

■

Seja $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1=k}$ uma imersão. Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$, $\|\eta\| = 1$. Como $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ é linear simétrica, existe uma base ortonormal de auto-vetores $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p M$ com auto-valores reais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, i.e., $S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$, $1 \leq i \leq n$. Se M e \bar{M} são orientáveis, então o vetor η é unicamente determinado, se pedimos que $\{e_1, \dots, e_n\}$ seja uma base na orientação de M e $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$ uma base na orientação de \bar{M} . Neste caso, dizemos que os e_i 's são as *direções principais* e que $\lambda_i = k_i$ são as *curvaturas principais* de f .

Definição 1.1.19 Chamamos de *curvatura média* de f a função

$$H = \frac{\text{traço } S_\eta}{n} = \frac{1}{n}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n).$$

Definição 1.1.20 Uma hipersuperfície é dita *mínima* se sua curvatura média for constante e igual a zero, i.e., $H = 0$.

Exemplo 1.1.1 Tome $\bar{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ e $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Sabemos que $M = S^n$ a esfera de raio 1 em \mathbb{R}^{n+1} de dimensão n . A curvatura média de S^n é constante igual a 1. De fato, tome $N(x) = -x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|x\| = 1$ e $c(t)$ uma curva em S^n tal que $c(0) = p$ e $C'(0) = p$, então

$$-x = \frac{dN \circ c}{dt}(t) = \bar{\nabla}_x N = (\bar{\nabla}_x N)^T = -S_N(x),$$

para todo $p \in S^n$ e para todo $x \in T_p M$. Daí, resulta que todos os valores próprios de S^n são iguais a 1, ou seja, $k_i = 1$, onde $1 \leq i \leq n$, as curvaturas principais de S^n são todas iguais a 1, o que nos dá, $H = 1$.

Proposição 1.1.8 *No caso em que $f(M^n)$ é uma hipersuperfície, temos $\|B\|^2 \geq nH^2$. Vale a igualdade em um ponto $p \in M$ se, e somente se, p é umbílico, ou seja, as curvaturas principais de M em p são todas iguais.*

Prova: Sejam k_1, \dots, k_n as curvaturas principais de f em $p \in M$. Então, $\|B\|^2 = \sum_{i=1}^n k_i^2$ e

$$\begin{aligned}
 (*) \quad \|B\|^2 - n^2 H^2 &= \sum_{i=1}^n k_i^2 - \frac{n^2 (\sum_{i=1}^n k_i)^2}{n^2} \\
 &= \sum_{i=1}^n k_i^2 - (\sum_{i=1}^n k_i)^2 = -2 \sum_{i < j} k_i k_j, \quad i, j = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Vamos provar por indução que

$$\sum_{i < j}^n (k_i^2 + k_j^2) = (n - 1) \sum_{i=1}^n k_i^2.$$

De fato, se $n = 2$,

$$\sum_{i < j}^{n=2} (k_i^2 + k_j^2) = k_1^2 + k_2^2.$$

Considere válido para $n = m$ e vamos provar para $m + 1$, isto é,

$$\sum_{i < j}^{m+1} (k_i^2 + k_j^2) = \sum_{i < j}^m (k_i^2 + k_j^2) + \sum_{i=1}^m (k_i^2 + k_{m+1}^2).$$

Pela hipótese de indução, temos

$$\sum_{i < j}^m (k_i^2 + k_j^2) = (m - 1) \sum_{i=1}^m k_i^2 + \sum_{i=1}^m (k_i^2 + k_{m+1}^2)$$

$$\begin{aligned}
&= (m-1) \sum_{i=1}^m k_i^2 + mk_{m+1}^2 + \sum_{i=1}^m k_i^2 \\
&= m \sum_{i=1}^m k_i^2 - \sum_{i=1}^m k_i^2 + mk_{m+1}^2 + \sum_{i=1}^m k_i^2 = m \sum_{i=1}^{m+1} k_i^2.
\end{aligned}$$

Agora,

$$\sum_{i < j}^n (k_i - k_j)^2 = \sum_{i < j}^n (k_i^2 + k_j^2) - 2 \sum_{i < j}^n k_i k_j.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{i < j}^n (k_i - k_j)^2 &= (n-1) \sum_{i=1}^n k_i^2 - 2 \sum_{i < j}^n k_i k_j \\
&= (n-1) \|B\|^2 - 2 \sum_{i < j}^n k_i k_j.
\end{aligned}$$

Por (*) temos

$$n(\|B\|^2 - nH^2) = \sum_{i < j}^n (k_i - k_j)^2 \geq 0,$$

o que prova o resultado. ■

1.2 Caso particular do ambiente \mathbb{R}^{n+1}

Consideremos agora o caso particular em que $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1}$. Mostraremos que algumas das definições acima, quando reduzidas a este caso são bem mais simples e já conhecidas.

Definição 1.2.1 Dizemos que uma variedade diferencial $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma *superfície regular* se

1. $X_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um homeomorfismo sobre sua imagem;
2. A diferencial $dX_\alpha(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma bijeção .

Tome $X, Y \in \chi(\mathbb{R}^{n+1})$ e defina a aplicação $\tilde{\nabla} : \chi(\mathbb{R}^{n+1}) \times \chi(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow \chi(\mathbb{R}^{n+1})$ como

$$\tilde{\nabla}_X Y(p) = \frac{dY}{dt}(p) \cdot X(p),$$

onde $\frac{d}{dt}$ é a derivada usual do \mathbb{R}^{n+1} .

Considere $c : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma curva diferenciável, V e W dois campos vetoriais ao longo de c , $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ e $Z, X, Y \in \chi(\mathbb{R}^{n+1})$. Observe que

$$\frac{d(V+W)}{dt} = \frac{dV}{dt} + \frac{dW}{dt}, \quad (1.1)$$

$$\frac{d(fV)}{dt} = \frac{df}{dt} \cdot V + f \frac{dV}{dt}, \quad (1.2)$$

Pela definição de $\tilde{\nabla}$, temos:

$$\tilde{\nabla}_{c'(t)} Y = \frac{dY}{dt}(p) \cdot c'(t) = \frac{d(Y \circ c)}{dt}(t); \quad (1.3)$$

$$\tilde{\nabla}_{fX+gY} Z = f\tilde{\nabla}_X Z + g\tilde{\nabla}_Y Z; \quad (1.4)$$

$$\tilde{\nabla}_X (Y+Z) = \frac{d(Y+Z)}{dt} \cdot X = \frac{dY}{dt} \cdot X + \frac{dZ}{dt} \cdot X = \tilde{\nabla}_X Y + \tilde{\nabla}_X Z; \quad (1.5)$$

$$\tilde{\nabla}_X (fY) = \frac{dfY}{dt} \cdot X = \left(\frac{df}{dt} \cdot X\right) \cdot Y + f \frac{dY}{dt} \cdot X = X(f) \cdot Y + f \tilde{\nabla}_X Y. \quad (1.6)$$

Usando as equações 1.4, 1.5 e 1.6 temos que $\tilde{\nabla}$ é uma conexão e, pela Proposição 1.1.3, a derivada covariante e a derivada usual do \mathbb{R}^{n+1} coincidem. Além disso,

$$\frac{d\langle V, W \rangle}{dt} = \left\langle \frac{dV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{dW}{dt} \right\rangle.$$

Pela Proposição 1.1.4, temos que essa conexão $\tilde{\nabla}$ é a conexão compatível com a métrica do \mathbb{R}^{n+1} .

