

**Thiago Fassarella do Amaral**

**Sobre a Aplicação de Gauss de Folheações  
Holomorfas em Espaços Projetivos**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada  
como requisito parcial para obtenção do título de doutor em  
Matemática.

Orientador: Prof. Jorge Vitório Pereira

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2008

**Thiago Fassarella do Amaral**

**Sobre a Aplicação de Gauss de Folheações  
Holomorfas em Espaços Projetivos**

Tese apresentada ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Jorge Vitório Pereira**

Orientador

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

**Prof. Alcides Lins Neto**

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

**Prof. César Camacho**

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

**Prof. Francesco Russo**

Universidade Federal de Pernambuco

**Prof. Dominique Cerveau**

Université de Rennes 1

**Prof. Paulo Sad**

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Rio de Janeiro, 30 de Fevereiro de 2008

## Thiago Fassarella do Amaral

Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo–UFES (Vitória, Espírito Santo). Mestre em Matemática pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA (Rio de Janeiro).

### Ficha Catalográfica

Fassarella, T.

Sobre a Aplicação de Gauss de Folheações Holomorfas em Espaços Projetivos / Thiago Fassarella do Amaral; orientador: Jorge Vitório Pereira. — Rio de Janeiro : IMPA, 2008.

v., 91 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (doutorado) - Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Folheações holomorfas. 3. Aplicação de Gauss. 4. Transformações Polares. 5. Folheações degeneradas.

I. Instituto de Matemática Pura e Aplicada.. II. Título.

CDD: 510

## Agradecimentos

Aos meus pais e minha irmã que sempre me apoiaram e com muito amor criaram uma base sólida que possibilitou a realização deste sonho.

À Ana que esteve ao meu lado incentivando e ajudando a superar todas as dificuldades.

Ao meu orientador Professor Jorge Vitório Pereira pela disponibilidade integral, pelos ensinamentos e pelo encorajamento. Sua postura como pesquisador serviu de espelho durante toda a elaboração deste trabalho.

Aos Professores do IMPA, em especial, à Paulo Sad e Alcides Lins Neto pelos ensinamentos que contribuíram substancialmente na minha formação e pesquisa. Aos Professores Karl-Otto Stohr, Eduardo Esteves e Carolina Araujo por atenderem minhas dúvidas freqüentes em Geometria Algébrica.

Ao Professor Francesco Russo pela leitura atenciosa e inúmeras sugestões que enriqueceram o trabalho.

À família constituída no Rio (Afonso, Etereldes, Fabiano e Renner) por todas as aventuras do ap.906 e por terem compartilhado muitos momentos de ansiedade, alegria, tristeza etc.

Ao primo/irmão Etereldes pela amizade e pelo enorme incentivo nos primeiros anos de ‘vida matemática’.

À todos os colegas do IMPA que tornaram muito mais agradável estes anos no Rio, em especial à Adelaílson, André (Galeguinho), André (Galão), Evilson, Fernando Codar, Gabriela, Leandro, Luiz Gustavo (LG), Mário Tanaka, Rodrigo Salomão, Thiago (Candango) e Zé Luiz.

Ao colega Maycol Falla pela leitura minuciosa, comentários e sugestões que foram muito úteis.

Aos funcionários do IMPA pela dedicação e disponibilidade para resolver todos os problemas de última hora.

Ao CNPq e à Faperj pelos auxílios concedidos.

## Resumo

Fassarella, T.; . **Sobre a Aplicação de Gauss de Folheações Holomorfas em Espaços Projetivos**. Rio de Janeiro, 2008. 91p.  
Tese de Doutorado — Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

Estudaremos alguns aspectos da aplicação de Gauss de folheações holomorfas de codimensão um em espaços projetivos. Quando tal aplicação é dominante, analisaremos seus graus, particularmente o grau topológico. Utilizaremos isto para mostrar que os graus da transformação polar associada a uma função homogênea multivaluada, dependem apenas do conjunto de zeros de tais funções. Em particular, obtemos uma prova de uma conjectura de Dolgachev utilizando métodos álgebra-geométricos. Quando a aplicação de Gauss associada a uma folheação de codimensão um não é dominante, estudaremos a relação entre esta folheação com a folheação por  $k$ -planos definida pelas fibras da aplicação de Gauss. Utilizaremos esta relação para obter uma classificação de folheações de codimensão um em  $\mathbb{P}^4$  com aplicação de Gauss degenerada.

## Palavras-chave

Folheações holomorfas. Aplicação de Gauss. Transformações Polares.  
Folheações degeneradas.

## Abstract

Fassarella, T.; . **On the Gauss Map of Holomorphic Foliations on Projective Spaces**. Rio de Janeiro, 2008. 91p. PhD Thesis — Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

We will study some aspects of the Gauss map of holomorphic foliations of codimension one on projective spaces. When such map is dominant, we investigate its degrees, particularly the topological degree. Then we use this to show that the degrees of polar transformations associated to multi-valued homogeneous functions can be determined by their set of zeros. In particular, we get a proof for a conjecture by Dolgachev using algebro-geometric methods. When the Gauss map associated to a foliation of codimension one is not dominant, we examine a relation between this foliation and the foliation by  $k$ -planes determined by the fibers of the Gauss map. We use this relation to obtain a classification of foliations of codimension one on  $\mathbb{P}^4$  with degenerate Gauss map.

## Keywords

Holomorphic foliation. Gauss map. Polar transformations. Degenerate foliations.

# Sumário

Introdução	8
1 Preliminares	10
1.1 Folheações Holomorfas de Codimensão Um	10
1.2 Aplicação de Gauss	11
1.3 Classificação de Folheações de Grau Um	17
2 Estudo do Grau da Aplicação de Gauss	21
2.1 Grau Topológico	21
2.2 Graus da Aplicação de Gauss	24
2.3 Folheações Logarítmicas	26
2.4 Folheações com Feixe Tangente Totalmente Decomponível	29
3 Transformações Polares	36
3.1 Introdução	36
3.2 Transformações Polares $\times$ Folheações Logarítmicas	37
3.3 Invariância do Grau da Transformação Polar	40
4 Folheações Degeneradas	44
4.1 Folheações por $k$ -planos	44
4.2 Folheações Degeneradas e Exemplos Gerais	52
4.3 Folheações Degeneradas em $\mathbb{P}^3$	56
5 Folheações Degeneradas em $\mathbb{P}^4$	59
5.1 Generalidades	59
5.2 Os Exemplos	59
5.3 Teorema de Classificação	69
A Variedades com Aplicação de Gauss Degenerada	78
B Componentes do Espaço de Folheações	83
Referências Bibliográficas	86

## Introdução

Ao longo deste trabalho estudaremos alguns aspectos da *aplicação de Gauss* de folheações holomorfas de codimensão um em espaços projetivos

$$\begin{aligned} G_{\mathcal{F}} : \mathbb{P}^n &\dashrightarrow \tilde{\mathbb{P}}^n \\ p &\mapsto T_p\mathcal{F}. \end{aligned}$$

Quando  $G_{\mathcal{F}}$  é dominante, diremos que  $\mathcal{F}$  é *não-degenerada*. Neste caso, estudaremos no Capítulo 2, os graus  $\text{gr}_i(G_{\mathcal{F}})$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$ , onde  $\text{gr}_0(G_{\mathcal{F}})$  coincide com o grau topológico de  $G_{\mathcal{F}}$ . Podemos obter uma relação entre estes e o grau topológico da aplicação de Gauss da folheação restrita a certas seções por  $k$ -planos (Teorema 2.9). Nas duas últimas seções deste capítulo analisaremos, sobre certas hipóteses, o grau da aplicação de Gauss de folheações logarítmicas e folheações com feixe tangente totalmente decomponível.

No Capítulo 3 estudaremos os graus  $\text{gr}_i(\nabla\mathbb{F}^\lambda)$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ , onde  $\nabla\mathbb{F}^\lambda$  é a transformação polar associada a uma função multivaluada

$$\mathbb{F}^\lambda = \prod_{j=1}^k F_j^{\lambda_j} : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^1,$$

$F_j \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  é um polinômio homogêneo e  $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$ . Podemos associar à  $\mathbb{F}^\lambda$  uma folheação logarítmica  $\mathcal{F}_{\overline{\lambda}}$  e obter uma relação entre os graus de  $G_{\mathcal{F}_{\overline{\lambda}}}$  e  $\nabla\mathbb{F}^\lambda$  (Teorema 3.3). Utilizando os resultados do Capítulo 2, demonstraremos que os graus  $\text{gr}_i(\nabla\mathbb{F}^\lambda)$  dependem apenas do conjunto de zeros  $V(\prod F_j)$  (Teorema 3.5). Quando  $\lambda_j \in \mathbb{N}$ , para todo  $j = 1, \dots, k$  e estamos interessados no grau topológico (i.e.,  $i = 0$ ) então este resultado foi proposto por I.V.Dolgachev em [Do], onde uma resposta positiva já havia sido obtida por A.Dimca e S.Papadima em [DiPa] utilizando métodos topológicos baseados na teoria de Morse complexa.

Quando  $G_{\mathcal{F}}$  não é dominante, diremos que  $\mathcal{F}$  é *degenerada* e o posto de  $\mathcal{F}$  é definido como a dimensão da imagem de  $G_{\mathcal{F}}$ . Neste caso, as fibras de  $G_{\mathcal{F}}$  definem uma folheação por  $k$ -planos em  $\mathbb{P}^n$ . No Capítulo 4, estudaremos folheações por  $k$ -planos e a relação com folheações degeneradas.

O estudo de folheações degeneradas em  $\mathbb{P}^n$  foi utilizado na classificação



das componentes irredutíveis do espaço de folheações de grau dois (cf. [CLn]) onde foi mostrado que, se  $\mathcal{F}$  é uma folheação de posto no máximo dois em  $\mathbb{P}^n$  temos uma das seguintes possibilidades:

1.  $\mathcal{F}$  admite integral primeira racional.
2.  $\mathcal{F}$  é pull-back linear de uma folheação em  $\mathbb{P}^2$ .

No Capítulo 5, estudaremos folheações de posto três em  $\mathbb{P}^4$ . Utilizando a estrutura da folheação por retas definida por  $G_{\mathcal{F}}$  e a classificação de folheações por planos em  $\mathbb{P}^4$ , vamos obter uma classificação similar ao caso de posto dois, porém consideravelmente mais complicada, das folheações de posto três em  $\mathbb{P}^4$  que possivelmente não admitem integral primeira racional (Teorema 5.9). Estes são os exemplos da seção 5.2.

# 1 Preliminares

## 1.1 Folheações Holomorfas de Codimensão Um

Uma **folheação holomorfa singular**  $\mathcal{F}$  de **codimensão um** (por simplicidade, folheação de codimensão um) em uma variedade complexa  $M$  é determinada por um fibrado linear  $\mathcal{L}$  e um elemento  $\omega \in H^0(M, \Omega_M^1 \otimes \mathcal{L})$  satisfazendo

- (i)  $\text{codim}(\text{Sing}(\omega)) \geq 2$  onde  $\text{Sing}(\omega) = \{x \in M \mid \omega(x) = 0\}$ ;
- (ii)  $\omega \wedge d\omega = 0$  em  $H^0(M, \Omega_M^3 \otimes \mathcal{L}^{\otimes 2})$ .

O **conjunto singular** de  $\mathcal{F}$ , denotamos  $\text{Sing}(\mathcal{F})$ , é por definição  $\text{Sing}(\omega)$ . A condição de integrabilidade (ii) determina em uma vizinhança analítica de cada ponto regular  $p$  de  $\mathcal{F}$ , ou seja,  $p \in M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$  uma fibração holomorfa de codimensão um onde o espaço tangente a cada fibra em um ponto dado coincide com o núcleo de  $\omega$  neste ponto. A continuação analítica destas fibras determinam as folhas de  $\mathcal{F}$ .

Consideremos o caso em que  $M = \mathbb{P}^n$ . O **grau** de  $\mathcal{F}$ , denotamos  $\text{gr}(\mathcal{F})$ , é definido como o grau do lugar de zeros de  $i^*\omega \in H^0(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1 \otimes \mathcal{L}|_{\mathbb{P}^1})$ , onde  $i : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$  é um mergulho linear genérico; geometricamente o grau é o número de tangências entre a folheação e uma reta genérica. Sendo  $\Omega_{\mathbb{P}^1}^1 \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$  segue que  $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\text{gr}(\mathcal{F}) + 2)$ .

O núcleo do morfismo de feixes

$$\begin{aligned} T\mathbb{P}^n &\rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\text{gr}(\mathcal{F}) + 2) \\ v &\rightarrow i_v\omega \end{aligned}$$

definido pela contração com  $\omega$  é um feixe coerente chamado **feixe tangente** de  $\mathcal{F}$  o qual denotaremos por  $T\mathcal{F}$ .

Consideremos a sequência de Euler

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \bigoplus_{n+1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \rightarrow T\mathbb{P}^n \rightarrow 0.$$

Dualizando a sequência exata acima e tensorizando por  $\mathcal{L}$  obtemos

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(\text{gr}(\mathcal{F}) + 2) \rightarrow \bigoplus_{n+1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\text{gr}(\mathcal{F}) + 1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\text{gr}(\mathcal{F}) + 2) \rightarrow 0.$$

Segue que a 1-forma  $\omega \in H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(\text{gr}(\mathcal{F}) + 2))$  pode ser interpretada como 1-forma integrável em  $\mathbb{C}^{n+1}$ , que ainda denotaremos por  $\omega$ ,

$$\omega = \sum_{i=0}^n A_i dx_i$$

com  $A_i$  polinômios homogêneos de grau  $\text{gr}(\mathcal{F}) + 1$  satisfazendo a relação de Euler  $i_R \omega = 0$ , onde  $i_R$  denota o produto interior com o campo de vetores radial  $R = \sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ . A hipótese (i)  $\text{codim}(\text{Sing}(\omega)) \geq 2$ , garante que os zeros comuns dos polinômios  $A_i$ 's têm codimensão pelo menos dois. Esta 1-forma define uma folheação de codimensão um  $\widehat{\mathcal{F}}$  em  $\mathbb{C}^{n+1}$ ,  $\widehat{\mathcal{F}} = \pi^*(\mathcal{F})$  onde  $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$  é a projeção canônica. Por simplicidade, podemos escrever  $\mathcal{F} = (\omega = 0)$ .

## 1.2

### Aplicação de Gauss

Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação de codimensão um em  $\mathbb{P}^n$ . Consideremos a **aplicação de Gauss** associada à  $\mathcal{F}$

$$\begin{aligned} G_{\mathcal{F}} : \mathbb{P}^n &\dashrightarrow \check{\mathbb{P}}^n \\ p &\mapsto T_p \mathcal{F} \end{aligned}$$

onde  $\check{\mathbb{P}}^n$  denota o espaço de hiperplanos em  $\mathbb{P}^n$  e  $T_p \mathcal{F}$  o espaço tangente projetivo da folha de  $\mathcal{F}$  através de  $p$ .

Identificando  $\check{\mathbb{P}}^n$  com  $\mathbb{P}^n$  obtemos a aplicação racional dada pelas coordenadas de  $\omega$

$$\begin{aligned} G_{\mathcal{F}} : \mathbb{P}^n &\dashrightarrow \mathbb{P}^n \\ p &\mapsto (A_0(p) : \dots : A_n(p)) \end{aligned}$$

onde o conjunto de indeterminação coincide com  $\text{Sing}(\mathcal{F})$ .

Denotaremos por  $\text{Im}(G_{\mathcal{F}})$  o fecho algébrico do conjunto  $G_{\mathcal{F}}(\mathbb{P}^n \setminus \text{Sing}(\mathcal{F}))$ .

A aplicação homogênea definida em coordenadas afins

$$\begin{aligned} \widehat{G}_{\mathcal{F}} : \mathbb{C}^{n+1} &\dashrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ p &\mapsto (A_0(p), \dots, A_n(p)). \end{aligned}$$

será chamada **levantamento de  $G_{\mathcal{F}}$** . Note que o levantamento está bem definido a menos de multiplicação por uma constante não-nula.

**Observação 1.1** Analogamente, se  $\mathcal{F}$  é uma folheação de codimensão  $k$  em  $\mathbb{P}^n$ , podemos considerar a aplicação de Gauss

$$\begin{aligned} G_{\mathcal{F}} : \mathbb{P}^n &\dashrightarrow \mathbb{G}(n-k, n) \\ p &\mapsto T_p\mathcal{F} \end{aligned}$$

onde  $\mathbb{G}(n-k, n)$  denota a Grassmanniana de  $(n-k)$ -planos em  $\mathbb{P}^n$ .

**Definição 1.2** Dizemos que uma folheação de codimensão um  $\mathcal{F}$  em  $\mathbb{P}^n$  é **degenerada** quando  $G_{\mathcal{F}}$  não é dominante. Caso contrário, dizemos que  $\mathcal{F}$  é **não-degenerada**. O **posto** de  $\mathcal{F}$  é definido como a dimensão da imagem de  $G_{\mathcal{F}}$ .

Nossa primeira observação a respeito da aplicação de Gauss é a seguinte:

**Proposição 1.3** *Toda folheação de codimensão um em  $\mathbb{P}^n$ ,  $n \geq 3$ , com singularidade isolada é não-degenerada.*

*Prova.* Seja  $p$  uma singularidade isolada de  $\mathcal{F}$ . Vamos mostrar que todo hiperplano que passa por  $p$  pertence à imagem da aplicação de Gauss.

Seja  $H$  um hiperplano contendo por  $p$ . Em um sistema de coordenadas afins  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$  podemos supor  $p = 0$  e  $H = (x_n = 0)$ . Neste sistema de coordenadas  $\mathcal{F}$  é induzida por uma 1-forma polinomial

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i,$$

satisfazendo ainda  $\text{codim}(\text{Sing}(\omega)) \geq 2$ .

Considere a folheação  $\mathcal{H} = (dx_n = 0)$  em  $\mathbb{C}^n$ . Sendo  $p$  uma singularidade isolada de  $\mathcal{F}$ , o conjunto de pontos de tangência entre  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{H}$ ,

$$\text{tang}(\mathcal{F}, \mathcal{H}) = \{\omega \wedge dx_n = 0\} = \{a_1 = \dots = a_{n-1} = 0\}$$

é uma curva passando por  $p$ . Seja  $q_k \in \text{tang}(\mathcal{F}, \mathcal{H})$  uma sequência de pontos (distintos de  $p$ ) convergindo para  $p$ . Claramente temos que  $G_{\mathcal{F}}(q_k)$  converge para  $H$  em  $\check{\mathbb{P}}^n$ , i.e.,  $H \in \text{Im}(G_{\mathcal{F}})$ . Portanto  $\text{Im}(G_{\mathcal{F}})$  contém o hiperplano  $p^\vee \subset \check{\mathbb{P}}^n$  dual de  $p$  e um ponto  $G_{\mathcal{F}}(q_k) \in \check{\mathbb{P}}^n \setminus p^\vee$ . Pela irreduzibilidade de  $\mathbb{P}^n$  concluímos que  $\text{Im}(G_{\mathcal{F}}) = \mathbb{P}^n$ . ■

Se  $F$  é um polinômio homogêneo em  $(n + 1)$  variáveis, denotaremos por  $V(F) \subset \mathbb{P}^n$  o conjunto algébrico associado ao conjunto de zeros definido por  $F$ . Quando  $V(F)$  é uma hipersuperfície irreduzível, o **posto** de  $V(F)$  é por definição o posto da diferencial de sua aplicação de Gauss em um ponto genérico (veja o Apêndice A).

**Definição 1.4** Se  $\mathcal{F} = (\omega = 0)$  é não-degenerada e  $\omega = \sum_{i=0}^n A_i dX_i$ , o **divisor parabólico** associado a  $\mathcal{F}$ , é o conjunto algébrico  $V(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$  onde  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$  é o polinômio homogêneo

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}} = \det \left( \frac{\partial A_i}{\partial X_j} \right).$$

**Proposição 1.5** Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação não-degenerada em  $\mathbb{P}^n$ ,  $n \geq 2$  e  $F$  um polinômio homogêneo irreduzível tal que  $V(F)$  é uma hipersuperfície degenerada e invariante por  $\mathcal{F}$ . Então  $F^{n-k-1}$  divide  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ , onde  $k$  é o posto de  $V(F)$ .