Tome $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma superfície regular e $p \in M$. Temos que a conexão compatível com a métrica induzida pela métrica do \mathbb{R}^{n+1} de M , será a projeção da conexão do \mathbb{R}^{n+1} no espaço tangente de M em p , $T_p M$. Da mesma forma a derivada covariante de M será a projeção da derivada usual do \mathbb{R}^{n+1} em $T_p M$.

Seja $X \in \chi(U)$ um campo vetorial diferenciável em U , onde $U \subset M$ aberto e $p \in U$. Tome $v \in T_p M$ e considere a curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow U$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = x$. Seja $X(t)$, $t \in I$, a restrição do campo vetorial X à curva α .

Considere a aplicação $N : M \rightarrow S^n$, onde S^n é a esfera unitária do \mathbb{R}^{n+1} e N é a aplicação normal de Gauss. Sabemos que N é um campo vetorial normal a M . Pela Proposição 1.1.7, temos

$$S_N(x) = -(\tilde{\nabla}_x N)_\perp = -(\tilde{\nabla}_x N) = \left. \frac{dN}{dt} \right|_{t=0},$$

onde $x \in \chi(M)$. Ou seja, temos que a segunda forma fundamental de M coincide com a derivada da aplicação normal de Gauss.

Capítulo 2

Resultado Principal

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos necessários para enunciar o resultado principal. Começaremos com a definição de primeiro auto-valor em um variedade e provaremos alguns resultados que serão úteis na demonstração do teorema principal.

Comece fixando um ponto $p \in M$, onde M é uma variedade Riemanniana e denote por $B(r)$ a bola geodésica em M de centro p e raio r . Seja $r_0 > 0$ uma constante e denote por $A(r_0, r)$ o anel $B(r) - B(r_0)$.

Definição 2.0.2 O primeiro autovalor $\lambda_1(A(r_0, r))$ é definido como o menor $\lambda \in \mathbb{R}$ que satisfaz

$$\Delta g + \lambda g = 0,$$

para alguma função g não identicamente nula em M com $g(\partial A(r_0, r)) = 0$. O primeiro autovalor de $M - B(r_0)$ é definido por

$$\lambda_1(M - B(r_0)) = \inf_{r > r_0} \lambda_1(A(r_0, r)).$$

A demonstração do próximo resultado pode ser encontrada em [B], p. 25 à 34.

Proposição 2.0.1 - Para toda função $u \in H(D)$, onde $H(D)$ é o conjunto das funções C^∞ em D não identicamente nulas, que se anulam no bordo (∂D) de D , temos

$$\lambda_1(D) \leq \frac{\int_{D \cup \partial D} \|\text{grad } u\|^2 dM}{\int_{D \cup \partial D} u^2 dM},$$

e a igualdade só vale se $\Delta u + \lambda u = 0$.

Proposição 2.0.2 - *Sejam D e D' domínios tais que $D' \subset D$. Então, $\lambda_1(D') \geq \lambda_1(D)$, valendo a igualdade somente quando $D = D'$.*

Prova: Seja $u \in H(D')$. Estenda u para $H(D)$ fazendo $u = 0$ em $D - D'$. Assim, temos $H(D') \subset H(D)$ o que nos dá $\lambda_1(D') \geq \lambda_1(D)$. Suponha agora que $\lambda_1(D') = \lambda_1(D)$ e considere $u' \in H(D')$ uma função satisfazendo $\Delta u' + \lambda u' = 0$.

Defina $\tilde{u} \in H(D)$ como $\tilde{u} = u'$ em D' e $\tilde{u} = 0$ em $D - D'$.

Então, temos $\int_{D \cup \partial D} \|\text{grad } \tilde{u}\|^2 dM = \lambda_1 \int_{D \cup \partial D} \tilde{u}^2 dM$ e pela Proposição 2.0.1 temos $\Delta \tilde{u} + \lambda \tilde{u} = 0$ em D . Por um resultado de equações elípticas temos que \tilde{u} é analítica em D , e $D - D'$ não tem ponto interior. ■

O teorema a seguir pode ser encontrado em [dC1], p. 85.

Teorema 2.0.1 [Hopf] *Seja M uma variedade Riemanniana orientável, compacta e conexa. Seja f uma função suave em M com $\Delta f \geq 0$. Então, f é constante.*

Os resultados seguintes são devidos a Cheng e Yau ([CY], Teorema 4 e Corolário1, p. 345).

Teorema 2.0.2 [Cheng-Yau] *Sejam f e g duas funções suaves definidas em uma variedade Riemanniana compacta M (com bordo). Suponha $f > 0$ e $g \geq 0$ em M e $g(\partial M) = 0$. Então, temos que*

$$g \equiv 0 \quad \text{ou} \quad \inf_{x \in M} \left(\frac{\Delta g}{g} - \frac{\Delta f}{f} \right) \leq 0.$$

Prova: Suponha, por absurdo, que

$$g \neq 0 \quad \text{e} \quad \inf_{x \in M} \left(\frac{\Delta g}{g} - \frac{\Delta f}{f} \right) > 0.$$

Defina a função $h = \frac{g}{f} \geq 0$ em M . Sabemos que:

$$\Delta h = \Delta \left(\frac{g}{f} \right) = \left(\frac{\Delta g}{g} - \frac{\Delta f}{f} \right) \frac{g}{f} - \left(\frac{2}{f} \right) \langle \text{grad } f, \text{grad } \left(\frac{g}{f} \right) \rangle$$

$$= \left(\frac{\Delta g}{g} - \frac{\Delta f}{f} \right) h - \left(\frac{2}{f} \right) \langle \text{grad } f, \text{grad } h \rangle.$$

Como $g(\partial M) = 0$ e g não é identicamente nula, temos que $h(\partial M) = 0$ e h não é identicamente nula. Assim existe um ponto $p \in M$ com $h(p) = \sup_{q \in M} h(q) > 0$ (logo, $p \in \text{int}(M)$), mas isso nos diz que p é ponto crítico de h , ou seja, $\text{grad } h = 0$. Portanto

$$\Delta h(p) = \left(\frac{\Delta g}{g}(p) - \frac{\Delta f}{f}(p) \right) h(p) > 0$$

e p é ponto de mínimo de h . Como $h(\partial M) = 0$ e $h \geq 0$ temos que $h \equiv 0$ e, conseqüentemente, $g \equiv 0$. Isto nos dá uma contradição. ■

Um corolário desse resultado nos dará uma cota inferior para o primeiro autovalor, em uma variedade menos uma bola.

Corolário 2.0.1 *Seja u uma função positiva suave definida em M uma variedade completa não-compacta, e seja $r_0 > 0$ uma constante. Então,*

$$\lambda_1(M - B(r_0)) \geq \inf_{M - B(r_0)} \left(-\frac{\Delta u}{u} \right).$$

Prova: Temos por definição que

$$\lambda_1(M - B(r_0)) = \inf_{r > r_0} \lambda_1(A(r_0, r)).$$

Tome uma função $g \geq 0$ em M , não identicamente nula, com $g(\partial M) = 0$ e satisfazendo $\Delta g + \lambda_1(A(r_0, r))g = 0$, o que nos dá

$$\lambda_1(A(r_0, r)) = -\frac{\Delta g}{g}.$$

Pelo Teorema 2.0.2,

$$\inf_{x \in A(r_0, r)} \left(\frac{\Delta g}{g}(x) - \frac{\Delta u}{u}(x) \right) \leq 0.$$

Então,

$$\inf_{x \in A(r_0, r)} \left(-\lambda_1(A(r_0, r)) - \frac{\Delta u}{u}(x) \right) \leq 0.$$

Assim,

$$\lambda_1(A(r_0, r)) \geq \inf_{x \in A(r_0, r)} \left(-\frac{\Delta u}{u}(x) \right).$$

Tomando o ínfimo para $r > r_0$ temos

$$\lambda_1(M - B(r_0)) \geq \inf_{M - B(r_0)} \left(-\frac{\Delta u}{u} \right).$$

■

2.1 Volume e Índice

Apresentamos alguns conceitos relacionados a variações de área que preservam volume.

Seja $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana de dimensão n , completa, de dimensão $n+1$ e com curvatura média constante, H . Seja $D \subset M$ um domínio, com bordo ∂D suave. Considere N o campo vetorial unitário suave ao longo de M . Denotaremos por $A_D(x)$ a *área de D* na métrica induzida, e

$$V_D(x) = \frac{1}{n+1} \int_D \langle x, N \rangle_p dM,$$

o *volume* de D em x , onde dM é a forma elemento de área induzida pela métrica.

Seja $X : (-\epsilon, \epsilon) \times \overline{D} \rightarrow \overline{M}^{n+1}$, com $X_t(p) = X(t, p)$ e $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, e tal que a aplicação $X_t : \overline{D} \rightarrow \overline{M}$ seja uma imersão para cada t , e $X_0 = x$. Chamamos a aplicação X de uma *variação* de D . Considere $A_D(t) = A_D(X_t)$ e $V_D(t) = V_D(X_t)$ como definidos acima para uma imersão. Dizemos que uma *variação preserva volume* se $V_D(t) = V_D(0)$, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ e que *fixa o bordo* se $X_t(p) = X_0(p)$, para todo $p \in \partial D$ e para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Denotaremos por

$$V(p) = \frac{dX_t}{dt}(p)|_{t=0}, \quad p \in \overline{D},$$

o *vetor variacional* de x_t . Uma *variação* é *normal* se para todo $p \in \overline{D}$, $V(p) = f(p)N(p)$, onde $f(p)$ é uma função real.

Dada uma *variação* $X_t : \overline{D} \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ que fixa o bordo, temos (Ver [H])

$$A'_D(0) = - \int_D nH f dM, \quad V'_D(0) = \int_D f dM,$$

onde as derivadas são tomadas em relação a t , H é a curvatura média de X_0 e fN é o vetor variacional de X_t .

Uma fórmula para a segunda variação de área pode ser encontrada em [dC3] e é a seguinte

$$A_D''(0) = - \int (f\Delta f + \|B\|^2 f^2 + n f \overline{Ric}(N)) dM,$$

onde Δ é o laplaciano de M , B é a segunda forma fundamental de x e $\overline{Ric}(N)$ é o valor da curvatura de Ricci de \overline{M}^{n+1} no campo vetorial unitário suave N ao longo de M .

Definição 2.1.1 Dizemos que um domínio D é *estável* se $A_D''(0) > 0$, para toda variação que preserva volume e fixa o bordo de D . A imersão x é *estável* se todo domínio D é estável.

Seja $X_t : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ como definida anteriormente e seja $D \subset M$ um domínio compacto com bordo suave.

Definição 2.1.2 Um *campo de Jacobi* é um campo vetorial normal $J = fN$, onde $f \in D(M)$,

$$f = 0 \quad \text{em } \partial D, \quad \int_D f dM = 0$$

e satisfaz a *equação de Jacobi*

$$\Delta f + \|B\|^2 f + n \overline{Ric}(N) = 0.$$

Definição 2.1.3 Um bordo ∂D de um domínio $D \subset M$ é um *bordo conjugado* se existe um campo de Jacobi em \overline{D} não nulo tal que $J|_{\partial D} = 0$. Se além disso não existir um domínio $D' \subset D$, $D' \neq D$, tal que $\partial D'$ é um bordo conjugado, dizemos que ∂D é o *primeiro bordo conjugado* de D . A *multiplicidade* de um bordo conjugado ∂D é o número de campos de Jacobi linearmente independentes em \overline{D} que se anulam em ∂D .

Seja o operador $L = \Delta + \|B\|^2 + n \overline{Ric}(N)$, como na Definição 2.1.2. A forma quadrática

$$I(f) = - \int_M f L f dM$$

está definida no espaço das funções suaves $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ com suporte compacto. Para cada compacto $K \subset M$ considere a restrição da forma quadrática I ao espaço vetorial das funções suaves com suporte em K . Definimos o índice de L em K , $ind_L K$, como sendo a dimensão máxima do subespaço das funções suaves com suporte em K , onde I é definida negativa.

Definição 2.1.4 O índice de M é definido por

$$ind M = \sup_{K \subset M} ind_L K,$$

onde o supremo é tomado para todos os domínios compactos $K \subset M$.

O teorema a seguir nos dá uma relação fundamental entre índice e campos de Jacobi. Sua demonstração pode ser encontrada em [S].

Teorema 2.1.1 [*Índice de Morse*] - Se M é uma hipersuperfície mínima, então $ind_L K < \infty$ para todo $K \subset M$ compacto. Além disso,

$$ind_L K = \text{número de bordos conjugados contados com suas multiplicidades.}$$

No caso em que a curvatura média de M é constante, porém diferente de zero, o teorema do índice de Morse é análogo e foi demonstrado num trabalho de H. Frid e F. J. Thayer [FT].

Outro resultado útil é a proposição de Fischer-Colbrie. Ela nos mostra que índice finito e estabilidade estão fortemente relacionados. A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [FC].

Proposição 2.1.1 [*Fischer-Colbrie*] Se $ind M < \infty$ e a curvatura média for constante então existe um compacto $K \subset M$ e uma função positiva u em M tal que $M - K$ é estável e $Lu = 0$ em $M - K$.

Para o caso $H = const \neq 0$, ao invés de considerarmos a forma quadrática I definida nas funções suaves, consideraremos a sua restrição I_0 , às funções suaves com suporte em um compacto K e que tenham média zero, isto é, $\int_M f dM = 0$. Definimos então o índice em relação a I_0 de L em K , $ind_{L_0} K$, como a dimensão máxima do

espaço das funções suaves com suporte em K onde I_0 é definida negativa. Da mesma forma que definimos $indM$, defina:

$$ind_0M = \sup_{K \subset M} ind_{L_0}K.$$

Afirmamos que

$$ind_LK - 1 \leq ind_{L_0}K \leq ind_LK.$$

De fato, a segunda desigualdade é óbvia.

Para provarmos a primeira desigualdade, seja V o subespaço de funções suaves, com suporte em K um compacto onde I é definida negativa. Tome ϕ_V uma aplicação linear dada por

$$\phi_V : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{onde} \quad \phi_V(f) = \int_M f dM.$$

Então, $Ker\phi_V$ é um subespaço de funções com suporte compacto e média zero, onde I é definida negativa.

Como $indM < \infty$, temos que $dim V < \infty$. Além disso, como a dimensão de \mathbb{R} é 1, temos que $dim Im\phi_V \leq 1$.

Visto que $dim Ker\phi_V + dim Im\phi_V = dim V$ temos que $dim Ker\phi_V \geq dim V - 1$. Com isso temos a primeira desigualdade.

Uma das hipóteses fundamentais do teorema é a de volume com crescimento polinomial. A idéia dessa definição é que as bolas da variedade cresçam polinomialmente.