*Prova.* Seja  $\hat{V}(F) = \pi^{-1}(V(F)) \cup \{0\}$  o cone afim sobre  $V(F)$  e

$$\hat{G}_{\mathcal{F}} : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$$

o levantamento de  $G_{\mathcal{F}}$ . Considere um ponto suave  $p \in \hat{V}(F)$  tal que sua imagem seja um ponto suave de  $\hat{G}_{\mathcal{F}}(\hat{V}(F))$ . Se denotarmos por  $\overline{F}$ ,  $\overline{\mathcal{P}}_{\mathcal{F}}$  as respectivas classes no anel local de germes de funções holomorfas  $\mathcal{O}_p$  é suficiente mostrar que  $\overline{F}^{n-k-1}$  divide  $\overline{\mathcal{P}}_{\mathcal{F}}$ . Em um sistema de coordenadas  $(x_0, \dots, x_n)$  tal que  $p = \hat{G}_{\mathcal{F}}(p) = 0$  podemos supor que

$$V(F) = \{x_n = 0\} \text{ e } \hat{G}_{\mathcal{F}}(\hat{V}(F)) = \{x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}.$$

Portanto,  $\hat{G}_{\mathcal{F}} = (A_0, \dots, A_k, x_n A_{k+1}, \dots, x_n A_n)$   $A_i \in \mathcal{O}_0$ .

Daí segue que  $x_n^{n-k-1}$  divide  $\det(J\hat{G}_{\mathcal{F}})$  em  $\mathcal{O}_0$ . Como tal mudança de coordenadas induz um isomorfismo nos anéis locais temos que  $\overline{F}^{n-k-1}$  divide  $\overline{\mathcal{P}}_{\mathcal{F}}$ . ■

**Observação 1.6** Um resultado similar a proposição anterior para transformação polar associada a um polinômio homogêneo pode ser encontrado em [S2, Se].

**Corolário 1.7** Se  $\mathcal{F}$  é uma folheação não-degenerada em  $\mathbb{P}^n$ ,  $n \geq 2$ , então o número de hipersuperfícies degeneradas invariantes por  $\mathcal{F}$  e com aplicação de Gauss de posto  $k$ ,  $0 \leq k \leq n - 2$ , é no máximo

$$\binom{n+1}{n-k-1} \text{gr}(\mathcal{F}).$$

*Prova.* Basta observar que  $\text{gr}(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}) = (n + 1)\text{gr}(\mathcal{F})$ . ■

**Observação 1.8** O caso em que  $V(F)$  é um hiperplano no Corolário 1.7 foi utilizado em [PY] para limitar a dimensão de certas variedades ressonantes associadas a um arranjo de hiperplanos.

### 1.2.1

#### Singularidades do Tipo Morse em Seções Hiperplanas

Seja  $\mathcal{F}$  um germe de folheação de codimensão um em  $(\mathbb{C}^n, p)$ . Diremos que  $p$  é uma **singularidade do tipo Morse**, se existir um biholomorfismo  $\phi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, p)$ , tal que  $\phi^*\mathcal{F}$  possui uma integral primeira da forma  $x_1^2 + \dots + x_n^2$ . Se  $f : (\mathbb{C}^n, p) \rightarrow \mathbb{C}$  é uma integral primeira de  $\mathcal{F}$  em  $(\mathbb{C}^n, p)$  tal que  $p$  é uma singularidade isolada de  $df$ , então segue do Lema de Morse que  $p$  é uma singularidade do tipo Morse de  $\mathcal{F}$  se, e somente se,  $\det(\text{Hess}_p(f)) \neq 0$ . Onde  $\text{Hess}_p(f)$  denota a matriz hessiana de  $f$  em  $p$ . Lembramos que o **número de Milnor** de  $\mathcal{F}$  em  $p$ , é definido como

$$\mu(\mathcal{F}, p) = \dim \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, p}}{\langle a_1, \dots, a_n \rangle},$$

onde  $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$  é uma 1-forma definindo  $\mathcal{F}$  e  $p$  é singularidade isolada de  $\omega$ .

Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação de codimensão um em  $\mathbb{P}^n$  e  $i : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^n$  um mergulho linear,  $1 \leq k \leq n$ . Se  $i^*\omega \equiv 0$  dizemos que  $i(\mathbb{P}^k)$  é invariante por  $\mathcal{F}$ . Caso contrário, dividindo  $i^*\omega$  (interpretada como 1-forma em  $\mathbb{C}^{k+1}$ ) por um fator comum entre seus coeficientes, obtemos uma folheação de codimensão um  $i^*\mathcal{F} = \mathcal{F}|_{i(\mathbb{P}^k)}$ .

**Proposição 1.9** *Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação de codimensão um em  $\mathbb{P}^n$ ,  $n \geq 2$  e  $p$  ponto regular de  $\mathcal{F}$ . Então  $dG_{\mathcal{F}}(p)$  tem posto  $n$  se, e somente se,  $p$  é uma singularidade do tipo Morse de  $\mathcal{F}|_{T_p\mathcal{F}}$ .*

*Prova.* Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  uma integral primeira de  $\mathcal{F}|_U$  onde  $U$  é uma vizinhança de  $p$ . A menos de uma mudança de coordenadas linear podemos supor que  $p = 0$ ,  $f_{x_1}(0) = \dots = f_{x_{n-1}}(0) = 0$  e  $f_{x_n}(0) \neq 0$ , ou seja,  $T_p\mathcal{F} = \{x_n = 0\}$ .

Se  $q = (x_1, \dots, x_n) \in U$ ,

$$T_q\mathcal{F} = \{(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^n f_{x_i}(q) \cdot (v_i - x_i) = 0\}$$

e portanto,

$$G_{\mathcal{F}}(q) = \left( f_{x_1}(q) : \dots : f_{x_{n-1}}(q) : f_{x_n}(q) : - \sum_{i=1}^n f_{x_i}(q) \cdot x_i \right) \in \check{\mathbb{P}}^n.$$

Logo, em coordenadas locais, a aplicação de Gauss tem a seguinte forma

$$G_{\mathcal{F}}(q) = f_{x_n}(q)^{-1} \cdot \left( f_{x_1}(q), \dots, f_{x_{n-1}}(q), - \sum_{i=1}^n f_{x_i}(q) \cdot x_i \right).$$

Observe que a matriz Jacobiana de  $G_{\mathcal{F}}$  é dada por

$$JG_{\mathcal{F}}(p) = f_{x_n}^{-1}(p) \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(p) & \cdots & f_{x_1 x_{n-1}}(p) & f_{x_1 x_n}(p) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ f_{x_{n-1} x_1}(p) & \cdots & f_{x_{n-1} x_{n-1}}(p) & f_{x_{n-1} x_n}(p) \\ 0 & \cdots & 0 & f_{x_n}(p) \end{pmatrix}.$$

Portanto  $dG_{\mathcal{F}}(p)$  tem posto  $n$  se, e somente se,  $\det(\text{Hess}_p(f|_{T_p \mathcal{F} \cap U})) \neq 0$ . Como  $f|_{T_p \mathcal{F} \cap U}$  é uma integral primeira de  $\mathcal{F}|_{T_p \mathcal{F} \cap U}$ , o resultado segue. ■

**Proposição 1.10** *Se  $\mathcal{F}$  é uma folheação de codimensão um em  $\mathbb{P}^n$ ,  $n \geq 3$  e  $H \subset \mathbb{P}^n$  é um hiperplano genérico. Então o grau de  $\mathcal{F}|_H$  coincide com o grau de  $\mathcal{F}$  e*

$$\text{Sing}(\mathcal{F}|_H) = (\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap H) \cup G_{\mathcal{F}}^{-1}(H).$$

*Mais ainda, se  $G_{\mathcal{F}}^{-1}(H)$  é não-vazio, então consiste em um número finito de singularidades do tipo Morse de  $\mathcal{F}|_H$ .*

*Prova.* A prova segue da Proposição 1.9 e do Teorema de Sard aplicado à  $G_{\mathcal{F}}$ . ■

Se  $f : M \rightarrow N$  é uma aplicação holomorfa entre variedades complexas de mesma dimensão e  $p$  é um ponto isolado em  $f^{-1}(f(p))$ , então existem vizinhanças  $V \subset M$  de  $p$  e  $W \subset N$  de  $f(p)$  tal que para todo valor regular  $q \in W$ , a cardinalidade do conjunto  $f^{-1}(q) \cap V$  é finita e independe de  $q$ , este número é chamado **grau local** de  $f$  em  $p$  e denotamos por  $\text{gr}_p(f)$ .

**Proposição 1.11** *Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação não-degenerada em  $\mathbb{P}^n$ ,  $n \geq 2$  e  $p$  um ponto regular isolado em  $G_{\mathcal{F}}^{-1}(T_p \mathcal{F})$ . Então*

$$\text{gr}_p(G_{\mathcal{F}}) = \mu(\mathcal{F}|_{T_p \mathcal{F}}, p).$$

*Prova.* Fixemos um sistema de coordenadas  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$  onde  $p = 0$  e  $T_p\mathcal{F} = \{x_n = 0\}$ . Considere uma vizinhança  $U \subset T_p\mathcal{F}$  de  $p$  tal que  $p$  é uma singularidade isolada de  $\mathcal{F}|_{T_p\mathcal{F}}$ . Seja  $W = U \times \mathbb{D} \subset \mathbb{P}^n$  uma vizinhança de  $p$  que não intersecta o conjunto singular de  $\mathcal{F}$  e  $V \subset \check{\mathbb{P}}^n$  uma vizinhança de  $T_p\mathcal{F}$  tal que o grau local de  $G_{\mathcal{F}}$  em  $p$  é dado pelo número de pontos na imagem inversa de um valor regular  $E \in V$  pela aplicação  $G_{\mathcal{F}}|_W$ .

Seja  $\omega$  1-forma definindo  $\mathcal{F}$  em  $W$ . Consideremos  $i_1 : U \rightarrow E$  uma parametrização local de  $E \cap W$  e  $i_2 : U \rightarrow T_p\mathcal{F}$  a inclusão. Como podemos escolher  $E$  suficiente próximo de  $T_p\mathcal{F}$  e portanto  $i_1^*\omega$  suficientemente próxima de  $i_2^*\omega$ , por propriedades do número de Milnor obtemos que

$$\sum_{q \in \text{Sing}(i_1^*\omega)} \mu(i_1^*\omega, q) = \mu(i_2^*\omega, p).$$

Observe que  $q \in \text{Sing}(i_1^*\omega)$  se, e somente se,  $i_1(q) \in (G_{\mathcal{F}}|_W)^{-1}(E)$ . Sendo  $E$  um valor regular, segue da Proposição 1.9 que  $\mu(i_1^*\omega, q) = 1$ . Portanto o resultado segue da igualdade acima. ■

### 1.2.2

#### Linearidade das Fibras

Seja  $p$  um ponto regular de  $\mathcal{F}$  e  $M$  uma subvariedade complexa de codimensão um contendo  $p$  e invariante por  $\mathcal{F}$ , então  $G_{\mathcal{F}}$  quando restrita à  $M$  coincide com a aplicação de Gauss projetiva

$$\begin{aligned} G_M : M &\longrightarrow \check{\mathbb{P}}^n \\ p &\longmapsto T_pM . \end{aligned}$$

Denotaremos por  $\text{posto}(A)$  o posto de transformação linear  $A$  em questão.

**Lema 1.12** *Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação de codimensão um em  $\mathbb{P}^n$ ,  $n \geq 2$  e  $M$  uma subvariedade complexa de codimensão um invariante por  $\mathcal{F}$ . Se  $p \in M$  é um ponto regular de  $\mathcal{F}$ , então*

$$\text{posto}(dG_{\mathcal{F}}(p)) = \text{posto}(dG_M(p)) + 1.$$

*Prova.* Consideremos um sistema de coordenadas  $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{C}^n, p)$  onde  $p = 0$  e  $T_p\mathcal{F} = \{x_n = 0\}$ . É fácil ver que

$$dG_{\mathcal{F}}(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right) \notin dG_{\mathcal{F}}(p)(T_p\mathcal{F}).$$



Como  $dG_{\mathcal{F}}(p)|_{T_p\mathcal{F}} = dG_M(p)$  o resultado segue. ■

Se  $\mathcal{F}$  é uma folheação degenerada então a diferencial da aplicação de Gauss é singular em todo ponto e tem posto constante  $1 \leq r \leq n - 1$  fora de subconjunto algébrico  $S$  de  $\mathbb{P}^n$ . Pelo Teorema da Função Implícita as fibras de  $G_{\mathcal{F}}$  definem uma folheação holomorfa em  $\mathbb{P}^n \setminus S$  de dimensão  $n - r$ . A proposição seguinte mostra que as folhas desta folheação são espaços lineares.

**Proposição 1.13** *Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação degenerada em  $\mathbb{P}^n$ ,  $n \geq 2$ , de posto  $k$ ,  $1 \leq k \leq n - 1$ . Então uma fibra genérica de  $G_{\mathcal{F}}$  é uma união de subconjuntos abertos de espaços lineares de dimensão  $n - k$ .*

*Prova.* A prova segue do Teorema A.1 e do Lema 1.12. ■

**Observação 1.14** Claramente um resultado análogo vale para folheações de codimensão arbitrária.

### 1.3

#### Classificação de Folheações de Grau Um

Denotamos por  $\mathcal{F}(d, n)$  o espaço de folheações de codimensão um em  $\mathbb{P}^n$  e grau  $d$ . Observe que este é um subconjunto algébrico quase-projetivo de  $H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(d + 2))$ . Veja o Apêndice B para notação das componentes de  $\mathcal{F}(d, n)$ .

O estudo das componentes irredutíveis de  $\mathcal{F}(d, n)$  foi iniciado por Jouanolou em [Jou] onde as componentes irredutíveis de  $\mathcal{F}(1, n)$  foram classificadas para todo  $n \geq 3$ .

**Teorema 1.15** [Jou] *O espaço de folheações de grau 1 em  $\mathbb{P}^n$ ,  $n \geq 3$ , tem duas componentes irredutíveis  $PL(1, n)$  e  $\overline{R(1, 2)}$ .*

A classificação das componentes irredutíveis de  $\mathcal{F}(2, n)$  foi obtida por D.Cerveau e A.Lins Neto em [CLn].

**Teorema 1.16** [CLn] *O espaço de folheações de grau 2 em  $\mathbb{P}^n$ ,  $n \geq 3$ , tem seis componentes irredutíveis  $PL(2, n)$ ,  $\overline{R(2, 2)}$ ,  $\overline{R(1, 3)}$ ,  $\overline{L(2, 1, 1)}$ ,  $\overline{L(1, 1, 1, 1)}$  e  $\overline{PE(2, n)}$ .*

Daremos uma prova do Teorema 1.15 baseada no trabalho de D.Cerveau e A.Lins Neto [CLn]. Antes precisamos de dois lemas:

**Lema 1.17** *Se  $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(1, 2)$  tem uma singularidade do tipo Morse  $p$ , então existe uma reta invariante por  $\mathcal{F}$  que não passa por  $p$ .*

*Prova.* Podemos supor que em uma carta afim  $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$ ,  $p = (0,0)$  e  $\mathcal{F}$  é definida pela 1-forma (veja [LnSc], Proposição 8)

$$\omega = (a_1x + b_1y)dx - (a_2x + b_2y)dy + l(ydx - xdy),$$

onde  $l = \alpha x + \beta y$ ,  $a_i, b_i, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Sendo que  $\mathcal{F}$  admite uma integral primeira da forma  $f = xy + \dots$ , numa vizinhança de  $(0,0)$ . Fazendo  $\omega \wedge df = 0$  obtemos  $a_1 = b_2 = 0$  e  $a_2 = -b_1$ . Portanto podemos supor

$$\omega = ydx + xdy + l(ydx - xdy),$$

Segue que  $\mathcal{F} = (\Omega = 0)$  onde

$$\Omega = y(z + l)dx + x(z - l)dy - 2xydz.$$

Se  $l \equiv 0$  então a reta  $\{z = 0\}$  é invariante por  $\mathcal{F}$  e o lema está provado. Se  $l$  não é identicamente nulo, da igualdade acima é fácil ver que  $\mathcal{F}$  possui três singularidades distintas e não alinhadas. Neste caso, basta considerar a reta que contém as singularidades distintas de  $p$ . ■

**Lema 1.18** *Seja  $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(d,3)$  de posto 2. Se  $\mathcal{F}|_H$  tem grau zero para  $H$  genérico pertencente à imagem de  $G_{\mathcal{F}}$ , então  $\mathcal{F}$  é pull-back linear de uma folheação em  $\mathbb{P}^2$ .*

*Prova.* Seja  $\mathcal{F} = (\omega = 0)$ . Considere

$$\Sigma_{\mathcal{F}} = \{(p, H) \in \mathbb{P}^3 \times \text{Im}(G_{\mathcal{F}}) \mid p \in H \text{ e } \omega|_H \cdot X_p \equiv 0\}$$

onde  $X_p$  é o levantamento para  $\mathbb{C}^4$  do campo de vetores tangente a folheação radial  $\mathcal{R}_p$  formada por retas que contém  $p$ , ou seja,  $\Sigma_{\mathcal{F}}$  é formado pelo conjunto de pontos  $(p, H) \in \mathbb{P}^3 \times \text{Im}(G_{\mathcal{F}})$  tal que  $\mathcal{F}|_H$  é radial em  $p$ .

Sejam  $\tau_1 : \Sigma_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{P}^3$  e  $\tau_2 : \Sigma_{\mathcal{F}} \rightarrow \text{Im}(G_{\mathcal{F}})$  as projeções na primeira e segunda coordenadas. Por hipótese  $\tau_2$  é birracional, logo  $\dim(\Sigma_{\mathcal{F}}) = 2$ . Por outro lado,  $\text{Im}(\tau_1) \subset \text{Sing}(\mathcal{F})$ . Para isto basta observar que se  $(p, H) \in \Sigma_{\mathcal{F}}$ , então  $\mathcal{F}|_H$  não admite integral primeira em uma vizinhança de  $p$ .

Como  $\text{Sing}(\mathcal{F})$  tem dimensão no máximo um, temos que as fibras de  $\tau_1$  tem dimensão positiva. Portanto se fixamos  $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$  genérico, então o conjunto de pontos de tangência entre  $\mathcal{F}$  e  $R_p$  é todo espaço, já que contém infinitos hiperplanos. Isto mostra que  $\text{Im}(G_{\mathcal{F}})$  está contida no plano dual  $p^\vee \subset \check{\mathbb{P}}^3$ . Logo  $\mathcal{F}$  é pull-back linear de uma folheação em  $\mathbb{P}^2$ . ■

*Prova.*(do Teorema 1.15) Seja  $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(1, n)$ , temos dois caso a considerar:

1.  $\dim(\text{Im}(G_{\mathcal{F}})) \leq 2$ .
2.  $\dim(\text{Im}(G_{\mathcal{F}})) \geq 3$ .

**caso (1):** Se  $\dim(\text{Im}(G_{\mathcal{F}})) = 1$  pela linearidade das fibras, toda folha é um subconjunto aberto de um espaço linear, logo  $\mathcal{F}$  é um pencil de hiperplanos. Suponhamos  $\dim(\text{Im}(G_{\mathcal{F}})) = 2$ . Seja  $E \cong \mathbb{P}^3$  genérico, vamos mostrar que  $\mathcal{F}|_E$  é pull-back linear de uma folheação em  $\mathbb{P}^2$ . Daí por ([CLn], Lema-2) o mesmo segue para  $\mathcal{F}$ .

Denotamos  $\mathcal{F}|_E$  por  $\mathcal{F}_1$ . Podemos supor que  $\mathcal{F}_1$  tem grau 1 e  $\dim(\text{Im}(G_{\mathcal{F}_1})) = 2$ . Se  $H \in \text{Im}(G_{\mathcal{F}_1})$  genérico,  $G_{\mathcal{F}_1}^{-1}(H)$  consiste em uma única reta. Assim,  $\text{Sing}(\mathcal{F}_1|_H)$  contém pelo menos uma reta, portanto  $\mathcal{F}_1|_H$  tem grau zero. Logo pelo Lema 1.18,  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}|_E$  é pull-back linear de alguma folheação em  $\mathbb{P}^2$ .