Definição 2.1.5 Uma variedade Riemanniana M tem volume com crescimento polinomial se para todo $p \in M$, existem $\alpha, c \in \mathbb{R}^+$ tais que

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{Vol(B_p(r))}{r^\alpha} = c,$$

onde $B_p(r) \subset M$ é uma bola geodésica de centro p e raio r .

Um exemplo de uma superfície que tem volume com crescimento polinomial e índice infinito é o cilindro, $S \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$. Considere a parametrização

$$X(t, \theta) = (\cos\theta, \sin\theta, t).$$

Temos que $X_t = (0, 0, 1)$ e $X_\theta = (-\text{sen}\theta, \text{cos}\theta, 0)$. Tome $J = fN$ onde $f(t) = \text{sent}$ e $N = \frac{X_t \times X_\theta}{|X_t \times X_\theta|}$ é a aplicação Normal de Gauss. Calculando:

$$X_t \times X_\theta = (\text{cos}\theta, \text{sen}\theta, 0) = N$$

Assim, temos que o volume de uma faixa, C , do cilindro é dado por

$$\begin{aligned} \text{Vol}(C) &= \frac{1}{n+1} \int_C \langle X, N \rangle_p dM = \frac{1}{n+1} \int_C \langle (\text{cos}\theta, \text{sen}\theta, t), (\text{cos}\theta, \text{sen}\theta, 0) \rangle_p dM = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_{-h}^h dt d\theta = \frac{4}{3} h\pi. \end{aligned}$$

Daí resulta que o cilindro tem volume de crescimento linear.

Sabemos que as curvaturas principais do cilindro são $k_1 = 1$ e $k_2 = 0$, daí obtemos que $H = \frac{1}{2}$. Além disso, $\overline{\text{Ric}}N = 0$, pois estamos em \mathbb{R}^3 , e $\|B\|^2 = \|DN\| = 1$. Logo, $\nabla f + f = 0$. Tome $D \subset S \times \mathbb{R}$ um domínio limitado pelos círculos $t = 0$, $t = 2\pi$. Pelos cálculos feito acima temos que J é um campo de Jacobi em D . Observe que os círculos $t = 0$ e $t = 2\pi$ são bordos conjugados de D ; pelo teorema do índice de Morse, o índice do cilindro é infinito.

Agora, daremos um exemplo de superfície cujo volume não cresce polinomialmente.

Exemplo 2.1.1 Considere a superfície de rotação de uma curva perfil com parametrização

$$X(t, \theta) = (e^t \text{cos}\theta, e^t \text{sen}\theta, t), \quad t \in \mathbb{R} \quad e \quad \theta \in (0, 2\pi).$$

O volume de X será:

$$\text{Vol}(X) = \int_0^{2\pi} \int_{-r}^r (EG - F^2)^{\frac{1}{2}} dt d\theta,$$

onde $E = \langle X_\theta, X_\theta \rangle$, $G = \langle X_t, X_t \rangle$ e $F = \langle X_t, X_\theta \rangle$. Calculando

$$X_\theta = (-e^t \text{sen}\theta, e^t \text{cos}\theta, 0),$$

$$X_t = (e^t \text{cos}\theta, e^t \text{sen}\theta, 1),$$

e mais, $E = e^{2t}$, $G = e^{2t} + 1$ e $F = 0$, e temos que

$$Vol(X|_{-r}^r) = \int_0^{2\pi} \int_{-r}^r (e^{2t}(e^{2t} + 1))^{\frac{1}{2}} dt d\theta.$$

Tome $e^t = tg\theta$. Então, $e^t dt = \sec^2\theta d\theta$. Logo,

$$\begin{aligned} I &= \int \sec^2\theta (tg^2\theta + 1)^{\frac{1}{2}} d\theta = \int \sec^3\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{sen}\theta}{\cos^2\theta} + \frac{1}{2} \cdot \ln(\sec\theta + tg\theta). \end{aligned}$$

Voltando as variáveis iniciais, temos

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{e^t}{(e^t+1)^{\frac{1}{2}}}}{\frac{1}{((e^t+1)^{\frac{1}{2}})^2}} + \frac{1}{2} \cdot \ln((e^t + 1)^{\frac{1}{2}} + e^t) \\ &= \frac{1}{2} \cdot e^t \cdot (e^t + 1)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \ln((e^t + 1)^{\frac{1}{2}} + e^t). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} Vol(X|_{-r}^r) &= 2\pi \int_{-r}^r (e^{2t}(e^{2t} + 1))^{\frac{1}{2}} dt \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{2} \cdot (e^r \cdot (e^r + 1)^{\frac{1}{2}} - e^{-r} \cdot (e^{-r} + 1)^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{(e^r + 1)^{\frac{1}{2}} + e^r}{(e^{-r} + 1)^{\frac{1}{2}} + e^{-r}} \right) \right) \\ &= \pi \left(e^r \cdot (e^r + 1)^{\frac{1}{2}} - e^{-r} \cdot (e^{-r} + 1)^{\frac{1}{2}} + \ln \left(\frac{(e^r + 1)^{\frac{1}{2}} + e^r}{(e^{-r} + 1)^{\frac{1}{2}} + e^{-r}} \right) \right). \end{aligned}$$

Isso nos dá que o volume dessa superfície cresce exponencialmente.

Provaremos agora um lema que será fundamental para a demonstração do teorema principal.

Lema 2.1.1 *Suponha que uma variedade Riemanniana M tenha volume com crescimento polinomial e seja $r_0 > 0$ uma constante. Então*

$$\lambda_1(M - B(r_0)) = 0.$$

Prova: Seja r a função distância para o ponto $p \in M$. Fixe um número $r_1 > r_0$ e defina a função radial $f : B(r_1) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq r \leq r_0, \\ r - r_0 & \text{se } r_0 \leq r \leq r_0 + \frac{1}{8}r_1, \\ \frac{1}{8}r_1 & \text{se } r_0 + \frac{1}{8}r_1 \leq r \leq \frac{7}{8}r_1, \\ r_1 - r & \text{se } \frac{7}{8}r_1 \leq r \leq r_1. \end{cases}$$

Pela Proposição 2.0.1

$$\lambda_1(A(r_0, r_1)) \leq \frac{\int_{A(r_0, r_1)} \|\text{grad } f\|^2 dM}{\int_{A(r_0, r_1)} f^2 dM}.$$

Agora, como

$$\int_{A(r_0, r_1)} \|\text{grad } f\|^2 dM = \text{Vol}(A(r_0, r_1)) - \text{Vol}\left(A\left(r_0 + \frac{r_1}{8}, \frac{7r_1}{8}\right)\right) \leq \text{Vol}(A(r_0, r_1))$$

e

$$\begin{aligned} & \int_{A(r_0, r_1)} f^2 dM \\ &= \int_{A(r_0, r_0 + \frac{r_1}{8})} (r - r_0)^2 dM + \int_{A(\frac{7r_1}{8}, r_1)} (r_1 - r)^2 dM + \frac{r_1^2}{64} \text{Vol}\left(A\left(r_0 + \frac{r_1}{8}, \frac{7r_1}{8}\right)\right) \\ & \geq \frac{r_1^2}{64} \text{Vol}\left(A\left(r_0 + \frac{r_1}{8}, \frac{7r_1}{8}\right)\right), \end{aligned}$$

temos que

$$\frac{\int_{A(r_0, r_1)} \|\text{grad } f\|^2 dM}{\int_{A(r_0, r_1)} f^2 dM} \leq \frac{\text{Vol}(A(r_0, r_1))}{\frac{r_1^2}{64} \text{Vol}\left(A\left(r_0 + \frac{r_1}{8}, \frac{7r_1}{8}\right)\right)}.$$

Logo,

$$\frac{1}{64}r_1^2\lambda_1(A(r_0, r_1)) \leq \frac{\text{Vol}(A(r_0, r_1))}{\text{Vol}(A(r_0 + \frac{1}{8}r_1, \frac{7}{8}r_1))} = \frac{\text{Vol}(B(r_1)) - \text{Vol}(B(r_0))}{\text{Vol}(B(\frac{7}{8}r_1)) - \text{Vol}(B(r_0 + \frac{1}{8}r_1))}.$$

Pela Proposição 2.0.2, temos que se $r > s$, então $\lambda_1(A(r_0, r)) < \lambda_1(A(r_0, s))$.

Assim, para toda seqüência $\{r_i\}$ onde $r_i < r_{i+1}$ e $r_i \rightarrow \infty$ temos que $\lim_{r_i \rightarrow \infty} \lambda_1(A(r_0, r_i))$ existe. Se provarmos que

$$Q_i := \frac{\text{Vol}(B(r_i)) - \text{Vol}(B(r_0))}{\text{Vol}(B(\frac{7}{8}r_i)) - \text{Vol}(B(r_0 + \frac{1}{8}r_i))} \quad (2.1)$$

é limitado quando $r_i \rightarrow \infty$, teremos

$$\lim_{r_i} \lambda_1(A(r_0, r_i)) \leq \lim_{r_i} \frac{64Q_i}{r_i^2} = 0,$$

para qualquer seqüência de $\{r_i\}$, onde $r_i < r_{i+1}$. Então,

$$\lambda_1(M - B(r_0)) = 0.$$

Provaremos agora que a expressão (2.1) é limitada. Como M tem volume com crescimento polinomial, fixado $p \in \mathbb{M}$, existem $\alpha, c \in \mathbb{R}^+$ tais que

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(B_p(r))}{r^\alpha} = c. \quad (2.2)$$

Assim existe uma seqüência não-decrescente $\{q_i\}$ de raios, com $q_i \rightarrow \infty$, satisfazendo

$$\limsup_{q_i \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(B_p(q_i))}{q_i^\alpha} = c. \quad (2.3)$$

Agora, considere a seqüência $r_i = \frac{8}{7}q_i$ e tome r_0 e r_1 tais que $r_0 < (\frac{3}{4} - \varepsilon)r_1$, para algum $\varepsilon > 0$ fixo. Como $r_i < r_{i+1}$ temos que

$$r_0 + \frac{1}{8}r_i < \left(\frac{3}{4} - \varepsilon\right)r_1 + \frac{1}{8}r_i < \left(\frac{3}{4} - \varepsilon\right)r_i + \frac{1}{8}r_i < \left(\frac{7}{8} - \varepsilon\right)r_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

o que nos dá

$$\text{Vol}\left(B\left(r_0 + \frac{1}{8}r_i\right)\right) < \text{Vol}\left(B\left(\left(\frac{7}{8} - \varepsilon\right)r_i\right)\right).$$

Então

$$Q_i = \frac{Vol(B(r_i)) - Vol(B(r_0))}{Vol(B(\frac{7}{8}r_i)) - Vol(B(r_0 + \frac{1}{8}r_i))} < \frac{Vol(B(r_i))}{Vol(B(\frac{7}{8}r_i)) - Vol(B(r_0 + \frac{1}{8}r_i))}$$

$$< \frac{Vol(B(r_i))}{Vol(B(\frac{7}{8}r_i)) - Vol(B((\frac{7}{8} - \varepsilon)r_i))}.$$

Ou seja, ficamos reduzidos a provar que

$$\frac{Vol(B(r_i))}{Vol(B(\frac{7}{8}r_i)) - Vol(B((\frac{7}{8} - \varepsilon)r_i))}$$

é limitado quando $r_i \rightarrow \infty$. Agora, visto que

$$\limsup_{r_i \rightarrow \infty} \frac{Vol(B_p(r_i))}{r_i^\alpha} \leq c,$$

vemos que, para todo $\delta > 0$, $Vol(B(r_i)) \leq c(1 + \delta)r_i^\alpha$, a menos de um número finito de r_i 's. Seja $d = (1 + \delta)c$. Então, a menos de um número finito de r_i 's,

$$\frac{Vol(B(r_i))}{Vol(B(\frac{7}{8}r_i)) - Vol((\frac{7}{8} - \varepsilon)r_i)} \leq \frac{dr_i^\alpha}{Vol(B(\frac{7}{8}r_i)) - d(\frac{7}{8} - \varepsilon)^\alpha r_i^\alpha}.$$

Então,

$$\lim_{r_i \rightarrow \infty} \frac{Vol(B(r_i))}{Vol(B(\frac{7}{8}r_i)) - Vol((\frac{7}{8} - \varepsilon)r_i)} \leq \lim_{r_i \rightarrow \infty} \frac{dr_i^\alpha}{Vol(B(\frac{7}{8}r_i)) - d(\frac{7}{8} - \varepsilon)^\alpha r_i^\alpha}$$

$$\leq \lim_{r_i \rightarrow \infty} \frac{\frac{dr_i^\alpha}{d(\frac{7}{8})^\alpha r_i^\alpha}}{\frac{Vol(B(\frac{7}{8}r_i))}{d(\frac{7}{8})^\alpha r_i^\alpha} - \frac{d(\frac{7}{8} - \varepsilon)^\alpha r_i^\alpha}{d(\frac{7}{8})^\alpha r_i^\alpha}} = \lim_{r_i \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(\frac{7}{8})^\alpha}}{\frac{Vol(B(\frac{7}{8}r_i))}{d(\frac{7}{8})^\alpha r_i^\alpha} - \frac{(\frac{7}{8} - \varepsilon)^\alpha}{(\frac{7}{8})^\alpha}}.$$

Como $r_i = \frac{8}{7}q_i$ temos

$$\lim_{q_i \rightarrow \infty} \frac{Vol(B(\frac{7}{8}r_i))}{d(\frac{7}{8})^\alpha r_i^\alpha} = \lim_{q_i \rightarrow \infty} \frac{Vol(B(q_i))}{dq_i^\alpha} = \frac{c}{d},$$

onde na última igualdade usamos a expressão (2.3). Então,

$$\begin{aligned}
\lim_{r_i \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha}}{\frac{\text{Vol}\left(B\left(\frac{7}{8}r_i\right)\right)}{d\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha r_i^\alpha} - \frac{\left(\frac{7}{8}-\varepsilon\right)^\alpha}{\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha}} &= \frac{\frac{1}{\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha}}{\frac{c}{d} - \frac{\left(\frac{7}{8}-\varepsilon\right)^\alpha}{\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha}} \\
&= \frac{\frac{1}{\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha}}{\frac{c\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha - d\left(\frac{7}{8}-\varepsilon\right)^\alpha}{\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha d}} = \frac{d}{c\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha - d\left(\frac{7}{8}-\varepsilon\right)^\alpha} \\
&= \frac{(1+\delta)c}{c\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha - (1+\delta)c\left(\frac{7}{8}-\varepsilon\right)^\alpha} = \frac{(1+\delta)}{\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha - (1+\delta)\left(\frac{7}{8}-\varepsilon\right)^\alpha}.
\end{aligned}$$

Como ε é fixo, posso tomar δ tão pequeno que o denominador seja estritamente positivo. Isto mostra que a expressão (2.1) é limitada, demonstrando o lema. ■

2.2 Teorema Principal

Como dito na Introdução, provaremos agora um teorema de Alencar - do Carmo, que nós dá uma cota superior para a curvatura média de uma hipersuperfície, quando esta for constante admitindo certas hipóteses sobre seu volume e índice.