**caso (2):** Pela Proposição 1.9 existe um plano  $E \cong \mathbb{P}^2$ , tal que  $\mathcal{F}|_E$  satisfaz as hipóteses do Lema 1.17. Assim, em um sistema de coordenadas  $(x, y)$  tais que  $(0, 0)$  é uma singularidade do tipo Morse e a reta do infinito é invariante,  $\mathcal{F}|_E$  é definida por uma 1-forma linear

$$\omega = (a_1x + b_1y)dx + (a_2x + b_2y)dy$$

e  $\mathcal{F}|_E$  tem uma integral primeira da forma  $f = xy + \dots$ , numa vizinhança de  $(0, 0)$ . Fazendo  $\omega \wedge df = 0$  obtemos  $a_1 = b_2 = 0$  e  $a_2 = b_1$ , logo a menos de uma mudança de coordenadas,  $\mathcal{F}|_E$  tem uma integral primeira racional da forma  $XY/Z^2$ . Portanto  $\mathcal{F}|_E$  é definida em coordenadas homogêneas de  $\mathbb{C}^3$  pela 1-forma meromorfa fechada

$$\omega = \frac{dX}{X} + \frac{dY}{Y} - 2\frac{dZ}{Z}.$$

Segue que  $\mathcal{F}$  é definida em coordenadas homogêneas de  $\mathbb{C}^{n+1}$  por uma 1-forma meromorfa fechada  $\Omega$  estendendo  $\omega$  (cf. [CaLnS], Lema 9). Mais ainda, se  $\{F_j = 0\}$ ,  $j = 1, \dots, k$ , são os pólos de multiplicidade  $r_j \geq 1$  de  $\Omega$ , então esta se escreve como (cf. [CM])

$$\Omega = \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{dF_j}{F_j} + d\left(\frac{G}{H}\right),$$

onde  $F_j$  são polinômios irredutíveis primos dois a dois,  $H = F_1^{r_1-1} \dots F_k^{r_k-1}$  e  $\text{gr}(G) = \sum_{j=1}^k (r_j - 1)\text{gr}(F_j)$ .

Denotamos com letra minúscula as respectivas restrições dos polinômios acima à  $E$ . Segue que

$$\Omega|_E = \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{df_j}{f_j} + d\left(\frac{g}{h}\right).$$

Como  $\omega$  tem pólos simples segue que  $r_1 = \dots = r_j = 1$ , i.e.,  $g = 0$ . Sendo que  $\Omega|_E$  deve ter três pólos simples, dois resíduos iguais e um diferente temos  $2 \leq k \leq 3$ .

Se  $k = 3$  então podemos supor  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = -2$ ,  $f_1 = X$ ,  $f_2 = Y$  e  $f_3 = Z$ , ou seja,

$$\Omega = \frac{dF_1}{F_1} + \frac{dF_2}{F_2} - 2\frac{dF_3}{F_3}$$

onde  $\text{gr}(F_1) = \text{gr}(F_2) = \text{gr}(F_3) = 1$ . Como  $\{f_1 = 0\}$ ,  $\{f_2 = 0\}$ ,  $\{f_3 = 0\}$  estão em posição geral, podemos supor  $F_1 = X$ ,  $F_2 = Y$ ,  $F_3 = Z$  e assim  $\mathcal{F}$  é pull-back linear de uma folheação em  $\mathbb{P}^2$ . Isto contradiz a hipótese  $\mathcal{F}$  tem posto  $\geq 3$ .

Se  $k = 2$  obtemos  $f_1 f_2 = XYZ$ , ou seja, podemos supor  $\text{gr}(f_1) = 2$ ,  $\text{gr}(f_2) = 1$  e  $\lambda_2/\lambda_1 = -2$ . Portanto

$$\Omega = \frac{dF_1}{F_1} - 2\frac{dF_2}{F_2},$$

onde  $\text{gr}(F_1) = 2$  e  $\text{gr}(F_2) = 1$ . Logo  $\mathcal{F} \in \overline{R(1, 2)}$ . ■

## 2

### Estudo do Grau da Aplicação de Gauss

#### 2.1

##### Grau Topológico

Se  $\mathcal{F}$  é uma folheação de codimensão um em  $\mathbb{P}^n$ , denotaremos por  $\text{gr}(G_{\mathcal{F}})$  o grau topológico da aplicação de Gauss associada à  $\mathcal{F}$ . Se  $n = 2$  segue da Proposição 1.9 que  $\text{gr}(G_{\mathcal{F}}) = \text{gr}(\mathcal{F})$ . A primeira observação a respeito do grau é a seguinte:

**Proposição 2.1** *Seja  $n \geq 3$ . A aplicação  $\text{gr} : \mathcal{F}(d, n) \rightarrow \mathbb{N}$  que associa  $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(d, n)$  ao grau da aplicação de Gauss  $G_{\mathcal{F}}$  é semi-contínua superiormente.*

*Prova.* Seja  $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(d, n)$  não-degenerada e  $p \in G_{\mathcal{F}}^{-1}(H)$  para um hiperplano genérico  $H$  com  $\mu(\mathcal{F}|_H, p) = 1$ .

Seja  $W \subset H$  vizinhança do ponto  $p$  tal que  $\text{Sing}(\mathcal{F}|_W) = \{p\}$ . Seja  $\omega \in \Omega^1(W)$  definindo  $\mathcal{F}|_W$ . Existe uma vizinhança  $U \subset \Omega^1(W)$  de  $\omega$  tal que se  $\eta \in U$  então

$$\sum_{q \in \text{Sing}(\eta)} \mu(\eta, q) = \mu(\omega, p) = 1,$$

ou seja,  $\eta$  possui apenas uma singularidade  $q$  com  $\mu(\eta, q) = 1$ .

Seja  $V \subset \mathcal{F}(d, n)$  vizinhança de  $\mathcal{F}$  tal que se  $\mathcal{F}' \in V$  então  $\text{Sing}(\mathcal{F}') \cap W$  é vazio. Diminuindo  $V$ , se necessário, podemos supor que se  $\mathcal{F}' \in V$  e  $\omega' \in \Omega^1(W)$  define  $\mathcal{F}'|_W$ , então  $\omega' \in U$ . Segue que  $\mathcal{F}'|_H$  possui exatamente uma singularidade em  $W$ . Isto é suficiente para mostrar que  $\text{gr}(\mathcal{F}') \geq \text{gr}(\mathcal{F})$ . ■

**Exemplo 2.2** Seja  $\mathcal{F} \in \overline{R(1, k)}$  uma folheação de codimensão um em  $\mathbb{P}^n$  com integral primeira da forma  $L^k/F$  onde  $\text{gr}(L) = 1$  e  $\text{gr}(F) = k$ . Podemos supor que  $L = X_n$ . Então  $\mathcal{F} = (\omega = 0)$  onde  $\omega = X_n dF - kF dL$ . Sendo

$$kF = \sum_{i=0}^n X_i \frac{\partial F}{\partial X_i},$$

obtemos

$$\text{Sing}(\mathcal{F}) \setminus (V(F) \cap V(X_n)) = V\left(\frac{\partial F}{\partial X_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial X_{n-1}}\right).$$

Se  $F$  é genérico, segue do Teorema de Bezout que o número de singularidades isoladas de  $\mathcal{F}$  é  $(k-1)^n$ . Pelo argumento acima aplicado a  $\mathcal{F}|_{\mathbb{P}^{n-1}}$  obtemos que

$$\text{gr}(\mathcal{F}) = (k-1)^{n-1}.$$

**Proposição 2.3** *Toda folheação de grau 1 não-degenerada têm aplicação de Gauss birracional.*

*Prova.* Se  $n = 2$ , então  $\text{gr}(G_{\mathcal{F}}) = \text{gr}(\mathcal{F}) = 1$ . Se  $n \geq 3$ , a prova segue do Teorema 1.15, da Proposição 2.1 e do Exemplo 2.2. ■

**Observação 2.4** Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação de grau  $d$  em  $\mathbb{P}^3$ ,  $S$  a união das componentes de codimensão 2 do conjunto singular de  $\mathcal{F}$  e  $E \in \check{\mathbb{P}}^3$  genérico. O número de singularidades isoladas de  $\mathcal{F}|_E$  contadas com multiplicidades é dado pelo Teorema de Darboux

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F}|_E)} \mu(\mathcal{F}|_E, p) = 1 + d + d^2.$$

Portanto pela Proposição 1.10 segue que

$$\sum_{p \in E \cap S} \mu(\mathcal{F}|_E, p) + \text{gr}(G_{\mathcal{F}}) = 1 + d + d^2.$$

**Exemplo 2.5** Segue da Observação 2.4 que se  $\mathcal{F}$  denota um elemento genérico na componente irredutível de  $\mathcal{F}(2, 3)$  em questão temos:

1.  $\mathcal{F} \in \overline{R(1, 3)} \Rightarrow \text{gr}(G_{\mathcal{F}}) = 4;$
2.  $\mathcal{F} \in \overline{R(2, 2)} \Rightarrow \text{gr}(G_{\mathcal{F}}) = 3;$
3.  $\mathcal{F} \in \overline{L(2, 1, 1)} \Rightarrow \text{gr}(G_{\mathcal{F}}) = 2;$
4.  $\mathcal{F} \in \overline{L(1, 1, 1, 1)} \Rightarrow \text{gr}(G_{\mathcal{F}}) = 1;$
5.  $\mathcal{F} \in \overline{E(2, 3)} \Rightarrow \text{gr}(G_{\mathcal{F}}) = 1$  (veja também o Exemplo 2.22).

Concluimos esta seção com a seguinte proposição:

**Proposição 2.6** *Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação de codimensão um em  $\mathbb{P}^3$  de grau  $d$  com  $\text{gr}(G_{\mathcal{F}}) \geq d^2$ . Então  $\mathcal{F} \in \overline{R(1, d+1)}$ .*

*Prova.* Se  $\text{gr}(G_{\mathcal{F}}) \geq d^2$  então a restrição de  $\mathcal{F}$  a um plano genérico  $E$ ,  $\mathcal{F}|_E$  possui pelo menos  $d^2$  singularidades simples com índice de Baum-Bott zero, logo por ([LnP], Proposição 5) admite integral primeira da forma  $C/L^{d+1}$  onde  $C$  é um polinômio homogêneo de grau  $(d+1)$  e  $L$  é linear. Portanto  $\mathcal{F}|_E$  é definida em coordenadas homogêneas de  $\mathbb{C}^3$  pela 1-forma meromorfa fechada

$$\omega = \frac{dC}{C} - (d+1)\frac{dL}{L}.$$

Segue que  $\mathcal{F}$  é definida em coordenadas homogêneas de  $\mathbb{C}^4$  por uma 1-forma meromorfa fechada  $\Omega$  estendendo  $\omega$  (cf. [CaLnS], Lema 9). Mais ainda, se  $\{F_j = 0\}$ ,  $j = 1, \dots, k$ , são os pólos de multiplicidade  $r_j \geq 1$  de  $\Omega$ , então esta se escreve como (cf. [CM])

$$\Omega = \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{dF_j}{F_j} + d \left( \frac{G}{H} \right),$$

onde  $F_j$  são polinômios irredutíveis primos dois a dois,  $H = F_1^{r_1-1} \dots F_k^{r_k-1}$  e  $\text{gr}(G) = \sum_{j=1}^k (r_j - 1)\text{gr}(F_j)$ .

Denotamos com letra minúscula as respectivas restrições dos polinômios acima à  $E$ . Segue que

$$\Omega|_E = \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{df_j}{f_j} + d \left( \frac{g}{h} \right).$$

Escrevemos  $C = \prod_{i=1}^s C_i^{d_i}$  decomposição em polinômios irredutíveis,  $\sum_{i=1}^s d_i \text{gr}(C_i) = d+1$ . Daí temos

$$\omega = \sum_{i=1}^s d_i \frac{dC_i}{C_i} - (d+1)\frac{dL}{L}.$$

Como  $\omega$  tem pólos simples segue que  $r_1 = \dots = r_j = 1$ , i.e.,  $g = 0$ . Podemos supor que  $f_k = L$  e  $\lambda_k = -(d+1)$ . Se escrevemos  $f_j = \prod_{l=1}^{k_j} f_{j,l}^{e_{j,l}}$ , sua decomposição em irredutíveis, então para qualquer  $i \in \{1, \dots, s\}$  existem  $j \in \{1, \dots, k-1\}$  e  $l \in \{1, \dots, k_j\}$  tal que  $C_i$  divide  $f_{j,l}$ ,  $\text{gr}(C_i) = \text{gr}(f_{j,l})$  e  $\lambda_j e_l = d_i$ . Daí obtemos que  $\lambda_j \in \mathbb{N}$  e  $\sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j \text{gr}(f_j) = d+1$ , portanto

$$\Omega = \frac{dF}{F} - (d+1)\frac{dF_k}{F_k},$$

onde  $F = \prod_{j=1}^{k-1} F_j^{\lambda_j}$  e  $F_k$  é linear, ou seja,  $\mathcal{F} \in \overline{R(1, d+1)}$ . ■

## 2.2

### Graus da Aplicação de Gauss

Nesta seção estudaremos o grau da pré-imagem de um espaço linear genérico em  $\check{\mathbb{P}}^n$  pela aplicação de Gauss.

Para uma aplicação racional  $\phi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ , definimos  $\text{gr}_i(\phi)$  como a cardinalidade do conjunto  $\overline{\phi|_U^{-1}(L_i)} \cap \Sigma^{n-i}$ , onde  $U \subset \mathbb{P}^n$  é o aberto maximal de definição de  $\phi$ ,  $L_i \subset \mathbb{P}^n$  é um espaço linear genérico de dimensão  $i$  e  $\Sigma^{n-i} \subset \mathbb{P}^n$  é um espaço linear genérico de dimensão  $n - i$ . Se  $\phi$  não é dominante então claramente  $\text{gr}_i(\phi) = 0$ . Se  $\phi$  é dominante então  $\dim(\overline{\phi|_U^{-1}(L_i)}) = i$ , portanto  $\text{gr}_i(\phi)$  coincide com o grau do conjunto algébrico  $\overline{\phi|_U^{-1}(L_i)}$ .

**Definição 2.7** Para cada par de números naturais  $(k, i)$  satisfazendo  $1 \leq k \leq n$  e  $0 \leq i \leq k - 1$ , definimos os números

$$e_i^k(\mathcal{F}) = \text{gr}_i(G_{\mathcal{F}_k}).$$

onde  $\mathcal{F}_k := \mathcal{F}|_{\mathbb{P}^k}$  para algum  $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$  genérico.

Observe que  $e_0^n(\mathcal{F})$  coincide com o grau topológico de  $G_{\mathcal{F}}$ .

Segue da Proposição 1.10 que  $e_0^2(\mathcal{F}) = \text{gr}(\mathcal{F})$ . Mais geralmente, para  $0 \leq i \leq n - 1$ ,  $e_i^n(\mathcal{F})$  coincide com o grau da  $(n - i)$ -ésima classe polar de  $\mathcal{F}$  definida em [Mol].

Seja  $U = \mathbb{P}^n \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$  e  $G = (G_{\mathcal{F}})|_U$ . Seja  $L^i \subset \check{\mathbb{P}}^n$  um espaço linear genérico de dimensão  $i$ ,  $V^i = G^{-1}(L^i) \subset U$  e  $\Sigma^{n-i-1} = \check{L}^i$ , i.e.,

$$\Sigma^{n-i-1} = \bigcap_{H \in L^i} H.$$

**Lema 2.8** Se  $\Sigma^{n-i}$  é um espaço linear genérico de dimensão  $n - i$  ( $i \geq 1$ ) contendo  $\Sigma^{n-i-1}$  então

$$V^i \cap \Sigma^{n-i} = U \cap (\text{Sing}(\mathcal{F}|_{\Sigma^{n-i}}) \cup \text{Sing}(\mathcal{F}|_{\Sigma^{n-i-1}})).$$

Mais ainda,  $\Sigma^{n-i}$  intersecta  $V^i$  transversalmente.

*Prova.* Denotaremos  $\mathcal{F}_j := \mathcal{F}|_{\Sigma^j}$ . Por definição  $V^i = \{p \in U \mid T_p \mathcal{F} \supseteq \Sigma^{n-i-1}\}$ . Claramente os pontos  $p \in \Sigma^{n-i-1} \cap V^i$  coincidem com  $\text{Sing}(\mathcal{F}_{n-i-1})$ . Similarmente um ponto  $p \in (\Sigma^{n-i} \setminus \Sigma^{n-i-1}) \cap V^i$  se, e somente se,  $T_p \mathcal{F}$  contém o join  $J(p, \Sigma^{n-i-1}) = \Sigma^{n-i}$ , i.e.,  $p \in \text{Sing}(\mathcal{F}_{n-i})$ .

Falta provar a afirmação de transversalidade. Pela Proposição 1.10, podemos assumir que todas as singularidades de  $\mathcal{F}_{n-i-1}$  contidas em  $U$  têm número de Milnor um. Seja  $p \in \Sigma^{n-i-1} \cap V^i$ . Se para todo  $\Sigma^{n-i}$  contendo  $\Sigma^{n-i-1}$



a interseção de  $V^i$  com  $\Sigma^{n-i}$  não é transversal em  $p$ , então  $T_p V^i \cap T_p \Sigma^{n-i-1} \neq 0$ . Sem perda de generalidade podemos supor que  $\Sigma^{n-i-1} = \{x_0 = \dots = x_i = 0\}$ . Nesta situação a variedade  $V^i$  é definida pela projetivização de  $\{a_{i+1} = \dots = a_n = 0\}$  onde  $\omega = \sum_{i=0}^n a_i dx_i$  é uma 1-forma definindo  $\mathcal{F}$  em coordenadas homogêneas de  $\mathbb{C}^{n+1}$ .

Temos que  $\mathcal{F}_{n-i-1}$  é definida pela 1-forma

$$\sum_{j=i+1}^n a_j(0, \dots, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) dx_j.$$

Se  $v \in T_p V^i$  então um levantamento arbitrário  $\bar{v}$  para  $\mathbb{C}^{n+1}$  satisfaz  $da_j \cdot \bar{v} = 0$  para todo  $i+1 \leq j \leq n$ . Portanto se  $T_p \Sigma^{n-i-1} \cap T_p V^i$  tem dimensão positiva então  $\mu(\mathcal{F}_{n-i-1}, p) > 1$ . Contrariando nossa hipótese. Logo para  $\Sigma^{n-i} \supseteq \Sigma^{n-i-1}$  genérico a interseção de  $V^i$  com  $\Sigma^{n-i}$  ao longo de  $\Sigma^{n-i-1}$  é transversal.

Seja  $p \in \Sigma^{n-i} \setminus \Sigma^{n-i-1}$ . Se  $\Lambda \subset \text{aut}(\mathbb{P}^n)$  é o subgrupo que preserva  $\Sigma^{n-i-1}$  então  $\mathbb{P}^n \setminus \Sigma^{n-i-1}$  é  $\Lambda$ -homogêneo. Segue do teorema de transversalidade (cf. [Kle]) que um genérico  $\Lambda$ -translado  $\Sigma^{n-i} \supseteq \Sigma^{n-i-1}$  intersecta  $V^i$  transversalmente ao longo de  $\Sigma^{n-i} \setminus \Sigma^{n-i-1}$ . ■

**Teorema 2.9** *Se  $\mathcal{F}$  é uma folheação de codimensão um em  $\mathbb{P}^n$  e  $(k, i)$  é um par de números naturais satisfazendo  $2 \leq k \leq n$  e  $1 \leq i \leq k-1$  então*

$$e_i^k(\mathcal{F}) = e_0^{k-i+1}(\mathcal{F}) + e_0^{k-i}(\mathcal{F}).$$

O seguinte corolário segue diretamente do Teorema 2.9.

**Corolário 2.10** *Para números naturais  $s, k, i$  satisfazendo  $s \geq 1, s+2 \leq k \leq n$  e  $2 \leq i \leq k-1$  temos que  $e_i^k(\mathcal{F}) = e_{i-s}^{k-s}(\mathcal{F})$ .*

*Prova.* (do Teorema 2.9). Claramente basta considerar o caso  $k = n$ . Pelo Teorema de Bertini podemos assumir que  $V^i$  é vazio ou suave de dimensão  $i$ .

O teorema segue do Lema 2.8 uma vez mostrado que o fecho de  $V^i$  em  $\mathbb{P}^n$  não intersecta  $\Sigma^{n-i} \cap \text{Sing}(\mathcal{F})$ .

Para  $\Sigma^{n-i} \supset \Sigma^{n-i-1}$  genérico é claro que  $\overline{V^i} \cap (\Sigma^{n-i} \setminus \Sigma^{n-i-1}) \cap \text{Sing}(\mathcal{F}) = \emptyset$ . Podemos tomar  $\Sigma^{n-i}$  transversal a  $V^i$  com o número maximal de singularidades isoladas em  $U$ .

Falta mostrar que  $\overline{V^i} \cap \Sigma^{n-i-1} \cap \text{Sing}(\mathcal{F}) = \emptyset$ . Seja  $\overline{G} : X \rightarrow \mathbb{P}^n$  uma resolução da aplicação racional  $G_{\mathcal{F}}$ , i.e,  $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$  é um compósito de

blow-ups e  $\overline{G}$  é definida através do seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \pi \downarrow & \searrow \overline{G} & \\ \mathbb{P}^n & \xrightarrow{G_{\mathcal{F}}} & \check{\mathbb{P}}^n \end{array}$$

Seja  $\mathcal{I} \subset \mathbb{P}^n \times \check{\mathbb{P}}^n$  a variedade de incidência,  $\mathbb{G}_i(\check{\mathbb{P}}^n)$  a Grassmaniana de  $i$ -planos em  $\check{\mathbb{P}}^n$  e

$$\mathcal{U} = \left\{ (L^i, x, H) \in \mathbb{G}_i(\check{\mathbb{P}}^n) \times \mathbb{P}^n \times \check{\mathbb{P}}^n \mid H \in L^i, x \in \check{L}^i = \bigcap_{H \in L^i} H \right\}.$$

Observe que  $\mathcal{U} \subset \mathbb{G}_i(\check{\mathbb{P}}^n) \times \mathcal{I}$ .

Se  $E \subset X$  é um divisor excepcional, então o conjunto de  $i$ -planos  $L^i \subset \check{\mathbb{P}}^n$  tal que  $\overline{G}^{-1}(L^i) \cap \pi^{-1}(\check{L}^i) \cap E \neq \emptyset$  é dado pela imagem do morfismo  $\sigma$  definido a seguir, onde as setas sem denominação são as correspondentes projeções naturais.

$$\begin{array}{ccccc} & & \sigma & & \\ & & \curvearrowright & & \\ E \times_{\mathcal{I}} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{G}_i(\check{\mathbb{P}}^n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ E & \xrightarrow{\pi \times \overline{G}} & \mathcal{I} & & \end{array}$$

Observe que  $\mathcal{I}$  é  $\text{aut}(\mathbb{P}^n)$ -homogêneo sobre a ação natural e que a seta vertical  $\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{I}$  é um  $\text{aut}(\mathbb{P}^n)$ -equivariante morfismo. O teorema de transversalidade (cf. [Kle]), implica que

$$\dim E \times_{\mathcal{I}} \mathcal{U} = \dim E + \dim \mathcal{U} - \dim \mathcal{I} = \dim \mathbb{G}_i(\check{\mathbb{P}}^n) - 1.$$

Segue que  $\sigma$  não é dominante. Repetindo o argumento para todo divisor excepcional de  $\pi$  obtemos um aberto em  $\mathbb{G}_i(\check{\mathbb{P}}^n)$  com a propriedade desejada. Isto conclui a prova do teorema. ■

### 2.3 Folheações Logarítmicas

Considere a folheação logarítmica  $\mathcal{F}_\lambda$  em  $\mathbb{P}^n$  definida em coordenadas homogêneas de  $\mathbb{C}^{n+1}$  pela 1-forma meromorfa

$$\omega_\lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{dF_i}{F_i}, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$$

onde  $F_i \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  são polinômios homogêneos e  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  números complexos satisfazendo  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \text{gr}(F_i) = 0$ .

Se o divisor  $D = \sum_{i=1}^k D_i$ ,  $D_i = V(F_i)$  possui apenas singularidades do tipo cruzamentos normais e os números complexos  $\lambda_i$  são não nulos então o conjunto singular  $\text{Sing}(\mathcal{F}_\lambda)$  é uma união disjunta  $S \cup R$  onde  $S = \cup_{i \neq j} D_i \cap D_j$  corresponde às singularidades de codimensão dois e  $R$  é um conjunto finito (cf. [CkSoVa, CHKS]). Esta observação segue do fato que, sobre essas hipóteses, o feixe  $\Omega^1(\log D)$  é localmente livre de posto  $n$  (cf. [CHKS], Proposição 3) e a 1-forma racional  $\omega_\lambda$  vista como elemento de  $H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1(\log D))$  não possui zeros em uma vizinhança do suporte de  $D$ . Além disso, sobre essas hipótese, o grau do conjunto singular de dimensão zero é dado pela classe de Chern top do feixe  $\Omega^1(\log D)$ .

Vamos estender a descrição de  $\text{Sing}(\mathcal{F})$  acima. Seja  $\pi : (X, \pi^*D) \rightarrow (\mathbb{P}^n, D)$  uma resolução de  $D$ , i.e.,  $\pi$  é uma composição de blow-ups tal que o suporte de  $\pi^*D$  possui apenas singularidades do tipo cruzamentos normais. Observe que  $\pi^*\omega_\lambda$  pode ser considerada como uma seção global de  $\Omega^1(\log \pi^*D)$ . Para cada componente irredutível  $E$  de  $\pi^*D$  consideremos o resíduo de  $\pi^*\omega_\lambda$  em  $E$

$$\lambda(E) = \lambda(E, \omega_\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \pi^*(\omega_\lambda)$$

onde  $\gamma : S^1 \rightarrow X \setminus |\pi^*D|$  é um caminho naturalmente orientado ao redor de  $E$ . Se  $E$  é a transformada estrita de  $V(F_i)$  então, claramente,  $\lambda(E) = \lambda_i$ . Temos o seguinte lema:

**Lema 2.11** *Para toda componente irredutível  $E \subset X$  do divisor excepcional existem números naturais  $m_1, \dots, m_k$  tal que*

$$\lambda(E) = \sum_{i=1}^k m_i \lambda_i.$$

*Prova.* Seja  $\pi_1 : (X_1, \pi_1^*D) \rightarrow (\mathbb{P}^n, D)$  o primeiro blow-up no processo de resolução de  $D$  com centro  $C_1 \subset D$  e seja  $E_1 = \pi_1^*(C_1)$  o divisor excepcional.

Se  $D_i = V(F_i)$  e  $\tilde{D}_i$  denota a transformada estrita de  $D_i$  então temos

$$\pi_1^*D_i = n_i E_1 + \tilde{D}_i$$

onde  $n_i$  é o número natural definido pela multiplicidade de  $D_i$  ao longo de  $C_1$ . Além disso, sobre um ponto genérico  $p \in E_1$ , seja  $t$  um germe de função

holomorfa parametrizando uma seção transversal a  $E_1$  em  $p$  então

$$\pi_1^*(\omega_\lambda) = \left( \sum_i \lambda_i n_i \right) \frac{dt}{t} + \alpha,$$

para alguma 1-forma holomorfa fechada  $\alpha$ . A prova segue por indução sobre o número de blow-ups necessários para resolver  $D$ . ■

**Definição 2.12** O vetor complexo  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{C}^k$  é dito **não-ressonante** (com respeito a  $\pi$ ) se  $\lambda(E) \neq 0$  para toda componente irredutível  $E$  de  $\pi^*D$ .

No que segue, denotamos por  $c_n(\mathcal{L})$  a classe de Chern top do feixe  $\mathcal{L}$ .

**Lema 2.13** Se  $\lambda$  é não-ressonante então a restrição do conjunto singular de  $\mathcal{F}_\lambda$  ao complemento de  $D$  é um subconjunto algébrico de dimensão zero e grau  $c_n(\Omega_X^1(\log \pi^*D))$ .

*Prova.* Se  $\lambda$  é não-ressonante então a 1-forma  $\pi^*\omega_\lambda$ , vista como seção de  $\Omega_X^1(\log \pi^*D)$ , não possui zeros em uma vizinhança de  $|\pi^*D|$ .

Se existisse uma componente de dimensão positiva em  $\mathcal{F}_\lambda$ , não contida em  $|\pi^*D|$ , então por amplitude do divisor  $\pi^*D$  esta componente deveria intersectar o suporte de  $\pi^*D$ .

Como  $\pi^*D$  tem apenas singularidades do tipo cruzamentos normais o feixe  $\Omega_X^1(\log \pi^*D)$  é localmente livre de posto  $n$ . Segue que o grau da restrição do conjunto singular de  $\mathcal{F}_\lambda$  ao complemento de  $D$  é  $c_n(\Omega_X^1(\log \pi^*D))$ . ■

Seja  $\Sigma^s \subset \mathbb{P}^n$  um subespaço linear genérico de dimensão  $s$  e denote por  $X_s = \pi^{-1}(\Sigma^s)$  e  $D_s = (\pi^*D)|_{X_s}$ . Segue do Teorema de Bertini que  $X_s$  é suave e  $D_s$  é um divisor com apenas singularidades do tipo cruzamentos normais.

**Proposição 2.14** Se  $\lambda$  é não-ressonante então

$$\text{gr}(G_{\mathcal{F}_\lambda}) = c_{n-1}(\Omega_{X_{n-1}}^1(\log D_{n-1}))$$

e para  $1 \leq i \leq n-1$

$$\text{gr}_{n-i}(G_{\mathcal{F}_\lambda}) = c_{i-1}(\Omega_{X_{i-1}}^1(\log D_{i-1})) + c_i(\Omega_{X_i}^1(\log D_i)).$$

*Prova.* Se  $H \subset \mathbb{P}^n$  é um hiperplano genérico, então pela Proposição 1.10,  $G_{\mathcal{F}_\lambda}^{-1}(H)$  coincide com as singularidades isoladas de  $\mathcal{F}_\lambda|_H$  que não são singularidades de  $\mathcal{F}_\lambda$ . Por escolha de  $H$  sobre o complemento da variedade dual de  $D$  podemos supor que essas singularidades estão fora do suporte de  $D$ .

Se  $\pi_{n-1} : X_{n-1} \rightarrow H$  é a restrição de  $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$  a  $X_{n-1}$  então  $\pi_{n-1}$  é a resolução de  $D \cap H$  e, além disso, para toda componente irredutível  $E$ , do divisor excepcional, intersectando  $X_{n-1}$  temos que o resíduo de  $\pi_{n-1}^*(\omega_{\lambda|H})$  ao longo de qualquer componente irredutível de  $E \cap X_{n-1}$  é igual ao resíduo de  $\pi^*\omega_{\lambda}$  ao longo  $E$ . Portanto a 1-forma  $\omega_{\lambda|H}$  é não-ressonante com respeito à  $\pi_{n-1}$ .

Segue do Lema 2.13 que o número de singularidades isoladas de  $\mathcal{F}_{\lambda|H}$  é  $c_{n-1}(\Omega_{X_{n-1}}^1(\log D_{n-1}))$ . Um argumento análogo mostra que

$$e_0^k(\mathcal{F}_{\lambda}) = c_{k-1}(\Omega_{X_{k-1}}^1(\log D_{k-1})).$$

A conclusão da proposição segue do Teorema 2.9. ■

## 2.4

### Folheações com Feixe Tangente Totalmente Decomponível

Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação de codimensão um em  $\mathbb{P}^n$ ,  $n \geq 3$  com feixe tangente totalmente decomponível

$$T\mathcal{F} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(e_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(e_{n-1}).$$

A inclusão  $T\mathcal{F} \hookrightarrow T\mathbb{P}^n$ , define folheações por curvas  $\mathcal{G}_i$  com  $T\mathcal{G}_i = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(e_i)$  e cujas folhas estão contidas nas folhas de  $\mathcal{F}$ . O conjunto dos pontos de tangência entre  $\mathcal{G}_i$  e um hiperplano genérico  $H$ , define uma hipersuperfície  $\text{tang}(\mathcal{G}_i, H) = V(P_i)$  em  $H$  onde  $P_i$  é um polinômio homogêneo em  $n - 1$  variáveis de grau  $\text{gr}(\mathcal{G}_i) = 1 - e_i$  (veja [LnSc]).

Se  $V_1, \dots, V_n$  são hipersuperfícies em  $\mathbb{P}^n$  tal que  $\cap_{i=1}^n V_i$  é um conjunto finito, então denotaremos por  $\mathbf{i}(V_1, \dots, V_n; p)$  a multiplicidade de interseção entre estas em  $p \in \cap_{i=1}^n V_i$ .

**Proposição 2.15** *Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação não-degenerada em  $\mathbb{P}^n$ ,  $n \geq 3$  com feixe tangente  $T\mathcal{F} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(e_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(e_{n-1})$  e  $p$  um ponto isolado em  $G_{\mathcal{F}}^{-1}(H)$ . Então*

$$\mu(\mathcal{F}|_H, p) = \mathbf{i}(\text{tang}(\mathcal{G}_1, H), \dots, \text{tang}(\mathcal{G}_{n-1}, H); p).$$

*Prova.* Seja  $\omega$  1-forma definindo  $\mathcal{F}$  e  $X_i$  campo de vetores tangentes à folheação por curvas  $\mathcal{G}_i$  numa vizinhança de  $p$ , para todo  $i = 1, \dots, n - 1$ . Escolhemos um sistema de coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$  em  $p$  tal que

$$- p = 0, T_p\mathcal{F} = H = \{x_n = 0\};$$

$$- \omega = \sum_{i=1}^n A_i dx_i \text{ e } X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \text{ onde } a_{ij}(0) = \delta_{ij}.$$

Neste caso  $P_i = a_{in}|_H$ . Queremos mostrar que os ideais  $\langle A_1|_H, \dots, A_{n-1}|_H \rangle$  e  $\langle a_{1n}|_H, \dots, a_{n-1n}|_H \rangle$  são iguais no anel local  $\mathcal{O}_{H,p}$ .

Como os campos  $X_1, \dots, X_{n-1}$  geram o feixe tangente  $T\mathcal{F}$  numa vizinhança de  $p$ ,  $\omega$  pode ser escrita na forma  $i_{X_1} \dots i_{X_{n-1}}(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$ . Portanto as coordenadas de  $\omega$  são obtidas (a menos de uma mudança de sinal) tomando os determinantes menores  $(n-1) \times (n-1)$  da matriz  $(a_{ij})_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n-1}$ , ou seja,

$$A_i = \pm \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \widehat{a_{1i}} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & \dots & \widehat{a_{n-1i}} & \dots & a_{n-1n} \end{pmatrix}$$

onde o símbolo  $\widehat{\phantom{x}}$  denota ausência da coluna (ou linha)  $i$ . Logo podemos escrever  $A_i = \alpha_{1i} a_{1n} + \dots + \alpha_{n-1i} a_{n-1n}$ ,  $\forall i = 1, \dots, n-1$ , onde

$$\alpha_{ji} = \pm \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \widehat{a_{1i}} & \dots & a_{1n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \widehat{a_{j1}} & \vdots & \widehat{a_{ji}} & \vdots & \widehat{a_{jn-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & \dots & \widehat{a_{n-1i}} & \dots & a_{n-1n-1} \end{pmatrix}.$$

Como  $a_{ij}(0) = \delta_{ij}$  segue que  $\alpha_{ij}(0) = \delta_{ij}$ , i.e., a matriz  $(\alpha_{ij})_{i,j=1, \dots, n-1}$  é invertível. Isto mostra que  $\langle A_1|_H, \dots, A_{n-1}|_H \rangle = \langle a_{1n}|_H, \dots, a_{n-1n}|_H \rangle$ . ■

O teorema seguinte é baseado em um argumento de D. Cerveau.

Seja  $X_i \in H^0(\mathbb{P}^n, T\mathbb{P}^n \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-e_i))$  campo de vetores tangente à  $\mathcal{G}_i$  e com  $\text{Sing}(X_i) = \text{Sing}(\mathcal{G}_i)$ , para todo  $i = 1, \dots, n-1$ .

**Teorema 2.16** *Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação não-degenerada em  $\mathbb{P}^n$ ,  $n \geq 3$  com feixe tangente  $T\mathcal{F} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(e_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(e_{n-1})$ . Se a dimensão do espaço  $\text{span}\{X_1(p), \dots, X_{n-1}(p)\}$  é pelo menos  $n-2$ , para  $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$  genérico, então*

$$\text{gr}(G_{\mathcal{F}}) = (1 - e_1) \dots (1 - e_{n-1}).$$

*Prova.* Primeiro vamos mostrar que  $G_{\mathcal{F}}^{-1}(H) = \bigcap_{i=1}^{n-1} \text{tang}(\mathcal{G}_i, H)$  para  $H \in \check{\mathbb{P}}^n$  genérico. Seja  $S$  uma componente do conjunto singular de  $\mathcal{F}$  e considere o conjunto

$$\Lambda_S = \{(p, H) \in S \times \check{\mathbb{P}}^n \mid p \in \bigcap_{i=1}^{n-1} \text{tang}(\mathcal{G}_i, H)\}.$$

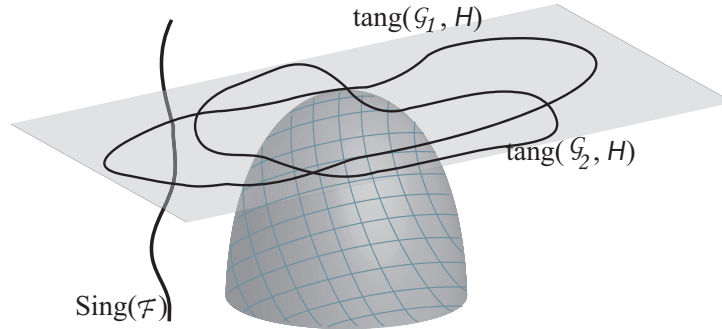


Figura 2.1: Feixe tangente decomponível.

Uma fibra genérica  $\tau_1^{-1}(p)$  da primeira projeção  $\tau_1 : \Lambda_S \longrightarrow S$  é formada pelo conjunto dos hiperplanos  $H \in \check{\mathbb{P}}^n$  tal que  $H$  contém  $\text{span}\{X_1(p), \dots, X_{n-1}(p)\}$  que por hipótese tem dimensão pelo menos  $n - 2$ . Portanto a dimensão de  $\tau_1^{-1}(p)$  é no máximo 1. Logo

$$\dim \Lambda_S = \dim \tau_1^{-1}(p) + \dim S \leq 1 + (n - 2) = n - 1.$$

Segue que a segunda projeção  $\tau_2 : \Lambda_S \longrightarrow \check{\mathbb{P}}^n$  não é dominante, portanto se  $H \in \check{\mathbb{P}}^n \setminus \tau_2(\Lambda_S)$  então  $\bigcap_{i=1}^{n-1} \text{tang}(\mathcal{G}_i, H) \cap S = \emptyset$ . Agora se  $S_1, \dots, S_k$  são todas as componentes do conjunto singular de  $\mathcal{F}$ , basta tomar  $H \in \check{\mathbb{P}}^n \setminus \bigcup_{i=1}^k \tau_2(\Lambda_{S_i})$ . Isto mostra que  $G_{\mathcal{F}}^{-1}(H) = \bigcap_{i=1}^{n-1} \text{tang}(\mathcal{G}_i, H)$  e como  $\mathcal{F}$  é não-degenerada este é um conjunto finito. Logo pelo Teorema de Bezout,  $G_{\mathcal{F}}^{-1}(H)$  possui  $(1 - e_1) \dots (1 - e_{n-1})$  pontos contados com multiplicidades.