Seja M^n uma variedade Riemanniana de dimensão n , completa, não compacta e \overline{M}^{n+1} uma variedade Riemanniana de dimensão $n+1$, orientável e completa.

Teorema 2.2.1 [Alencar - do Carmo] *Seja M^n e \overline{M}^{n+1} como acima e $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica com curvatura média constante H . Suponha que M tem volume com crescimento polinomial e $\text{ind}M < \infty$. Então, existe uma constante $r_0 > 0$ tais que*

$$H^2 \leq - \inf_{M-B(r_0)} \overline{\text{Ric}}(N),$$

onde $\overline{\text{Ric}}(N)$ é o valor da curvatura de Ricci de \overline{M}^{n+1} no campo vetorial unitário suave N ao longo de M .

Prova: Visto que $\text{ind}M < \infty$ temos, usando o resultado de Fischer-Colbrie que existe um compacto $K \subset M$ e uma função positiva u em M tal que

$$Lu = \Delta u + \|B\|^2 u + n\overline{\text{Ric}}(N)u = 0$$

em $M - K$. Assim,

$$\|B\|^2 + n\overline{\text{Ric}}(N) = -\frac{\Delta u}{u}.$$

Fixe $p \in K$ e $r_0 > 0$ tal que $K \subset B(r_0)$. Pelo Lema 2.1.1, $\lambda_1(M - B(r_0)) = 0$ e pelo Corolário 2.0.1, temos que

$$0 = \lambda_1(M - B(r_0)) \geq \inf_{M-B(r_0)} \left(-\frac{\Delta u}{u} \right) = \inf_{M-B(r_0)} \{ \|B\|^2 + n\overline{\text{Ric}}(N) \}.$$

Então, usando a Proposição 1.1.8, obtemos:

$$0 \geq \inf_{M-B(r_0)} \{ \|B\|^2 + n\overline{\text{Ric}}(N) \} \geq \inf_{M-B(r_0)} \{ nH^2 + n\overline{\text{Ric}}(N) \},$$

e, como H é constante,

$$nH^2 \leq -\inf_{M-B(r_0)} n\overline{\text{Ric}}(N) = -n \inf_{M-B(r_0)} \overline{\text{Ric}}(N),$$

o que nos dá

$$H^2 \leq -\inf_{M-B(r_0)} \overline{\text{Ric}}(N).$$

■

Este teorema tem conseqüências interessantes. O corolário à seguir mostra que se a curvatura de Ricci de \overline{M}^{n+1} não é negativa, qualquer hipersuperfície completa, não-compacta, de curvatura média constante com índice finito e volume com crescimento polinomial, é mínima.

Corolário 2.2.1 *Seja $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ como no Teorema 2.2.2. Se $\overline{\text{Ric}} \geq 0$, então $H \equiv 0$.*

Prova: Se $\beta = \inf_{M-B(r_0)} \overline{\text{Ric}}(N) \geq 0$, pelo Teorema 2.2.2, temos que

$$0 \leq H^2 \leq -\inf_{M-B(r_0)} \overline{\text{Ric}}(N) = -\beta \leq 0.$$

Logo, $H \equiv 0$.

■

Observação 2.2.1 No caso em que $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$, o Corolário anterior generaliza um teorema de Chern [C], que diz: “Gráficos completos M , com curvatura média constante em \mathbb{R}^{n+1} são mínimos.”

Isto segue do fato que gráficos são fortemente estáveis (isto é, $indM = 0$) e o volume de M cresce polinomialmente. Isso mostra que a finitude do índice e o fato do volume de M crescer polinomialmente são suficientes para a conclusão do teorema de Chern.

Afirmção 2.2.1 Gráficos completos M , com curvatura média constante em \mathbb{R}^{n+1} são fortemente estáveis.

Seja M dada pelo gráfico de $y = f(x)$, onde $x \in \mathbb{R}^n$. Se tomarmos uma variação M_t de M (Figura 2.1), onde essa variação é uma translação ao longo do eixo y , teremos que a derivada dessa variação com relação a t será uma função que satisfaz a equação de Jacobi e, portanto, sua projeção normal $fN = J$ será um campo de Jacobi de M não-nulo.

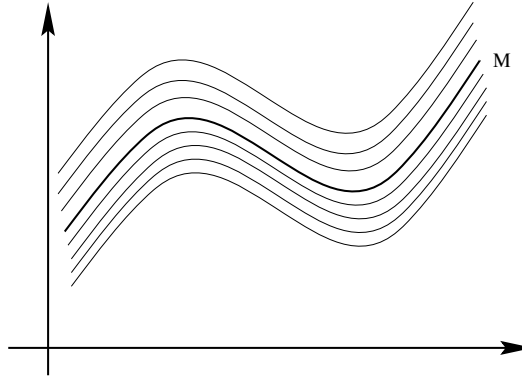


Figura 2.1: Variações do gráfico M

Agora suponha que exista um domínio $D \subset M$ tal que D é não-vazio e não é estável. Então existirá uma função g , tal que $gN = \tilde{J}$ é um campo de Jacobi de M não-nulo, tal que $\tilde{J}|_{\partial D} = 0$. Faça contrações ou dilatações em gN que continuem se anulando no bordo de D até que este tangencie fN pela primeira vez (Figura 2.2). Como contrações, dilatações e diferenças de campo de Jacobi são campos de Jacobi, temos que $\bar{J} = fN - gN$ será um campo de Jacobi de M que se anula num ponto do interior de D . Pelo princípio do máximo de Hopf, $g = f$. Isto é um absurdo, pois $J|_{\partial D} \neq 0$ e $\tilde{J}|_{\partial D} = 0$.

Afirmção 2.2.2 Gráficos completos M em \mathbb{R}^{n+1} , com curvatura média constante, têm volume com crescimento polinomial.

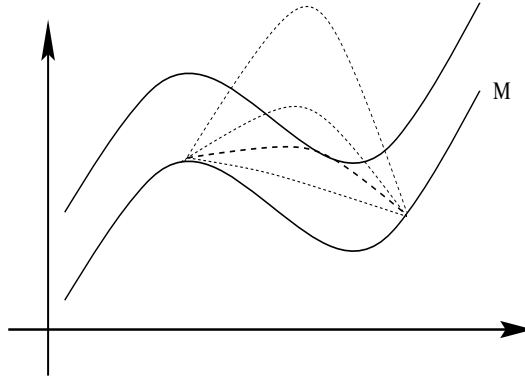


Figura 2.2: Campo de Jacobi de M

Seja u qualquer função suave definida em um conjunto aberto de \mathbb{R}^n . Defina

$$\delta_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n v_j v_j \frac{\partial u}{\partial x_j},$$

neste conjunto aberto, onde

$$(v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2}} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right),$$

é o vetor normal unitário à superfície S dada por $u(x) = 0$.

A prova da proposição seguinte pode ser encontrada em [Bo].

Proposição 2.2.1 - (Bombieri) - *Seja S uma hipersuperfície em \mathbb{R}^n e u uma função suave em \mathbb{R}^n . Então, se $u|_S$ tem suporte compacto*

$$\int_S \delta_i u = (n-1) \int_S u H v_i,$$

onde H é a curvatura média de S .