Pela Proposição 2.15 temos que

$$i(\text{tang}(\mathcal{G}_1, H), \dots, \text{tang}(\mathcal{G}_{n-1}, H); p) = 1$$

para todo  $p \in \bigcap_{i=1}^{n-1} \text{tang}(\mathcal{G}_i, H)$ . Portanto a cardinalidade do conjunto  $G_{\mathcal{F}}^{-1}(H)$  é  $(1 - e_1) \dots (1 - e_{n-1})$ . ■

**Proposição 2.17** *Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação não-degenerada em  $\mathbb{P}^3$  com feixe tangente  $T\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(e_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(e_2)$ ,  $D := \text{Sing}(\mathcal{G}_1) \cap \text{Sing}(\mathcal{G}_2)$  e  $H \in \check{\mathbb{P}}^3$  genérico.*

Então

$$\text{gr}(G_{\mathcal{F}}) = (1 - e_1)(1 - e_2) - \sum_{p \in H \cap D} \mathbf{i}(\text{tang}(\mathcal{G}_1, H), \text{tang}(\mathcal{G}_2, H); p).$$

*Prova.* Se  $S$  é uma componente de  $\text{Sing}(\mathcal{F})$  que não está contida em  $D$ , então a dimensão de  $\text{span}\{X_1(p), X_2(p)\}$  é pelo menos 1 para  $p \in S$  genérico. Logo utilizando o mesmo argumento da prova do Teorema 2.16 obtemos  $S \cap \text{tang}(\mathcal{G}_1, H) \cap \text{tang}(\mathcal{G}_2, H)$  é vazio. Portanto

$$\text{tang}(\mathcal{G}_1, H) \cap \text{tang}(\mathcal{G}_2, H) = (D \cap H) \cup G_{\mathcal{F}}^{-1}(H).$$

■

**Exemplo 2.18** Considere a folheação de grau 3 em  $\mathbb{P}^3$  definida em coordenadas homogêneas pela 1-forma  $\omega = i_R i_X i_Y (dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)$  onde

$$\begin{aligned} R &= x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}, \\ X &= x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ Y &= x_0^2 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2(x_0 + x_1) \frac{\partial}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Temos que  $[X, Y] = Y$  e  $D := \text{Sing}(X) \cap \text{Sing}(Y) = (x_0 = x_1 = 0)$ . Os campos de vetores  $X, Y$  definem folheações por curvas  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  respectivamente, com

$$T\mathcal{G}_1 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}, \quad T\mathcal{G}_2 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \quad \text{e} \quad T\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1).$$

Seja  $H \in \check{\mathbb{P}}^3$  genérico e  $p \in H \cap D$ . Além disso, é possível mostrar que  $\mathcal{F}$  é não-degenerada. Portanto segue da Proposição 2.17 que

$$1 \leq \text{gr}(G_{\mathcal{F}}) = 2 - \mathbf{i}(\text{tang}(\mathcal{G}_1, H), \text{tang}(\mathcal{G}_2, H); p) \leq 1,$$

ou seja,

$$\text{gr}(G_{\mathcal{F}}) = 1.$$

Seja  $\omega$  germe de 1-forma holomorfa em  $(\mathbb{C}^n, p)$ . Dizemos que  $\omega$  depende de  $1 \leq k < n$  variáveis se existe um sistema de coordenadas em  $p$  tal que  $\omega = \sum_{i=1}^k a_i(x_1, \dots, x_k) dx_i$ . O **posto** de  $\omega$  em  $p$ , denotamos  $\text{posto}_p(\omega)$ , é definido como o número mínimo de variáveis que podemos escrever  $\omega$ .

Seja  $\mathcal{F}$  um germe de folheação de codimensão um em  $(\mathbb{C}^n, p)$ . Se existir um sistema de coordenadas em  $p$  tal que  $\mathcal{F}$  pode ser representada por uma



1-forma  $\omega$  com posto $_p(\omega) = k < n$ , diremos que  $\mathcal{F}$  é equivalente a um **produto local em  $p$**  de uma folheação de codimensão um em  $(\mathbb{C}^k, 0)$  por uma folheação regular de codimensão  $k$ .

**Corolário 2.19** *Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação não-degenerada em  $\mathbb{P}^n$ ,  $n \geq 3$  com feixe tangente  $T\mathcal{F} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(e_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(e_{n-1})$ . Se  $\mathcal{F}$  é equivalente a um produto local em  $p$  de uma folheação em  $\mathbb{C}^2$  por uma folheação regular de codimensão 2, para  $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$  genérico, então*

$$\text{gr}(G_{\mathcal{F}}) = (1 - e_1) \dots (1 - e_{n-1}).$$

*Prova.* Seja  $q \rightarrow \text{span}\{V_1(q), \dots, V_{n-2}(q)\}$  um campo de planos tangente à folheação regular de codimensão 2. Então temos

$$V_i(q) \in \text{span}\{X_1(q), \dots, X_{n-1}(q)\}, \quad \forall q \in \mathbb{P}^n \setminus \text{Sing}(\mathcal{F}).$$

Considere  $q_k \in \mathbb{P}^n \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$  uma sequência de pontos convergindo para  $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ . Segue que  $V_i(q_k) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{ij}(q_k) X_j(q_k)$  onde  $\alpha_{ij} \in \mathcal{O}(U \setminus \text{Sing}(\mathcal{F}))$  e  $U$  vizinhança de  $p$ . Como  $\text{cod}(\text{Sing}(\mathcal{F})) \geq 2$ , as funções  $\alpha_{ij}$  se estendem para todo  $U$ . Tomando limite quando  $k \rightarrow \infty$  obtemos que  $\{X_1(p), \dots, X_{n-1}(p)\}$  é um conjunto de geradores para  $\text{span}\{V_1(p), \dots, V_{n-2}(p)\}$ . Portanto  $\dim(\text{span}\{X_1(p), \dots, X_{n-1}(p)\}) \geq n - 2$ .  $\blacksquare$

**Observação 2.20** *Seja  $\mathcal{F}$  um germe de folheação de codimensão um em  $(\mathbb{C}^n, p)$  representada por uma 1-forma  $\omega$ . Se existe um campo de  $(n - k)$ -planos integrável e tangente à  $\mathcal{F}$ , então  $\mathcal{F}$  é equivalente a um produto local de uma folheação de codimensão um em  $(\mathbb{C}^r, 0)$  por uma folheação regular de codimensão  $r$ , para algum  $1 \leq r \leq k$ . Reciprocamente, se  $\mathcal{F}$  é equivalente a um produto local de uma folheação de codimensão um em  $(\mathbb{C}^r, 0)$  por uma folheação regular de codimensão  $r$ , então existe um campo de  $(n - r)$ -planos integrável tangente à  $\mathcal{F}$ .*

*Prova.* Considere um sistema de coordenadas em  $p = 0$  tal que o campo de planos é dado por  $q \rightarrow \text{span}\{\frac{\partial}{\partial x_{k+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ . Por hipótese  $i_{\frac{\partial}{\partial x_j}}(\omega) = 0$ ,  $\forall j = k + 1, \dots, n$ . Da condição de integrabilidade de  $\mathcal{F}$  obtemos

$$0 = i_{\frac{\partial}{\partial x_j}}(\omega \wedge d\omega) = i_{\frac{\partial}{\partial x_j}}(\omega) \cdot d\omega - \omega \wedge i_{\frac{\partial}{\partial x_j}}(d\omega) = -\omega \wedge i_{\frac{\partial}{\partial x_j}}(d\omega).$$

Segue da igualdade acima e do fato que  $\text{codim}(\text{Sing}(\omega)) \geq 2$  que existe  $g \in \mathcal{O}_p$  tal que  $i_{\frac{\partial}{\partial x_j}}(d\omega) = g \cdot \omega$ .

Fixamos  $j \in \{k+1, \dots, n\}$ . Tomando a derivada de Lie na direção de  $\frac{\partial}{\partial x_j}$ , obtemos

$$L_{\frac{\partial}{\partial x_j}}(\omega) = i_{\frac{\partial}{\partial x_j}}(d\omega) + d(i_{\frac{\partial}{\partial x_j}}(\omega)) = i_{\frac{\partial}{\partial x_j}}(d\omega) = g.\omega.$$

Segue que os coeficientes de  $\omega$  satisfazem a seguinte equação diferencial

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = g.a_i, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Portanto para todo  $i = 1, \dots, n$  existe  $b_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in \mathcal{O}_p$  tal que

$$a_i = h.b_i, \quad \text{onde} \quad h = \exp\left(\int_0^{x_j} g(x_1, \dots, x_{j-1}, s, x_{j+1}, \dots, x_n) ds\right).$$

Como  $h(0) = 1$ , a 1-forma  $\sum_{i=1}^n b_i dx_i$  representa  $\mathcal{F}$ . O resultado segue do fato que  $a_j = i_{\frac{\partial}{\partial x_j}}(\omega) = 0$ .

Para a segunda parte da observação basta tomar o campo de planos tangente a folheação regular de codimensão  $r$ . ■

Dizemos que  $p$  é uma **singularidade do tipo Kupka** da folheação  $\mathcal{F}$  definida pela 1-forma  $\omega$  se  $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$  e  $d\omega(p) \neq 0$ . Neste caso,  $\mathcal{F}$  é equivalente a um produto local em  $p$  de uma folheação em  $\mathbb{C}^2$  por uma folheação regular de codimensão 2 (cf.: [K]). Se  $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$  é uma singularidade do tipo Kupka ou uma singularidade isolada de  $d\omega$  então dizemos que  $p$  é do tipo Kupka generalizada (veja [CCGL]).

**Observação 2.21** Se  $\mathcal{F}$  tem feixe tangente totalmente decomponível e tem somente singularidades do tipo Kupka generalizada então  $\mathcal{F}$  satisfaz as hipóteses do Corolário 2.19.

**Exemplo 2.22** Seja  $k$  um número natural, considere a folheação  $\mathcal{F}_k$  em  $\mathbb{C}^3$  definida por  $i_{Si_X}(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)$  onde

$$\begin{aligned} S &= (k^2 + k + 1)x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + (k + 1)x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \\ X &= (k^2 + k + 1)x_2^k \frac{\partial}{\partial x_1} + (k + 1)x_3^k \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Esta se estende a uma folheação  $\overline{\mathcal{F}}_k$  em  $\mathbb{P}^3$  definida em coordenadas homogêneas pela 1-forma

$$\begin{aligned} \omega &= (k + 1)X_3(X_1X_3^k - X_2^{k+1}) dX_0 + (k^2 + k + 1)X_3(X_2X_1^k - X_0X_3^k) dX_1 \\ &+ (k + 1)(k^2 + k + 1)X_3(X_0X_2^k - X_1^{k+1}) dX_2 + \left(k(k^2 + k + 1)X_2X_1^{k+1} \right. \\ &\left. + k^2X_0X_1X_3^k - (k^2 + k)(k + 1)X_0X_2^{k+1}\right) dX_3. \end{aligned}$$

Calculando a diferencial do levantamento  $\hat{G}$  da aplicação de Gauss de  $\overline{\mathcal{F}}_k$  para  $\mathbb{C}^{n+1}$  no ponto  $p = (x_0, x_1, x_2, 1)$  obtemos

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta & -\beta^2 x_2^2 & \beta x_1(\beta x_1 - x_2^{k+1}) \\ -\alpha & k\alpha x_2 x_1^{k-1} & \alpha x_1^k & -\alpha(\beta x_0 - x_2 x_1^k) \\ \alpha\beta x_2^k & -\alpha\beta^2 x_1^k & k\beta\alpha x_0 x_2^{k-1} & \alpha\beta(x_1^{k+1} - x_0 x_2^k) \\ k(x_1^k - (k+\alpha)x_2^{k+1}) & k((k^3 + 2\alpha - 1)x_2 x_1^k + x_0^k) & k(\alpha x_1^{k+1} - \gamma x_0 x_2^k) & k^3 x_0 x_1 \end{pmatrix}.$$

onde  $\alpha = k^2 + k + 1$ ,  $\beta = k + 1$  e  $\gamma = (k^3 + 3\alpha - 2)$ . Daí segue que

$$\det(d\hat{G}(0, 1, 0, 1)) = -k\alpha^2\beta^2(\alpha + 1)(\beta^2 + 1) \neq 0.$$

Portanto  $\overline{\mathcal{F}}_k$  é não-degenerada. Além disso, as singularidades de  $\overline{\mathcal{F}}_k$  são do tipo Kupka generalizada e  $T\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1 - k)$  (cf.: [CCGL]). Logo, pelo Corolário 2.19 temos que

$$\text{gr}(G_{\overline{\mathcal{F}}_k}) = k.$$

### 3

## Transformações Polares

### 3.1

#### Introdução

Dado um polinômio homogêneo  $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ , associamos a aplicação racional

$$\begin{aligned} \nabla F : \mathbb{P}^n &\dashrightarrow \mathbb{P}^n \\ x &\mapsto (F_0(x) : \dots : F_n(x)) \end{aligned}$$

onde  $F_i$  denota a derivada parcial de  $F$  em relação a  $x_i$ . Esta aplicação é chamada **transformação polar** de  $F$ .

Um caso particularmente interessante é quando  $\nabla F$  é birracional (cf. [ES, EKP, CiRS]) neste caso dizemos que  $F$  é um polinômio **homaloidal**.

A classificação de polinômios (reduzidos) homaloidais em três variáveis foi obtida por Igor V. Dolgachev :

**Teorema 3.1** *[Do] Seja  $F$  um polinômio homaloidal em três variáveis sem fatores múltiplos. Então a menos de uma mudança linear de variáveis,  $V(F) \subset \mathbb{P}^2$  é uma das seguintes curvas:*

1. *Uma cônica suave;*
2. *Uma união de três retas em posição geral;*
3. *A união de uma cônica e uma reta tangente à esta.*

Nesse mesmo trabalho Dolgachev conjecturou que o grau da transformação polar de  $F$  depende apenas do conjunto de zeros  $V(F)$ . Neste caso, não é mais necessário a condição de  $F$  ser um polinômio reduzido no Teorema 3.1.

A. Dimca e S. Papadima deram uma resposta positiva a essa conjectura. Eles mostraram que o grau de  $\nabla F$  depende somente da topologia do complemento de  $V(F)$  em  $\mathbb{P}^n$ :

**Teorema 3.2** [DiPa] *O complemento  $D(F) = \mathbb{P}^n \setminus V(F)$  é homotopicamente equivalente a um CW-complexo obtido de  $D(F) \cap H$  anexando  $\text{gr}(\nabla F)$  células de dimensão  $n$ , onde  $H$  é um hiperplano genérico em  $\mathbb{P}^n$ . Em particular, temos*

$$\text{gr}(\nabla F) = (-1)^n \chi(D(F) \setminus H).$$

Este resultado foi obtido utilizando métodos topológicos baseando-se em teoria de Morse complexa. O problema de obter uma prova álgebro-geométrica da conjectura de Dolgachev foi proposto em [Di] e [CiRS]. O objetivo deste capítulo é obter tal prova álgebro-geométrica (Teorema 3.5). Respostas parciais a este problema foram obtidas em [KS] e [B].

### 3.2

#### Transformações Polares $\times$ Folheações Logarítmicas

Considere a função multivaluada

$$\mathbb{F}^\lambda = \prod_{i=1}^k F_i^{\lambda_i} : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^1$$

onde  $F_i \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  é um polinômio homogêneo de grau  $d_i$  e  $\lambda_i \in \mathbb{C}^*$ .

A função  $\mathbb{F}^\lambda$  é homogênea de grau  $\text{gr}(\mathbb{F}^\lambda) = \sum_{i=1}^k \lambda_i d_i$ . Apesar de  $\mathbb{F}^\lambda$  não ser uma função algébrica, ainda é possível definir a transformação polar associada

$$\begin{aligned} \nabla \mathbb{F}^\lambda : \mathbb{P}^n &\dashrightarrow \mathbb{P}^n \\ x &\rightarrow \left[ \frac{\mathbb{F}_0^\lambda(x)}{\mathbb{F}^\lambda(x)} : \dots : \frac{\mathbb{F}_n^\lambda(x)}{\mathbb{F}^\lambda(x)} \right] \end{aligned}$$

onde  $\mathbb{F}_i^\lambda$  denota a derivada parcial de  $\mathbb{F}^\lambda$  em relação a  $x_i$ . Quando todos os  $\lambda_i$ 's são números naturais esta aplicação coincide com a transformação polar definida no início do capítulo.

Se  $\text{gr}(\mathbb{F}^\lambda) = 0$  então a derivada logarítmica de  $\mathbb{F}^\lambda$  define uma folheação logarítmica em  $\mathbb{P}^n$  e a transformação polar  $\nabla \mathbb{F}^\lambda$  coincide com a aplicação de Gauss dessa folheação. Portanto de agora em diante vamos supor que  $\text{gr}(\mathbb{F}^\lambda) \neq 0$ .

Considere a folheação em  $\mathbb{C}^{n+1}$  definida pela 1-forma

$$\left( \prod_{i=1}^k F_i \right) \frac{d\mathbb{F}^\lambda}{\mathbb{F}^\lambda} = \left( \prod_{i=1}^k F_i \right) \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{dF_i}{F_i}.$$

Observe que todas as singularidades desta folheação estão contidas em  $V(\prod F_i)$  já que pela fórmula de Euler temos

$$i_R \left( \prod_{i=1}^k F_i \right) \frac{d\mathbb{F}^\lambda}{\mathbb{F}^\lambda} = \text{gr}(\mathbb{F}^\lambda) \left( \prod F_i \right).$$

Esta folheação em  $\mathbb{C}^{n+1}$  se estende naturalmente a uma folheação de  $\mathbb{P}^{n+1}$ . Se consideramos  $F_1, \dots, F_k$  como polinômios em  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}]$ ,  $F_{k+1} = x_{n+1}$  e  $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_n, -\text{gr}(\mathbb{F}^\lambda))$  então esta coincide com a folheação  $\mathcal{F}_{\bar{\lambda}}$  da seção 2.3 definida pela 1-forma logarítmica

$$\omega_{\bar{\lambda}} = \frac{d\mathbb{F}^\lambda}{\mathbb{F}^\lambda} - \text{gr}(\mathbb{F}^\lambda) \frac{dx_{n+1}}{x_{n+1}}.$$

**Teorema 3.3** *Se o grau de  $\mathbb{F}^\lambda$  é não nulo então para  $i = 0, \dots, n-1$ ,*

$$\text{gr}_i(G_{\mathcal{F}_{\bar{\lambda}}}) = \text{gr}_i(\nabla\mathbb{F}^\lambda) + \text{gr}_{i-1}(\nabla\mathbb{F}^\lambda),$$

onde estamos assumindo que  $\text{gr}_{-1}(\nabla\mathbb{F}^\lambda) = 0$ .

*Prova.* Se colocamos  $\hat{F}_j = \prod_{i \neq j, i=1}^k F_i$  então a aplicação de Gauss da folheação  $\mathcal{F}_{\bar{\lambda}}$  no ponto  $[x_0 : \dots : x_{n+1}]$  pode ser escrita como

$$\left[ x_{n+1} \left( \sum_{j=1}^k \lambda_j \hat{F}_j \frac{\partial F_j}{\partial x_0} \right) : \dots : x_{n+1} \left( \sum_{j=1}^k \lambda_j \hat{F}_j \frac{\partial F_j}{\partial x_n} \right) : -\text{gr}(\mathbb{F}^\lambda) \left( \prod_{j=1}^k F_j \right) \right].$$

Portanto se  $p = [0 : \dots : 0 : 1]$  e  $\pi : \text{Bl}_p(\mathbb{P}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{P}^{n+1}$  denota o blow-up de  $\mathbb{P}^{n+1}$  em  $p$  então a restrição de  $G = G_{\mathcal{F}_{\bar{\lambda}}} \circ \pi$  ao divisor excepcional  $E \cong \mathbb{P}^n$  pode ser identificada com  $\nabla\mathbb{F}^\lambda$ , bem como o contradomínio de  $\nabla\mathbb{F}^\lambda$  com o conjunto  $\mathbb{P}_p^n \subset \check{\mathbb{P}}^{n+1}$  de hiperplanos que passam por  $p$ .

Considere a projeção  $\rho([x_0 : \dots : x_n : x_{n+1}]) = [x_0 : \dots : x_n]$  com centro em  $p$  e  $\tilde{\rho} = \rho \circ \pi : \text{Bl}_p(\mathbb{P}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{P}^n$ . Se escrevemos

$$\nabla\mathbb{F}^\lambda(x) = \left[ \sum_{j=1}^k \lambda_j \hat{F}_j \frac{\partial F_j}{\partial x_0} : \dots : \sum_{j=1}^k \lambda_j \hat{F}_j \frac{\partial F_j}{\partial x_n} \right],$$

então temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Bl}_p(\mathbb{P}^{n+1}) & \xrightarrow{\quad G \quad} & \mathbb{P}^{n+1} \\ \tilde{\rho} \downarrow & & \downarrow \rho \\ \mathbb{P}^n & \xrightarrow{\quad \nabla\mathbb{F}^\lambda \quad} & \mathbb{P}^n \end{array}$$

Seja  $L^i \subset \mathbb{P}^{n+1}$  um subespaço linear genérico de dimensão  $i$  e

$$W^i = \overline{G_{\mathcal{F}_\lambda}^{-1}(L^i)}, \quad \widetilde{W}^i = \overline{G^{-1}(L^i)} \text{ e } V^i = \overline{(\nabla \mathbb{F}^\lambda)^{-1}(\rho(L^i))}.$$

Se  $U \subset \mathbb{P}^n$  é o complemento da hipersuperfície  $V(\prod F_j)$  então ([Pi], Lemma) implica que  $V^i \cap U$  e  $\widetilde{W}^i \cap \widetilde{\rho}^{-1}(U)$  são densos em  $V^i$  e  $\widetilde{W}^i$ .

Segue do diagrama acima que  $\widetilde{\rho}(\widetilde{W}^i) \subset V^i$ . Um simples cálculo mostra que a restrição de  $G$  a fibra de  $\widetilde{\rho}$  sobre  $U$  induz um isomorfismo a correspondente fibra de  $\rho$ . Combinando isto com a densidade de  $V^i \cap U$  e  $\widetilde{W}^i \cap \widetilde{\rho}^{-1}(U)$  em  $V^i$  e  $\widetilde{W}^i$  respectivamente podemos concluir que o  $i$ -ciclo  $\widetilde{\rho}_* \widetilde{W}^i$  coincide com o  $i$ -ciclo  $V^i$ .

O  $i$ -ésimo grau da aplicação de Gauss  $\mathcal{F}_\lambda$  pode ser expresso como

$$\text{gr}_i(G_{\mathcal{F}_\lambda}) = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(1))^i \cdot W^i.$$

Se  $\widetilde{W}^i = \overline{G^{-1}(L^i)}$ ,  $H$  denota um hiperplano genérico contendo  $p$  e  $\widetilde{H}$  é sua transformada estrita então, pela fórmula da projeção,

$$\begin{aligned} \text{gr}_i(G_{\mathcal{F}_\lambda}) &= c_1(\pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(1))^i \cdot \widetilde{W}^i \\ &= c_1(\widetilde{\rho}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))^i \cdot \widetilde{W}^i + \left( \sum_{j=1}^i \binom{i}{j} \widetilde{H}^{i-j} \cdot E^j \right) \cdot \widetilde{W}^i \\ &= c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))^i \cdot \widetilde{\rho}(\widetilde{W}^i) + \left( \left( \sum_{j=1}^i \binom{i}{j} \widetilde{H}^{i-j} \cdot E^{j-1} \right) \cap E \right) \cdot (\widetilde{W}^i \cap E) \\ &= c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))^i \cdot V^i + c_1(\mathcal{O}_E(1))^{i-1} \cdot (\widetilde{W}^i \cap E). \end{aligned}$$

Claramente temos que  $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))^i \cdot V^i$  é igual a  $\text{gr}_i(\nabla \mathbb{F}^\lambda)$ . Por outro lado  $c_1(\mathcal{O}_E(1))^{i-1} \cdot (\widetilde{W}^i \cap E) = \text{gr}_{i-1}(\nabla \mathbb{F}^\lambda)$ . Sendo que para  $L^i$  genérico,  $\widetilde{W}^i \cap E$  é igual a  $\overline{G_{|E}^{-1}(L^i \cap \mathbb{P}_p^n)}$  como  $(i-1)$ -ciclo sobre  $E$ . O teorema segue. ■

**Corolário 3.4** *Se o grau de  $\mathbb{F}^\lambda$  é não nulo então*

$$\text{gr}_i(\nabla \mathbb{F}^\lambda) = e_0^{n+1-i}(\mathcal{F}_\lambda).$$

para  $i = 0, \dots, n-1$ .

*Prova.* O resultado segue comparando os Teoremas 2.9 e 3.3. ■

### 3.3

#### Invariância do Grau da Transformação Polar

**Teorema 3.5** *Seja  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  um elemento de  $\mathbb{C}^k$  tal que  $\mathfrak{H}(\lambda_j) > 0$  para alguma aplicação  $\mathbb{R}$ -linear  $\mathfrak{H} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  para todo  $j = 1, \dots, k$ . Sejam  $F_1, \dots, F_k$  polinômios homogêneos irreduzíveis em  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ . Se  $\mathbb{F}^\lambda = \prod F_j^{\lambda_j}$  então*

$$\text{gr}_i(\nabla \mathbb{F}^\lambda) = \text{gr}_i\left(\nabla\left(\prod F_j\right)\right)$$

para todo  $i = 0, \dots, n - 1$ .

*Prova.* Seja  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\bar{\lambda}}$  a folheação em  $\mathbb{P}^{n+1}$  associada a  $\mathbb{F}^\lambda$ . Pelo Corolário 3.4 temos que  $\text{gr}_i(\nabla \mathbb{F}^\lambda)$  coincide com o grau da aplicação de Gauss de  $\mathcal{F}|_{\mathbb{P}^{n+1-i}}$  para um  $\mathbb{P}^{n+1-i} \subset \mathbb{P}^{n+1}$  genérico.

Se  $D$  é o divisor de  $\mathbb{P}^n$  associado a  $\prod F_j$  então a interseção em  $\mathbb{P}^{n+1}$  de  $V(x_{n+1}(\prod F_j))$  e um genérico  $\mathbb{P}^{n-i}$  é isomorfo a união da interseção de  $|D|$  com um genérico  $\mathbb{P}^{n-i} \subset \mathbb{P}^n$  e um genérico hiperplano  $H$  em  $\mathbb{P}^{n-i}$ .

Se  $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^{n-i}$  é uma resolução de  $|D| \cap \mathbb{P}^{n-i}$  então pelo Teorema de Bertini temos que esta também é uma resolução de  $|D| \cap \mathbb{P}^{n-i}$  com um genérico  $H$ . Portanto o resíduo de  $H$ ,  $\lambda(H) = -\text{gr}(\mathbb{F}^\lambda)$ , não influencia no cálculo dos resíduos  $\lambda(E)$  para uma componente irreduzível  $E$  do divisor excepcional de  $\pi$ , já que nenhuma das transformadas estritas de  $H$  contém centros a serem explodidos no processo de resolução. Logo a hipótese sobre  $\lambda$  junto com o Lema 2.11 implicam que  $\bar{\lambda}$  é não-ressonante com respeito a  $\pi$ . Segue da Proposição 2.14 que

$$\text{gr}(G_{\mathcal{F}|_{\mathbb{P}^{n+1-i}}}) = c_{n-i}(\Omega_X^1(\log \pi^{-1}(D \cap \mathbb{P}^{n-i} + H))).$$

Sendo que um argumento análogo mostra que a mesma fórmula vale para a folheação associada a  $\mathbb{F} = \prod F_j$  então o teorema segue. ■

Claramente a hipótese sobre  $\lambda \in \mathbb{C}^k$  pode ser enfraquecida. O Lema 2.11 nos dá que existem um número finito de subespaços lineares contidos em  $\mathbb{C}^k$  definidos por equações com coeficientes em  $\mathbb{N}$  tal que fora destes o grau de  $\nabla \mathbb{F}^\lambda$  é constante.

**Corolário 3.6** *Sejam  $F_1, F_2 \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  polinômios homogêneos. Se  $F_1$  e  $F_2$  são relativamente primos então*

$$\text{gr}_i(\nabla F_1 \cdot F_2) \geq \max\{\text{gr}_i(\nabla F_1), \text{gr}_i(\nabla F_2)\}$$

para todo  $i = 0, \dots, n - 1$ .



*Prova.* Seja  $\mathcal{F}_1$  a folheação de  $\mathbb{P}^{n+1}$  associada a  $F_1$  e  $\mathcal{F}_{12}$  associado a  $F_1F_2$ . Estas são, respectivamente, induzidas pelas 1-formas racionais em  $\mathbb{P}^{n+1}$

$$\omega_1 = \frac{dF_1}{F_1} - \text{gr}(F_1) \frac{dx_{n+1}}{x_{n+1}} \quad \text{e} \quad \omega_{12} = \frac{dF_1}{F_1} + \frac{dF_2}{F_2} - (\text{gr}(F_1) + \text{gr}(F_2)) \frac{dx_{n+1}}{x_{n+1}}.$$

Seja  $H \subset \check{\mathbb{P}}^{n+1}$  um hiperplano genérico e  $\iota : H \rightarrow \mathbb{P}^{n+1}$  a inclusão. Temos que  $G_{\mathcal{F}_1}^{-1}(H)$  consiste de  $\text{gr}(G_{\mathcal{F}_1})$  pontos isolados correspondendo as singularidades de  $\iota^*\omega_1$  contidas em  $H \setminus V(F_1)$ . Segue da prova do Teorema 3.5 que podemos assumir que  $\iota^*\omega_{12}$  é não-ressonante (com respeito a certa resolução).

Se  $H$ , visto como ponto de  $\check{\mathbb{P}}^{n+1}$ , evita o fecho da imagem de  $V(F_2)$  sobre  $G_{\mathcal{F}_1}$  então as singularidades de  $\iota^*\omega_1$  contidas no complemento de  $V(F_1)$  estão contidas também no complemento de  $V(F_1F_2)$ . Segue que para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno a 1-forma  $\iota^*(\omega_1 + \epsilon\omega_{12})$  tem pelo menos  $\text{gr}(G_{\mathcal{F}_1})$  singularidades contidas no complemento de  $V(F_1F_2)$ . Sendo que podemos escolher  $\epsilon$  de forma que  $\iota^*(\omega_1 + \epsilon\omega_{12})$  é não-ressonante, a folheação induzida tem aplicação de Gauss com grau igual ao da aplicação de Gauss de  $\mathcal{F}_{12}$ .

Segue do Teorema 3.5 que  $\text{gr}(\nabla F_1F_2) \geq \text{gr}(\nabla F_1)$ . Com um argumento análogo para  $F_2$  e também para seções lineares de dimensão mais alta o corolário segue. ■

O corolário acima *essencialmente* reduz o problema da classificação de polinômios homaloidais para classificação de polinômios homaloidais irredutíveis. Apesar disso, acreditamos não ser possível uma generalização da classificação de Dolgachev em dimensão alta, pois já existem exemplos em  $\mathbb{P}^3$  de polinômios homaloidais irredutíveis de grau arbitrário, cf. [CiRS].

A seguinte proposição caracteriza todas as transformações polares homaloidais associadas a um produto de retas com pesos complexos.

**Proposição 3.7** *Sejam  $F_1, \dots, F_{k+1} \in \mathbb{C}[x, y, z]$  formas lineares e  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}) \in (\mathbb{C}^*)^{k+1}$ . Então a transformação polar  $\nabla \mathbb{F}^\lambda$  associada a  $\mathbb{F}^\lambda = \prod F_j^{\lambda_j}$  é birracional se, e somente se, a menos de uma reordenação nos índices,  $F_1, \dots, F_k \in \mathbb{C}[x, y]$ ,  $F_{k+1} \notin \mathbb{C}[x, y]$  e  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ .*

*Prova.* Primeiramente supomos que  $F_j \in \mathbb{C}[x, y]$ , para todo  $j = 1, \dots, k$ ,  $F_{k+1} \notin \mathbb{C}[x, y]$  e  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ . Se  $F_{k+2}$  é uma forma linear genérica e  $\lambda_{k+2} = -\sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j = -\lambda_{k+1}$  então a prova do Teorema 3.5 mostra que o grau de  $\nabla \mathbb{F}^\lambda$  é igual o número de singularidades da folheação  $\mathcal{F}$  em  $\mathbb{P}^2$  induzida

pela 1-forma

$$\left( \prod_{j=1}^{k+2} F_j \right) \sum_{j=1}^{k+2} \lambda_j \frac{dF_j}{F_j} \quad (3-1)$$

fora de  $V\left(\prod_{j=1}^{k+2} F_j\right)$ .

Observe que  $\mathcal{F}$  tem grau  $k$  e que

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} \mu(\mathcal{F}, p) = k^2 + k + 1.$$

Sobre  $V\left(\prod_{j=1}^{k+2} F_j\right)$  temos  $2k + 2$  singularidades. Onde uma destas, que coincide com a interseção das  $k$  primeiras retas, possui multiplicidade  $k^2 - k - 1$  que pode ser calculada utilizando a fórmula de Van den Essen (cf. [Van]). As  $k + 1$  singularidades restantes possuem multiplicidade 1 já que consiste na interseção de apenas duas destas retas. Somando todas estas multiplicidades obtemos  $k^2 + k$ . Portanto  $\text{gr}(\nabla \mathbb{F}^\lambda) = 1$ . Isto prova a condição de suficiência.

Suponhamos agora que  $\text{gr}(\nabla \mathbb{F}^\lambda) = 1$ . Seja  $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ , a menos de uma reordenação dos índices, podemos supor que  $p \in \cap_{j=1}^s V(F_j)$ . Denotamos por  $\mathcal{F}'$  a folheação definida pela 1-forma (3-1) quando a forma linear  $F_{k+2}$  contém  $p$  e continuamos denotando por  $\mathcal{F}$  quando a forma linear é genérica. Como  $\mathcal{F}$  é uma perturbação de  $\mathcal{F}'$  segue que existe uma vizinhança suficientemente pequena  $U$  de  $p$  tal que

$$\mu(\mathcal{F}, p) + s + \sum_{q \in A} \mu(\mathcal{F}, q) = \mu(\mathcal{F}', p) \quad (3-2)$$

onde  $A = (U \cap \text{Sing}(\mathcal{F})) \setminus V(F_{k+2} \prod_{j=1}^s F_j)$ .

Afirmamos que se  $\sum_{j=1}^s \lambda_j \neq 0$  então  $s = 2$ . Segue da fórmula de Van den Essen que  $\mu(\mathcal{F}, p) = (s - 1)^2$ . Além disso,

$$\mu(\mathcal{F}', p) = s^2 + s - 1, \text{ se } \sum_{j=1}^s \lambda_j + \lambda_{k+2} = 0 \quad (3-3)$$

e

$$\mu(\mathcal{F}', p) = s^2, \text{ se } \sum_{j=1}^s \lambda_j + \lambda_{k+2} \neq 0. \quad (3-4)$$

Observe que  $\text{gr}(\nabla \mathbb{F}^\lambda) \geq \sum_{q \in A} \mu(\mathcal{F}, q)$ , logo se  $s \geq 3$  segue de (3-2), (3-3) e (3-4) que  $\text{gr}(\nabla \mathbb{F}^\lambda) \geq 2$ . Isto mostra que  $s = 2$  no caso que  $\sum_{j=1}^s \lambda_j \neq 0$ .

Vamos mostrar que existe um único  $p$  tal que  $\sum_{j=1}^s \lambda_j = 0$ . Se  $\sum_{j=1}^s \lambda_j =$

0 então  $\sum_{j=1}^s \lambda_j + \lambda_{k+2} \neq 0$ , segue que  $\mu(\mathcal{F}', p) = s^2$ . Por outro lado,  $\mu(\mathcal{F}, p) = s^2 - s - 1$ . Portanto por (3-2) obtemos  $\sum_{q \in A} \mu(\mathcal{F}, q) \geq 1$ . Portanto se existisse outro ponto  $p$  com esta mesma propriedade teríamos  $\text{gr}(\nabla \mathbb{F}^\lambda) \geq 2$ .

Uma simples conta mostra que  $\text{gr}(\nabla \mathbb{F}^\lambda) = \frac{k^2 - k + s - s^2}{2} + 1$ . Portanto  $\text{gr}(\nabla \mathbb{F}^\lambda) = 1$  se, e somente se,  $s = k$ . ■

**Exemplo 3.8** Se na Proposição 3.7

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \neq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \neq 0$$

Então pela fórmula de Van den Essen segue que a multiplicidade da singularidade contida nas  $k$  primeiras retas é  $(k-1)^2$ . Portanto  $\text{gr}(\nabla \mathbb{F}^\lambda) = k-1$ .

## 4

### Folheações Degeneradas

#### 4.1

##### Folheações por $k$ -planos

Nesta seção vamos exibir alguns resultados conhecidos a respeito de folheações por  $k$ -planos em espaços projetivos, incluindo as classificações de folheações por retas em  $\mathbb{P}^3$  e folheações por planos em  $\mathbb{P}^4$ .

Classicamente, folheações por  $k$ -planos em  $\mathbb{P}^n$  são conhecidas como *congruência de  $k$ -planos de ordem um*. Uma congruência de  $k$ -planos em  $\mathbb{P}^n$  é uma família de  $k$ -planos de dimensão  $n - k$ , i.e., uma subvariedade de  $\mathbb{G}(k, n)$  de dimensão  $n - k$ ; sua ordem é definida como o número de  $k$ -planos que passam por um ponto genérico de  $\mathbb{P}^n$ .

Uma **folheação por  $k$ -planos**  $\mathcal{G}$  em  $\mathbb{P}^n$  é por definição uma folheação holomorfa de dimensão  $k$  tal que toda folha está contida em um espaço linear de dimensão  $k$ . O fecho algébrico  $B' \subset \mathbb{G}(k, n)$  do conjunto de  $k$ -planos invariantes por  $\mathcal{G}$  define uma subvariedade de dimensão  $n - k$  (esta pode ser vista como imagem da aplicação de Gauss associada à  $\mathcal{G}$ ). Reciprocamente, uma subvariedade  $B' \subset \mathbb{G}(k, n)$  de dimensão  $n - k$  tal que para um ponto genérico de  $\mathbb{P}^n$  passa um único elemento de  $B'$ , define uma folheação por  $k$ -planos em  $\mathbb{P}^n$ . Neste caso, dizemos que  $\mathcal{G}$  é formada pela família  $B'$ . Consideremos a variedade

$$\Lambda' = \{(p, L) \in \mathbb{P}^n \times B' \mid p \in L\}.$$

junto com as projeções naturais  $g' : \Lambda' \rightarrow B'$  e  $f' : \Lambda' \rightarrow \mathbb{P}^n$ . Então temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & & f & \\ & & & \curvearrowright & \\ B \times_{B'} \Lambda' & \xrightarrow{\phi^*} & \Lambda' & \xrightarrow{f'} & \mathbb{P}^n \\ g \downarrow & & g' \downarrow & & \\ B & \xrightarrow{\phi} & B' & & \end{array}$$

onde  $\phi$  é a resolução de  $B'$  e  $f = f' \circ \phi^*$ . Denotamos por  $\Lambda$  o produto fibrado  $B \times_{B'} \Lambda'$ . Observe que  $\Lambda$  é um fibrado projetivo sobre  $B$ , portanto

uma variedade não-singular. Se  $L \in B$ , continuamos denotando por  $L \subset \mathbb{P}^n$  o respectivo  $k$ -plano associado.

Seja  $R_{\mathcal{G}}$  o divisor de ramificação de  $f$ , i.e.,

$$R_{\mathcal{G}} = \{(p, L) \in \Lambda \mid \det Jf(p, L) = 0\}.$$

Podemos escrever  $R_{\mathcal{G}} = H_{\mathcal{G}} + V_{\mathcal{G}}$  onde  $g|_{H_{\mathcal{G}}}$  tem posto  $n - k$  em um aberto denso e  $g|_{V_{\mathcal{G}}}$  não é dominante. As componentes irredutíveis do suporte de  $H_{\mathcal{G}}$  também serão chamadas de componentes horizontais.

**Definição 4.1** Se  $E$  é uma componente irredutível do suporte de  $H_{\mathcal{G}}$ , então  $f(E)$  será chamado **componente fundamental de  $\mathcal{G}$** . A união das componentes fundamentais será chamada **conjunto fundamental de  $\mathcal{G}$**  e denotaremos por  $\Delta_{\mathcal{G}}$ .

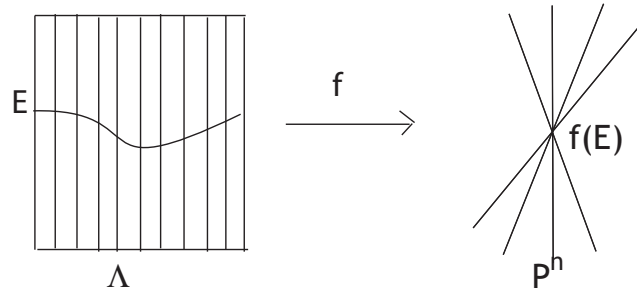


Figura 4.1: Componentes horizontais.