Agora seja M um gráfico em \mathbb{R}^{n+1} dado por $x_{n+1} = v(x_1, \dots, x_n)$ isto é, M é dada por $u(x_1, \dots, x_n) = x_{n+1} - v(x_1, \dots, x_n) = 0$. O vetor

$$(v_1, \dots, v_{n+1}) = -\frac{1}{\sqrt{1 + |\text{grad } v|^2}} \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}, -1 \right)$$

é normal e unitário à M . Assim a curvatura média H de M é dada por

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{1}{n} \operatorname{div} V,$$

onde $V = (v_1, \dots, v_n)$. Observe que $|V| \leq 1$.

Seja $D(r)$ o disco de raio r em \mathbb{R}^n . Usando o teorema da divergência, temos que

$$\int_{D(r)} H = \frac{1}{n} \int_{D(r)} \operatorname{div} V = \frac{1}{n} \int_{\partial D(r)} \langle V, \eta \rangle \leq \frac{1}{n} \operatorname{Vol}(S^{n-1}(r)) = \frac{1}{n} w_n r^{n-1},$$

onde η é o vetor normal unitário a $\partial D(r)$ apontando para fora e w_n é o volume da esfera unitária do \mathbb{R}^n ($S^{n-1}(1)$), ver figura 2.3.

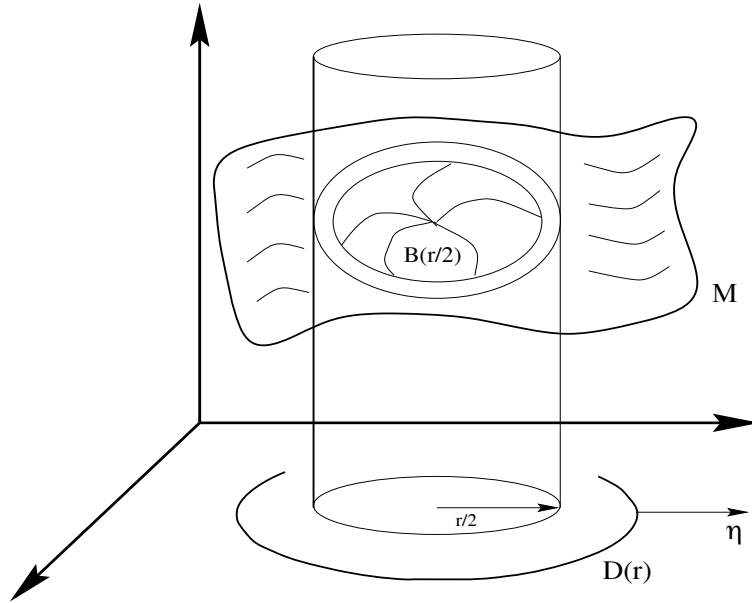
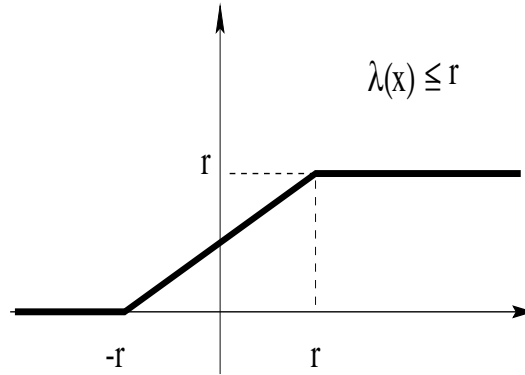


Figura 2.3: Interseção do gráfico M com um cilindro do \mathbb{R}^{n+1}

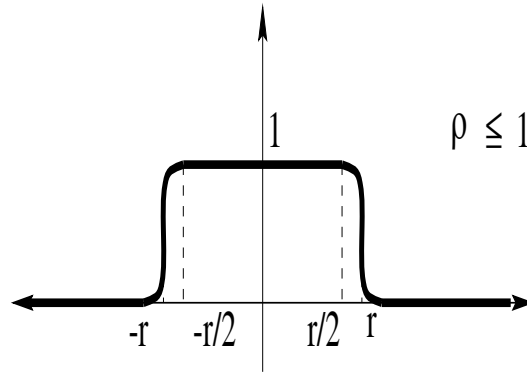
Agora, defina $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, uma função suave tal que

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -r, \\ \lambda'(x) \leq 1 & \text{se } -r \leq x \leq r, \\ r & \text{se } x \geq r. \end{cases}$$



Defina também $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, uma função suave, tal que

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \geq r, \\ 1 & \text{se } |x| \leq \frac{r}{2}, \\ |\text{grad } \rho| \leq \frac{1}{2r}. & \end{cases}$$



Portanto, a função $\rho\lambda : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\rho\lambda(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \rho(x_1, \dots, x_n) \lambda(x_{n+1}),$$

tem suporte compacto. Usando a Proposição 2.2.1, temos

$$\int_M \delta_{n+1}(\rho(x_1, \dots, x_n) \lambda(x_{n+1})) = n \int_M \rho \lambda H v_{n+1}.$$

Temos, ainda,

$$\delta_{n+1}(\rho\lambda) = \frac{\partial(\rho\lambda)}{\partial x_{n+1}} - \sum_{j=1}^{n+1} v_{n+1} v_j \frac{\partial(\rho\lambda)}{\partial x_j}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda(x_{n+1}) \frac{\partial \rho}{\partial x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n) + \rho(x_1, \dots, x_n) \lambda'(x_{n+1}), \\
&- \lambda(x_{n+1}) v_{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial \rho}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) - \rho(x_1, \dots, x_n) v_{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} v_j \frac{\partial \lambda}{\partial x_j}(x_{n+1}) \\
&= \rho(x_1, \dots, x_n) \lambda'(x_{n+1}) - \lambda(x_{n+1}) v_{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} - \rho(x_1, \dots, x_n) v_{n+1} v_{n+1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_{n+1}}(x_{n+1}) \\
&= \rho(x_1, \dots, x_n) \lambda'(x_{n+1}) (1 - v_{n+1}^2) - \lambda(x_{n+1}) v_{n+1} \langle V, \text{grad } \rho \rangle,
\end{aligned}$$

concluimos que

$$\begin{aligned}
(*) \quad \int_M \rho \lambda' (1 - v_{n+1}^2) dM &= \int_M \lambda v_{n+1} \langle V, \text{grad } \rho \rangle dM + \int_M \delta_{n+1}(\rho \lambda) dM = \\
&= \int_M \lambda v_{n+1} \langle V, \text{grad } \rho \rangle dM + n \int_M \rho \lambda H v_{n+1} dM.
\end{aligned}$$

Agora,

$$\int_{\left\{ \begin{array}{l} -r \leq x_{n+1} \leq r \\ x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq (\frac{r}{2})^2 \end{array} \right\} \cap M} (1 - v_{n+1}^2) dM \leq \int_M \rho \lambda' (1 - v_{n+1}^2) dM.$$

Por (*) temos

$$\begin{aligned}
&\int_M \rho(x_1, \dots, x_n) \lambda'(x_{n+1}) (1 - v_{n+1}^2) dM \\
&= n \int_M \rho \lambda H v_{n+1} dM + \int_M \lambda v_{n+1} \langle V, \text{grad } \rho \rangle dM.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \int \left\{ \begin{array}{l} -r \leq x_{n+1} \leq r \\ x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq (\frac{r}{2})^2 \end{array} \right\} \cap M (1 - v_{n+1}^2) dM &\leq n \int_M \rho \lambda v_{n+1} dM + \int_M \lambda v_{n+1} \langle V, \text{grad } \rho \rangle dM \\ &\leq r \cdot n \int_{D(r)} H d\tilde{M} + \int_{D(r)} |\text{grad } \rho| \lambda(x_{n+1}) d\tilde{M}, \end{aligned}$$

onde $v_{n+1} dM = d\tilde{M}$.

Assim,

$$\int \left\{ \begin{array}{l} -r \leq x_{n+1} \leq r \\ x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq (\frac{r}{2})^2 \end{array} \right\} \cap M (1 - v_{n+1}^2) dM \leq r w_n r^{n-1} + \int_{D(r)} \frac{1}{2r} r d\tilde{M} = \frac{3}{2} w_n r^n.$$

Usando a estimativa acima, obtemos que

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B(\frac{r}{2})) &\leq \int \left\{ \begin{array}{l} -r \leq x_{n+1} \leq r \\ x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq (\frac{r}{2})^2 \end{array} \right\} \cap M^1 \\ &\leq \frac{3}{2} w_n r^n + \int \left\{ \begin{array}{l} -r \leq x_{n+1} \leq r \\ x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq (\frac{r}{2})^2 \end{array} \right\} \cap M v_{n+1}^2 dM \leq \frac{5}{2} w_n r^n, \end{aligned}$$

onde consideramos $v_{n+1}^2 dM = d\overline{M}$. O que prova a afirmação 2.2.2.

Corolário 2.2.2 *Seja $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ como no Teorema 2.2.2. Se $\overline{Ric} \leq 0$ e $\inf_{\overline{M}} \overline{Ric}(N) = -\delta$; $\delta > 0$, então $H^2 \leq \delta$. Em particular, se \overline{M}^{n+1} é o espaço hiperbólico $H^{n+1}(-1)$ com curvatura seccional -1 , então $H^2 \leq 1$.*

Prova: Se $\overline{Ric} \leq 0$ e $\inf_{\overline{M}} \overline{Ric}(N) = -\delta$, então $\inf_{M-B(r_0)} \overline{Ric}(N) \geq -\delta$. Assim, usando o Teorema 2.2.2, temos que

$$H^2 \leq - \inf_{M-B(r_0)} \overline{Ric}(N) \leq \delta.$$

■

A condição de que $indM < \infty$ é certamente necessária para o Teorema 2.2.2, conforme mostra o exemplo do cilindro feito na seção anterior.

Outros exemplos são as superfícies de Delaunay em \mathbb{R}^3 , pois elas tem índice infinito e volume com crescimento linear.

Usando essencialmente a mesma idéia da prova do Teorema 2.2.2, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.2.2 *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa, não-compacta e $L = \Delta + q$ um operador em M onde q é uma função suave em M . Suponha que M tem volume com crescimento polinomial e que o índice de L seja finito ($indM < \infty$). Então, existe uma constante $r_0 > 0$ tal que*

$$\inf_{M-B(r_0)} q \leq 0.$$

Prova: Usando o resultado de Fischer-Colbrie, pois $indM < \infty$, temos que existem um compacto $K \subset M$ e uma função positiva u em M tais que

$$Lu = \Delta u + qu = 0$$

em $M - K$. Assim,

$$q = -\frac{\Delta u}{u}$$

Fixe $p \in K$ e $r_0 > 0$ tal que $K \subset B(r_0)$. Assim pelo Lema 2.1.1 $\lambda_1(M - B(r_0)) = 0$ e, pelo Corolário 2.0.1,

$$0 = \lambda_1(M - B(r_0)) \geq \inf_{M-B(r_0)} \left(-\frac{\Delta u}{u} \right) = \inf_{M-B(r_0)} q.$$

Ou seja,

$$\inf_{M-B(r_0)} q \leq 0.$$

■

Neste trabalho nos restringimos a volume com crescimento polinomial utilizando um teorema de oscilação de equações diferenciais ordinárias, que não queremos tratar aqui, do Carmo e Zhou em [dCZ] demonstraram um resultado semelhante ao encontrado neste trabalho envolvendo volume com crescimento exponencial, mas isto já é uma outra história.

Referências

[AdC1] **Alencar, H. and do Carmo, M.** , Hypersurfaces of constant mean curvature with finite index and volume of polynomial growth, Arch. Math. , vol.60, 489-483(1993).

[AdC2] **Alencar, H. and do Carmo, M.** , Erratum to "Hypersurfaces of constant mean curvature with finite index and volume of polynomial growth", Arch. Math. , vol.65, 271-272(1995).

[B] **Berard, P.** , Analysis on Riemannian manifolds and geometric applications: an introduction, Monografias de Matemática n°42, IMPA, 25-34.

[BdC] **Barbosa, J. L., do Carmo, M.** , Stability of hypersurfaces with constant mean curvature, Math. Z. 185, 339-353 (1984).

[Bo] **Bombieri, E.** , Theory of Minimal Surfaces and a Counter-Example to the Bernstein Conjecture in High Dimension, Lectures at the Courant Institute, New York University, 1970.

[dCD] **do Carmo, Manfredo P. and M. Dajczer** , Helicoidal surfaces with constante mean curvature, Tôhoku Math. J. 34, 425-435, 1982.

[dC1] **do Carmo, Manfredo P.** , Riemannian Geometry, Birkhauser, 1ªedição.

[dC2] **do Carmo, Manfredo P.** , Differential Geometry of curves and surfaces, Printice-Hall, 1ªedição.

[dC3] **do Carmo, Manfredo P.** , Hypersufaces of constant mean curvature. Lecture Notes in Math. 1410, Springer, 128-144.

[dCZ] **do Carmo, Manfredo P. and Zhou, Detang** , Eigenvalue estimate on complete noncompacta Riemannian manifolds and applications, American Math.

Society, vol. 351, 1391-1401, n 4 (1999).

[CY] **Cheng, S. T. and Yau, S. T.** , Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications, *Comm. Pure Appl. Math.* 28, 333-354 (1975).

[C] **Chern, S. S.** , A non-existence theorem for stable constant mean curvature hypersurfaces, *Manuscripta Math.*70, 219-226(1991).

[CH] **Cheung, S. S.** , On the curvatures of a piece of hypersurface in Euclidean space. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 29, 77-91 (1965).

[Da] **Darboux, G.** , *Leçons sur la Théorie Générale des surfaces*, Chelsea Publish. Co. New York, 3rd edition, 1972, Vol. III, pp. 314 and 315.

[De] **Delaunay, C.** , Sur la surface de revolution dont la courbure moyenne est constante. *J. Math. Pure et App.*, 16, 309-321, 1841.

[F] **Frid, H.** , O teorema do Índice de Morse. Master's Thesis, IMPA (1982).

[FT] **Frid, H. and Thayer, F.J.** , The Morse Index Theorem for Elliptic Problems with a Constraint. *An. Acad. Brasil. Ci.* 55, 9-10(1983).

[FC] **Fischer-Colbrie, D.** , On complete minimal surfaces with finite Morse index in three-manifolds, *Invent. Math.* 82, 121-132, (1985).

[H] **Hopf, Heinz** , *Differential Geometry in the Large*, Lecture Notes in Math. 1000, Springer (1983).

[S] **Smale, S.** , On the Morse Index Theorem, *Journal of Math. and Mechanics*, vol. 14, n 6, 1049-1055 (1965).

[W] **Wente, H.** , Counterexample to a conjecture of H. Hopf, *Pacific J. Math.*,121, 193-243 (1986).