**Observação 4.2** Seja  $\mathcal{G}$  uma folheação por retas (i.e.,  $k = 1$ ). Se  $\mathcal{G}$  possui uma singularidade isolada  $p$ , então  $\mathcal{G}$  consiste na folheação radial em  $p$ , ou seja,  $\mathcal{G}$  é formada pela família de retas que contém  $p$ . De fato, se  $E$  é uma componente irredutível do suporte de  $V_{\mathcal{G}}$ , então  $f(E)$  contém pelo menos uma reta de  $B'$ , neste caso  $p$  não seria singularidade isolada. Portanto sendo  $p \in \text{Sing}(\mathcal{G}) = f(|R_{\mathcal{G}}|)$ , obtemos  $p \in \Delta_{\mathcal{G}}$ . Segue que  $B' \subset \sigma$ , onde  $\sigma$  denota a família de retas que contém  $p$ . Sendo  $\dim(B') = \dim(\sigma) = n - 1$ , o resultado segue.

A primeira observação sobre o conjunto fundamental, devido a C.Segre, é a seguinte:

**Lema 4.3** [S1] *A dimensão do conjunto fundamental é no máximo  $n - 2$ .*

*Prova.* Se  $\mathcal{C}$  é uma componente de dimensão  $n - 1$  de  $\Delta_{\mathcal{G}}$  então existe uma componente irredutível  $E$  do suporte de  $H_{\mathcal{G}}$  tal que  $f(E) = \mathcal{C}$ . Se  $p \in \mathcal{C}$  é um

ponto genérico, então  $f^{-1}(p)$  é um conjunto finito. Como  $f$  é um morfismo birracional, o Teorema Principal de Zariski diz que  $f$  tem fibras conexas, portanto  $f^{-1}(p)$  consiste em um único ponto. O que contradiz a hipótese  $E \subset |H_G|$ . ■

Seja  $L \in B$ , como  $f|_{g^{-1}(L)} : g^{-1}(L) \rightarrow L$  é um isomorfismo, a restrição do divisor  $H_G$  à  $g^{-1}(L)$  define uma hipersuperfície  $\Delta_G(L)$  em  $L \subset \mathbb{P}^n$ .

**Proposição 4.4** *Seja  $L \in B$  tal que  $g^{-1}(L) \not\subset |R_G|$ . Então  $\Delta_G(L)$  é uma hipersuperfície em  $L \subset \mathbb{P}^n$  de grau  $n - k$ .*

*Prova.* Como  $f|_{g^{-1}(L)} : g^{-1}(L) \rightarrow L$  é um isomorfismo, basta mostrar que  $f^*\Delta_G(L)$  é uma hipersuperfície em  $g^{-1}(L)$  de grau  $n - k$ .

Seja  $\psi : \mathbb{D}^{n-k} \rightarrow B$  uma parametrização local em uma vizinhança de  $L$  da forma

$$\psi(s) = \mathbb{P}(\text{span}\{\alpha_0(s), \dots, \alpha_k(s)\}),$$

onde  $\alpha_0, \dots, \alpha_k : \mathbb{D}^{n-k} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ , são funções holomorfas. A aplicação  $f$  pode ser estudada via seguinte parametrização local de  $\Lambda$

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{D}^{n-k} \times \mathbb{P}^k &\longrightarrow \Lambda \\ (s, t) &\longmapsto ([t_0\alpha_0(s) + \dots + t_k\alpha_k(s)], \psi(s)), \quad t = (t_0 : \dots : t_k), \end{aligned}$$

ou seja, colocamos  $F = f \circ \lambda$ .

Podemos supor que  $F$  é um isomorfismo em  $(s, e_0)$ ,  $e_0 = (1 : 0 : \dots : 0)$ , para todo  $s \in \mathbb{D}^{n-k}$ . Observe que  $dF(s, t)(T_{(s,t)}\mathbb{D}^{n-k} \times \mathbb{P}^k)$  coincide com o projetivizado de espaço

$$\text{span} \left\{ \alpha_0(s), \dots, \alpha_k(s), \sum_{i=0}^k t_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial s_1}(s), \dots, \sum_{i=0}^k t_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial s_{n-k}}(s) \right\}$$

Segue que  $F$  é um isomorfismo em  $(s, t)$  se, e somente se, vale igualdade na equação abaixo

$$\begin{aligned} \text{span} \left\{ \alpha_0(s), \dots, \alpha_k(s), \sum_{i=0}^k t_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial s_1}(s), \dots, \sum_{i=0}^k t_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial s_{n-k}}(s) \right\} \subset \\ \text{span} \left\{ \alpha_0(s), \dots, \alpha_k(s), \frac{\partial \alpha_0}{\partial s_1}(s), \dots, \frac{\partial \alpha_0}{\partial s_{n-k}}(s) \right\} = \mathbb{C}^{n+1}. \end{aligned}$$

Se denotamos

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial s}(s) := \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial s_1}(s), \dots, \frac{\partial \alpha_i}{\partial s_{n-1}}(s) \right),$$

para  $i = 0, \dots, k$ , então existem matrizes,  $A_i(s) \in M((n - k); \mathbb{C})$ ,  $i = 0, \dots, k$ , tal que  $(A_0(s) = Id_{n-k})$

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial s}(s) = A_i \frac{\partial \alpha_0}{\partial s}(s) \quad \text{mod } \text{span}\{\alpha_0(s), \dots, \alpha_k(s)\}.$$

Portanto  $F$  não é isomorfismo em  $(s, t)$  se, e somente se,

$$\det \left( \sum_{i=0}^k t_i A_i(s) \right) = 0.$$

O resultado segue do fato que  $\det \left( \sum_{i=0}^k t_i A_i(s) \right)$  é um polinômio homogêneo nas variáveis  $t_0, \dots, t_k$  de grau  $n - k$ . ■

**Observação 4.5** Seja  $\mathcal{G}$  uma folheação por retas em  $\mathbb{P}^n$ . Escrevemos

$$H_{\mathcal{G}} = \sum m(E) \cdot E \quad \text{e} \quad d_E := \dim f(E).$$

onde  $E$  são hipersuperfícies irredutíveis em  $\Lambda$ .

1. Com um simples argumento local como na prova da Proposição 1.5 pode-se mostrar que  $m(E) \geq n - d_E - 1$ .
2. As fibras da aplicação  $f|_E : E \rightarrow f(E)$  definem uma folheação de codimensão  $d_E$  em  $E$  que denotaremos por  $\eta_E$ .
3. Quando  $g^{-1}(L)$  intersecta  $E$  em um único ponto para um elemento genérico  $L \in B$ . Temos a seguinte projeção ao longo das folhas de  $\mathcal{G}$

$$\phi_E := f \circ p_E \circ f^{-1} : \mathbb{P}^n \dashrightarrow f(E)$$

onde  $p_E : \Lambda \rightarrow E$  é a projeção natural.

**Proposição 4.6** *Seja  $\mathcal{G}$  uma folheação por retas em  $\mathbb{P}^n$ ,  $n = 3, 4$ . Se  $E$  é uma componente irredutível do suporte de  $H_{\mathcal{G}}$  tal que  $\dim f(E) \geq 1$ , então*

$$\ker df(x) \subset T_x E,$$

para um ponto genérico  $x \in E$ .

*Prova.* Observe que se  $\ker df(x) \not\subset T_x E$ , então

$$T_x \Lambda = T_x E + \ker df(x).$$

Portanto  $df_x(T_x\Lambda) \subset T_{f(x)}f(E)$ , ou seja, a reta  $f(g^{-1}(g(x)))$  é tangente à  $f(E)$  em  $f(x)$ . Se  $\dim f(E) = 1$ , então  $B'$  seria uma família de retas tangentes a uma curva e esta não cobriria todo espaço. Se  $\dim f(E) = 2$ , então teríamos uma família de retas tangentes a uma superfície, mas esta não define uma folheação por retas (cf. [DeP5], Proposição 1.3). ■

**Notação 4.7** – Se  $F \subset \mathbb{P}^n$  é um espaço linear então  $F^\vee$  denota o espaço dual formado por hiperplanos de  $F$ .

– Se  $E \subset F$  é um subespaço linear, então  $E_F^*$  denota o conjunto de hiperplanos  $\pi \in F^\vee$  que contém  $E$ . Se  $F = \mathbb{P}^n$  denotamos apenas  $E^*$ .

**Exemplo 4.8** Seja  $\Sigma \subset \mathbb{P}^n$  um espaço linear de dimensão  $n-2$  e  $C$  uma curva irredutível tal que se  $F \in \Sigma^*$ , então  $(F \cap C) \setminus \Sigma$  consiste em um único ponto. A família de retas que intersectam  $C$  e  $\Sigma$  define uma folheação por retas em  $\mathbb{P}^n$  que denotamos por  $\mathcal{G}(\Sigma, C)$ . Temos que  $\Delta_{\mathcal{G}} = \Sigma \cup C$ .

**Exemplo 4.9** Um caso similar ao Exemplo 4.8 é quando consideramos a curva  $C$  contida em  $\Sigma$ . Seja  $\psi : \Sigma^* \rightarrow C$  um morfismo não-constante. Neste caso, para  $F \in \Sigma^*$ , definimos a família  $B_F$  de retas contidas em  $F$  que passam por  $\psi(F)$ . A união  $\overline{\cup_{F \in \Sigma^*} B_F} \subset \mathbb{G}(1, n)$  define uma folheação por retas em  $\mathbb{P}^n$ . Temos que  $\Delta_{\mathcal{G}} = C$  e  $\Sigma = f(|V_{\mathcal{G}}|)$ .

### 4.1.1

#### Folheações por Retas em $\mathbb{P}^3$

O estudo de folheações por retas em espaços projetivos foi iniciado por E.E. Kummer em [Kum] onde obteve uma classificação em  $\mathbb{P}^3$ . Outras provas de tal classificação foram obtidas em [Ran, ZILO, DeP3, C]. A prova da classificação a seguir é baseada em [C].

**Teorema 4.10** [Kum, Ran, ZILO, DeP3, C]

Seja  $\mathcal{G}$  uma folheação por retas em  $\mathbb{P}^3$ . Temos uma das seguintes possibilidades:

1.  $\mathcal{G}$  é a folheação radial por um ponto  $p$ .
2.  $\mathcal{G}$  é formada pela família de retas secantes a uma cúbica torcida.
3. Existem uma reta  $L$  e um morfismo não-constante  $\psi : L^* \rightarrow L$  tal que  $\mathcal{G}$  é formada pela família de retas

$$\overline{\cup_{\pi \in L^*} \psi(\pi)_\pi^*} .$$



4. Existem uma reta  $L$  e uma curva racional  $C$  tal que se  $\pi \in L^*$ , então  $(\pi \cap C) \setminus L$  consiste em um único ponto e  $\mathcal{G}$  é formada pela família de retas que intersectam  $L$  e  $C$ .

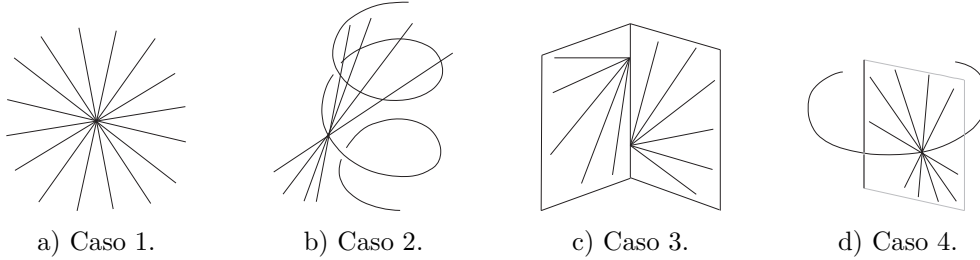


Figura 4.2: Folheações por retas

*Prova.* Temos  $\text{Sing}(\mathcal{G}) = \Delta_{\mathcal{G}}$ , de fato suponhamos que exista uma componente irredutível  $E \subset |V_{\mathcal{G}}|$ . Como  $f(E)$  contém pelo menos uma reta  $L$ , obtemos  $f(E) = L$ . Mas em um ponto genérico de  $L$  não passa outra reta invariante por  $\mathcal{G}$ , logo  $L$  não pode estar contida no conjunto singular de  $\mathcal{G}$ , o que contradiz a hipótese  $E \subset |V_{\mathcal{G}}|$ .

Se  $\mathcal{G}$  tem uma singularidade isolada, então é radial pela Observação 4.2. Portanto pela Proposição 4.4 podemos supor que

$$H_{\mathcal{G}} = E_1 + E_2, \quad H_{\mathcal{G}} = 2E \quad \text{ou} \quad H_{\mathcal{G}} = E.$$

e que  $\text{Sing}(\mathcal{G})$  tem dimensão pura 1.

Suponhamos  $C := \Delta_{\mathcal{G}}$  irredutível. Se  $C$  é uma reta, então um plano  $\tau$  contendo  $C$  é invariante por  $\mathcal{G}$ , logo  $\mathcal{G}$  restrita à  $\tau$  é radial por um ponto em  $C$ . Este é o caso (3) do teorema.

Se  $C$  não é uma reta, sejam  $p$  e  $q$  pontos distintos em  $C$  e considere  $X_p, X_q$  os cones formados por retas invariantes por  $\mathcal{G}$  que passam por  $p$  e  $q$  respectivamente. Estes cones se intersectam em uma curva contida no conjunto singular de  $\mathcal{G}$ , ou seja, em  $C$ . Logo uma reta genérica contida em  $X_p$  invariante por  $\mathcal{G}$  intersecta  $C$  em dois pontos distintos, ie,  $\mathcal{G}$  é formada pelas secantes de  $C$ . Como  $C$  não é planar,  $\text{deg}(C) \geq 3$ . Seja  $\pi$  um plano genérico,  $\pi \cap C = \{p_1, \dots, p_s\}$ . As retas ligando  $p_i$  à  $p_j$ ,  $i \neq j$ , são invariantes por  $\mathcal{G}$  e como cada reta invariante tem no máximo dois pontos singulares de  $\mathcal{G}$  obtemos que  $s = 3$ . Segue que  $C$  é uma cúbica torcida. Este é o caso (2) do teorema.

Se  $\Delta_{\mathcal{G}}$  é redutível então  $H_{\mathcal{G}} = E_1 + E_2$  com  $f(E_1) \neq f(E_2)$ . Denotamos  $C_i = f(E_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Seja  $\pi$  um plano genérico, digamos  $\pi \cap C_1 = \{p_1, \dots, p_s\}$  e  $\pi \cap C_2 = \{q_1, \dots, q_t\}$ . Como as retas ligando  $p_i$  à  $q_j$  são invariantes por  $\mathcal{G}$  e cada reta invariante tem no máximo dois pontos singulares de  $\mathcal{G}$  obtemos que  $s = 1$  ou  $t = 1$ , portanto uma das curvas é uma reta, digamos  $C_1$ . Um plano  $\tau$

contendo  $C_1$  é invariante por  $\mathcal{G}$ , logo  $\mathcal{G}$  restrita à  $\tau$  é radial por um ponto em  $C_2$ . Este é o caso (4) do teorema. ■

## Comentário

Folheações por retas em  $\mathbb{P}^4$  foram consideradas primeiramente por G.Marletta. Em seu trabalho [Mar2] foi estudado o caso *genericamente reduzido* onde obteve a classificação completa quando o conjunto fundamental é uma superfície irreduzível, neste caso, uma reta genérica invariante pela folheação intersecta esta em três pontos distintos; o estudo de superfícies com tal propriedade (superfície com um ponto triplo aparente) foi feito primeiramente por E. Ascione em [Asc] e posteriormente por F. Severi em [Sev]. Este caso foi estudado novamente por P.De Poi em [DeP4] com uma abordagem mais moderna. O caso *não-reduzido* também foi estudado por Marletta em [Mar1], seguido por De Poi em [DeP5]. Não iremos utilizar tal classificação de folheações por retas em  $\mathbb{P}^4$  para o estudo de folheações de posto três em  $\mathbb{P}^4$ , somente alguns resultados gerais.

### 4.1.2

#### Folheações por Planos em $\mathbb{P}^4$

Z.Ran em [Ran] obteve a classificação completa de superfícies de ordem um em  $\mathbb{G}(k, n)$ , i.e., família de  $k$ -planos em  $\mathbb{P}^n$  tal que um  $(n - k - 2)$ -plano genérico encontra somente um  $k$ -plano da família. No teorema seguinte obtemos tal classificação para  $n = 4$ ,  $k = 2$ .

**Teorema 4.11** *Seja  $\mathcal{G}$  uma folheação por planos em  $\mathbb{P}^4$ . Temos uma das seguintes possibilidades:*

1.  $\mathcal{G}$  é formada pela família de planos que contém uma reta.
2. Existe um plano  $\Sigma$  e um morfismo  $\psi : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{G}(1, 4)$  tal que a reta  $\psi(\pi)$  está contida em  $\pi$ , para todo hiperplano  $\pi \in \Sigma^*$  e  $\mathcal{G}$  é formada pela família de planos

$$\overline{\bigcup_{\pi \in \Sigma^*} \bigcup_{L \in (\psi(\pi))^*} L}.$$

3. Existe uma superfície  $S$  e uma família de dimensão dois de cônicas (distintas de retas) em  $S$  tal que  $\mathcal{G}$  é formada pela família de planos que contém tais cônicas. Mais ainda,  $S = S_{1,2}$  (o scroll racional de grau 3 em  $\mathbb{P}^4$ ) se tais cônicas são irreduzíveis ou  $S$  é um cone de grau 3 se tais cônicas são reduzidas.

*Prova.* Seja  $L \in B$ , a proposição 4.4 diz que  $\Delta_{\mathcal{G}}(L)$  é uma cônica em  $L$ . Seja  $\Gamma \cong \mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^4$  genérico e consideremos a folheação por retas  $\mathcal{G}|_{\Gamma}$  em  $\Gamma$ . Observe que

$$\text{Sing}(\mathcal{G}|_{\Gamma}) = \Delta_{\mathcal{G}} \cap \Gamma.$$

Se  $\text{Sing}(\mathcal{G}|_{\Gamma})$  consiste em um único ponto, então  $\Delta_{\mathcal{G}}$  é uma reta e portanto estamos no caso (1) do enunciado.

Se  $\text{Sing}(\mathcal{G}|_{\Gamma})$  contém uma reta, então  $\Delta_{\mathcal{G}}$  contém um plano  $\Sigma$ , como cada elemento  $L \in B$  intersecta  $\Delta_{\mathcal{G}}$  em pelo menos uma curva segue que os hiperplanos  $\pi \in \Sigma^*$  são invariantes por  $\mathcal{G}$ . Portanto  $\mathcal{G}|_{\pi}$  é uma folheação por planos contendo uma reta. Logo estamos no caso (2) do enunciado.

Se  $\text{Sing}(\mathcal{G}|_{\Gamma})$  é uma cúbica torcida, então segue que  $\Delta_{\mathcal{G}}$  é irredutível e possui grau três. Pelo Teorema de C. Segre (veja [S4] ou [MP], Teorema 4), uma superfície contendo uma família de dimensão dois de curvas planas distintas de retas é um cone ou uma projeção da superfície de Veronese  $V \subset \mathbb{P}^5$ . No primeiro caso obtemos um cone de grau três, no segundo obtemos o scroll racional de grau três  $S_{1,2}$  (a projeção linear de  $V$  para  $\mathbb{P}^4$  com centro em um ponto contido em  $V$ ), pois a projeção de  $V$  com centro em um ponto fora de  $V$  não possui grau três, portanto estamos no caso (3) do enunciado. ■

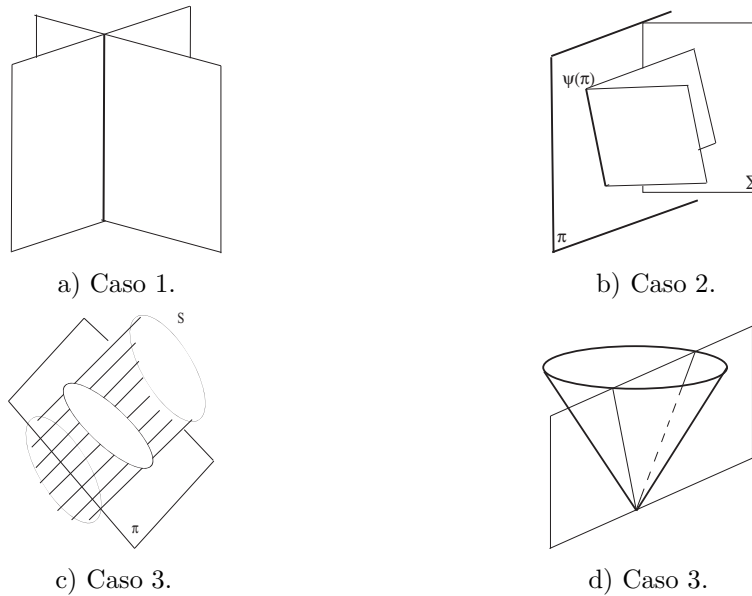


Figura 4.3: Folheações por planos

## 4.2 Folheações Degeneradas e Exemplos Gerais

Uma folheação degenerada em  $\mathbb{P}^2$  é um pencil de retas. De fato, as folhas de  $\mathcal{F}$  são curvas degeneradas, portanto subconjuntos abertos de retas. Logo pela Observação 4.2,  $\mathcal{F}$  é radial por um ponto  $p \in \mathbb{P}^2$ .

Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação de codimensão um em  $\mathbb{P}^n$  com aplicação de Gauss de posto  $n-1$ , então pelo Teorema 1.13, as fibras de  $G_{\mathcal{F}}$  definem uma folheação por retas  $\mathcal{G}$ .

Como vimos na seção 4.1, a imagem por  $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^n$  do divisor de pontos onde  $f$  não é isomorfismo restrito à  $g^{-1}(L) \subset \Lambda$  define um divisor (uma hipersuperfície)  $\Delta_{\mathcal{G}}(L)$  em  $L \subset \mathbb{P}^n$ . Neste caso, a Proposição 4.4 diz que  $\Delta_{\mathcal{G}}(L)$  é um divisor de grau  $n-1$ .

Seja  $p \in \mathbb{P}^n$  um ponto regular genérico,  $U$  uma vizinhança suficientemente pequena de  $p$  e  $M \subset U$  uma subvariedade complexa de codimensão um invariante por  $\mathcal{F}$ , consideremos  $M_0 := \cup_{p \in M} L_p$  ( $L_p$  é a reta invariante por  $\mathcal{G}$  que contém  $p$ ). Dizemos que  $M_0$  é o saturado de um germe de folha genérica de  $\mathcal{F}$  por  $\mathcal{G}$ . Temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f_{M_0} := f \circ i_1 & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 \Lambda_{M_0} & \xrightarrow{i_1} & \Lambda & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^n \\
 g_{M_0} \downarrow & & \downarrow g & & \\
 B_{M_0} & \xrightarrow{i_2} & B & & 
 \end{array}$$

onde  $B_{M_0} = g(M_0)$  e  $\Lambda_{M_0} = \Lambda|_{B_{M_0}}$ .

A imagem por  $f_{M_0} : \Lambda_{M_0} \rightarrow M_0$  do divisor de pontos onde  $f_{M_0}$  não é imersão restrito à  $g^{-1}(L)$  define um divisor  $\Delta_{M_0}(L)$  em  $L$ . A Proposição A.4 diz que  $\Delta_{M_0}(L)$  é um divisor de grau  $n-2$ .

**Proposição 4.12** *Seguindo a notação acima. Seja  $L \in B$  tal que  $g^{-1}(L) \not\subseteq |R_{\mathcal{G}}|$ . Então*

$$\Delta_{M_0}(L) \leq \Delta_{\mathcal{G}}(L).$$

*Prova.* Como  $f|_{g^{-1}(L)} : g^{-1}(L) \rightarrow L$  é um isomorfismo, basta mostrar que se  $f^* \Delta_{\mathcal{G}}(L) = V(P_{\mathcal{G}})$  e  $f^* \Delta_{M_0}(L) = V(P_{M_0})$ , então  $P_{M_0}$  divide  $P_{\mathcal{G}}$ .

A menos de uma parametrização local de  $\Lambda$  temos que  $f$  é da forma (veja a prova da Proposição 4.4)

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{D}^{n-1} \times \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\
 (s, t) &\longmapsto [t_0 \alpha_0 + t_1 \alpha_1], \quad t = (t_0 : t_1)
 \end{aligned}$$

Podemos supor que

1.  $f$  é um isomorfismo em  $(s, (1 : 0))$  para todo  $s \in \mathbb{D}^{n-1}$  e colocamos  $\Sigma := f(\mathbb{D}^{n-1} \times (1 : 0))$  seção transversal à  $\mathcal{G}$ ;
2.  $f(\mathbb{D}^{n-2} \times \{s_{n-1}\} \times \{(1 : 0)\})$  é invariante por  $\mathcal{F}|_{\Sigma}$  para todo  $s_{n-1} \in \mathbb{D}$ .

Portanto, pela propriedade (2) acima, as restrições

$$\begin{aligned} f_{s_{n-1}} : \mathbb{D}^{n-2} \times \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ (\bar{s}, t) &\longmapsto f(s, t), \quad s = (\bar{s}, s_{n-1}), \end{aligned}$$

parametrizam as folhas de  $\mathcal{F}$ .

Observe que pela propriedade (1) acima,  $f$  é um isomorfismo em  $(s, t)$  se, e somente se, vale igualdade na equação abaixo

$$\begin{aligned} \text{span} \left\{ \alpha_0(s), \alpha_1(s), t_0 \frac{\partial \alpha_0}{\partial s_1}(s) + t_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_1}(s), \dots, t_0 \frac{\partial \alpha_0}{\partial s_{n-1}}(s) + t_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_{n-1}}(s) \right\} &\subset \\ \text{span} \left\{ \alpha_0(s), \alpha_1(s), \frac{\partial \alpha_0}{\partial s_1}(s), \dots, \frac{\partial \alpha_0}{\partial s_{n-1}}(s) \right\} &= \mathbb{C}^{n+1} \end{aligned} \quad .$$

Se denotamos

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial s}(s) := \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial s_1}(s), \dots, \frac{\partial \alpha_i}{\partial s_{n-1}}(s) \right), \quad i = 0, 1,$$

então, existem matrizes  $A_i(s) \in M((n-1); \mathbb{C})$ ,  $i = 0, 1$ , ( $A_0(s) = Id_{n-1}$ ) tal que

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial s}(s) = A_i(s) \frac{\partial \alpha_0}{\partial s}(s) \quad \text{mod } \text{span}\{\alpha_0(s), \alpha_1(s)\}.$$

Portanto  $f$  não é isomorfismo em  $(s, t)$  se, e somente se,

$$\det(t_0 A_0(s) + t_1 A_1(s)) = 0,$$

ou seja,  $f^* \Delta_{\mathcal{G}}(L) = V(P_{\mathcal{G}})$ , onde  $P_{\mathcal{G}} = \det(t_0 A_0(s) + t_1 A_1(s))$  é um polinômio homogêneo nas variáveis  $t_0, t_1$  de grau  $n-1$ .

Por outro lado, a condição que o espaço tangente de  $\mathcal{F}$  é constante ao longo das folhas de  $\mathcal{G}$  nos dá que:

$$\begin{aligned} \text{span} \left\{ \alpha_0(s), \alpha_1(s), t_0 \frac{\partial \alpha_0}{\partial s_1}(s) + t_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_1}(s), \dots, t_0 \frac{\partial \alpha_0}{\partial s_{n-2}}(s) + t_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_{n-2}}(s) \right\} &\subset \\ \text{span} \left\{ \alpha_0(s), \alpha_1(s), \frac{\partial \alpha_0}{\partial s_1}(s), \dots, \frac{\partial \alpha_0}{\partial s_{n-2}}(s) \right\} &. \end{aligned}$$

E vale igualdade acima se, e somente se,  $f_{s_{n-1}}$  não é imersão em  $(\bar{s}, t)$ . Logo existem matrizes  $\bar{A}_i(\bar{s}) \in M((n-2); \mathbb{C})$ ,  $i = 0, 1$ , ( $\bar{A}_0(\bar{s}) = Id_{n-2}$ ) tal que

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial \bar{s}}(s) = \bar{A}_i \frac{\partial \alpha_0}{\partial \bar{s}}(s) \quad \text{mod } \text{span}\{\alpha_0(s), \alpha_1(s)\}.$$

Portanto  $f_{s_{n-1}}$  não é imersão em  $(\bar{s}, t)$  se, e somente se,

$$\det(t_0 \bar{A}_0(\bar{s}) + t_1 \bar{A}_1(\bar{s})) = 0,$$

ou seja,  $f^* \Delta_{M_0}(L) = V(P_{M_0})$ , onde  $P_{M_0} = \det(t_0 \bar{A}_0(\bar{s}) + t_1 \bar{A}_1(\bar{s}))$  é um polinômio homogêneo nas variáveis  $t_0, t_1$  de grau  $n-2$ .

Sendo

$$t_0 A_0(s) + t_1 A_1(s) = \left( \begin{array}{c|c} t_0 \bar{A}_0(\bar{s}) + t_1 \bar{A}_1(\bar{s}) & 0_{(n-2) \times 1} \\ \hline a_{n-11}(s) \dots a_{n-1n-2}(s) & a_{n-1n-1}(s) \end{array} \right).$$

para algumas funções holomorfas  $a_{ij} : \mathbb{D}^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}$ , obtemos  $P_{M_0}$  divide  $P_{\mathcal{G}}$ . ■

**Exemplo 4.13** Considere a folheação por retas  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\Sigma, C)$  em  $\mathbb{P}^n$  (veja o exemplo 4.8). Temos

$$H_{\mathcal{G}} = E_1 + (n-2)E_2, \quad f(E_1) = \Sigma \quad \text{e} \quad f(E_2) = C.$$

Seja  $\phi_{E_1} : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \Sigma \cong \mathbb{P}^{n-2}$  a projeção ao longo das folhas de  $\mathcal{G}$  e  $\eta$  uma folheação de codimensão um em  $\Sigma$ . O pull-back de  $\eta$  através de  $\phi_{E_1}$ ,  $\mathcal{F} := \phi_{E_1}^*(\eta)$  define uma folheação de codimensão um em  $\mathbb{P}^n$ . As fibras de  $\phi_{E_1}$  são cones sobre  $C$ , assim cada folha de  $\mathcal{F}$  é um join  $J(N, C)$  (veja o exemplo A.2), onde  $N$  denota a folha de  $\eta$  que passa por  $q$ .

Suponhamos  $\Sigma = \{(X_0 : \dots : X_n) \in \mathbb{P}^n \mid X_0 = X_1 = 0\}$ . A curva  $C$  pode ser parametrizada por uma aplicação da forma

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ (s : t) &\longmapsto (sP(s, t) : tP(s, t) : Q_2(s, t) : \dots : Q_n(s, t)) \end{aligned}$$

onde  $P, Q_2, \dots, Q_n$  são polinômios homogêneos com  $\deg(P) = d$  e  $\deg(Q_i) = d+1$ ,  $i = 2, \dots, n$ . Escolhendo coordenadas afins  $(x_1, \dots, x_n) = (X_0/X_n, \dots, X_{n-1}/X_n)$  é fácil ver que o campo de vetores tangente à  $\mathcal{G}$  é da forma

$$V(x_1, \dots, x_n) = x_1(Q_n - P) \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2(Q_n - P) \frac{\partial}{\partial x_2} + \sum_{i=3}^n (x_i Q_n - Q_i) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

A reta invariante por  $\mathcal{G}$  que passa pelo ponto  $(x_1, \dots, x_n)$  tem uma parametrização da forma  $s \rightarrow (x_1, \dots, x_n) + s.V(x_1, \dots, x_n)$ , além disso

$$(x_1, \dots, x_n) + s.V(x_1, \dots, x_n) \in \Sigma \iff s = \frac{1}{P - Q_n}.$$

Assim obtemos,

$$\phi_{E_1} = (X_2P(X_0, X_1) - Q_2(X_0, X_1) : \dots : X_nP(X_0, X_1) - Q_n(X_0, X_1)).$$

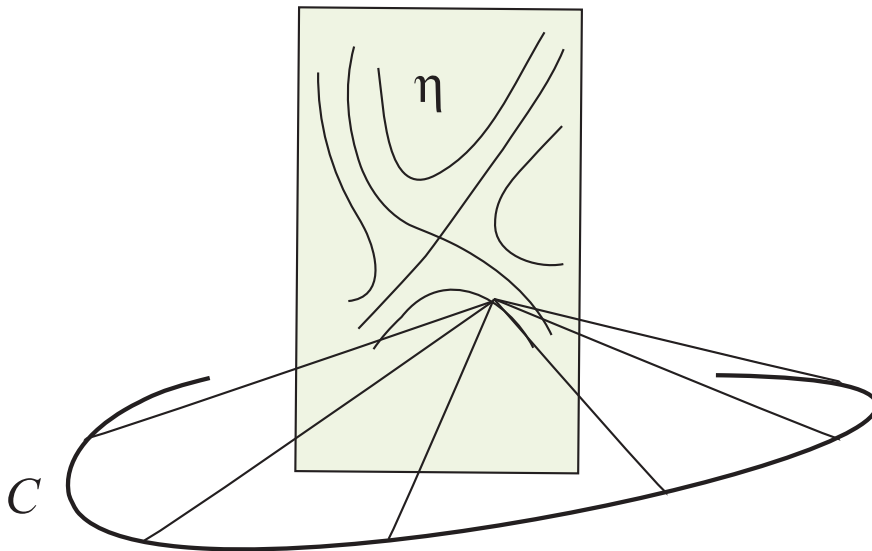


Figura 4.4: Exemplo 4.13.

**Teorema 4.14** *Considere a folheação por retas  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\Sigma, C)$  em  $\mathbb{P}^n$ . Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação degenerada em  $\mathbb{P}^n$  tal que as folhas de  $\mathcal{G}$  estão contidas nas fibras de  $G_{\mathcal{F}}$ . Então temos uma das seguintes possibilidades:*

1.  $\mathcal{F}$  é um pencil de hiperplanos;
2.  $\mathcal{F}$  é o pull-back de uma folheação de codimensão um em  $\Sigma \cong \mathbb{P}^{n-2}$  pela projeção  $\phi_{E_1}$ ,  $f(E_1) = \Sigma$ , ao longo das folhas de  $\mathcal{G}$ .

*Prova.* Podemos escrever  $H_{\mathcal{G}} = E_1 + (n - 2)E_2$ , com  $f(E_1) = \Sigma$  e  $f(E_2) = C$ . Seja  $\mathcal{F}_{E_i} := (f^*\mathcal{F})_{E_i}$ ,  $i = 1, 2$ . Consideremos as folheações  $\eta_{E_i}$  em  $E_i$ ,  $i = 1, 2$  de dimensão  $n - 1 - \dim f(E_i)$  (veja a Observação 4.5).

Se  $\mathcal{F}_{E_2}$  coincide com  $\eta_{E_2}$  então  $\mathcal{F}$  é o pencil de hiperplanos contendo  $\Sigma$  e estamos no caso (1) do teorema.

Logo podemos supor  $\mathcal{F}_{E_2} \neq \eta_{E_2}$ . Observe que se  $\eta_{E_1}$  é tangente à  $\mathcal{F}_{E_1}$ , então as fibras de  $\phi_{E_1}$  são tangentes à  $\mathcal{F}$ . Segue de ([CLnLPT], Lema 2.2) que existe uma folheação de codimensão um  $\eta$  em  $\Sigma$  tal que  $\mathcal{F} = \phi_{E_1}^*(\eta)$ . Neste caso, estamos no caso (2) do teorema.

Portanto resta mostrar que  $\eta_{E_1}$  é tangente à  $\mathcal{F}_{E_1}$ . Suponhamos por absurdo que  $\eta_{E_1}$  não é tangente à  $\mathcal{F}_{E_1}$ . Isto implica que se  $N$  é uma folha de  $\mathcal{F}_{E_1}$  então  $f(N)$  tem dimensão  $n - 2$ .

Seja  $M_0$  o saturado de um germe de folha de  $\mathcal{F}$  por  $\mathcal{G}$ . Consideremos uma parametrização local  $\alpha : \mathbb{D} \rightarrow C \cap M_0$ . Sejam  $\beta : \mathbb{D}^{n-2} \rightarrow M_0$  seção transversal à  $\mathcal{G}|_{M_0}$  e  $\beta_t(s) := \beta(s, t)$ ,  $(s, t) \in \mathbb{D}^{n-3} \times \mathbb{D}$  tal que  $\beta_t(s) \in \mathbb{P}_t^{n-1}$  para todo  $s \in \mathbb{D}^{n-3}$ , onde  $\mathbb{P}_t^{n-1}$  denota o hiperplano contendo  $\Sigma$  e  $\alpha(t)$ . Se colocamos  $\gamma := \phi_{E_1} \circ \beta$ , a hipótese  $\eta_{E_1}$  não é tangente à  $\mathcal{F}_{E_1}$  implica que  $\gamma$  é uma parametrização local de  $\Sigma$ .

Temos uma parametrização local de  $M_0$  da forma

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{C} \times \mathbb{D}^{n-2} &\longrightarrow M_0 \\ (r, s, t) &\longmapsto r\alpha(t) + (1-r)\gamma(s, t). \end{aligned}$$

O espaço tangente de  $M_0$  em um ponto suave  $\psi(r, s, t)$  é dado por

$$T_{\psi(r,s,t)}M_0 = \text{span} \left\{ \alpha - \gamma, \frac{\partial \gamma}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial \gamma}{\partial s_{n-3}}, r\alpha' + (1-r)\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\}.$$

Se para  $r, \tilde{r} \in \mathbb{C}$  temos  $T_{\psi(r,s,t)}M_0 = T_{\psi(\tilde{r},s,t)}M_0$ , então existem  $a_i \in \mathbb{C}$ ,  $i = 0, \dots, n-3$  e  $b \in \mathbb{C}^*$  tal que

$$\tilde{r}\alpha' + (1-\tilde{r})\frac{\partial \gamma}{\partial t} = a_0(\alpha - \gamma) + \sum_{i=1}^{n-3} a_i \frac{\partial \gamma}{\partial s_i} + b(r\alpha' + (1-r)\frac{\partial \gamma}{\partial t}).$$

Observe que os vetores  $\left\{ \alpha - \gamma, \frac{\partial \gamma}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial \gamma}{\partial s_{n-3}}, \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \alpha' \right\}$  são linearmente independentes (já que  $\gamma$  é uma parametrização local de  $\Sigma$ ). Igualando os coeficientes de tais vetores na igualdade acima a zero, obtemos que  $r = \tilde{r}$ , ou seja, as folhas de  $\mathcal{G}$  não estão contidas em fibras de  $G_{\mathcal{F}}$ . Mas isto contradiz a hipótese do teorema. Logo  $\eta_{E_1}$  é tangente à  $\mathcal{F}_{E_1}$ . ■

### 4.3 Folheações Degeneradas em $\mathbb{P}^3$

A classificação de folheações degeneradas em  $\mathbb{P}^3$  tem um papel importante no estudo das componentes irredutíveis do espaço de folheações de grau dois ([CLn], Teorema D). Apresentaremos tal classificação utilizando a classificação



de folheações por retas em  $\mathbb{P}^3$ .

**Teorema 4.15** [CLn] *Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação degenerada em  $\mathbb{P}^3$ , então temos uma das seguintes possibilidades:*

1.  $\mathcal{F}$  admite integral primeira racional da forma

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{P}^3 &\dashrightarrow \mathbb{P}^1 \\ (x_0 : \dots : x_3) &\mapsto (x_2P(x_0, x_1) - Q(x_0, x_1) : x_3P(x_0, x_1) - R(x_0, x_1)). \end{aligned}$$

2.  $\mathcal{F}$  é pull-back linear de uma folheação em  $\mathbb{P}^2$ .

*Prova.* Se  $\mathcal{F}$  tem posto um, então as folhas de  $\mathcal{F}$  são subconjuntos abertos de espaços lineares (fibras de  $G_{\mathcal{F}}$ ). Neste caso é fácil ver que  $\mathcal{F}$  é um pencil de hiperplanos.

Se  $\mathcal{F}$  tem posto dois, seja  $\mathcal{G}$  a folheação por retas definida pelas fibras de  $G_{\mathcal{F}}$ . Se  $\mathcal{G}$  tem uma singularidade isolada  $p$  então  $\text{Im}(G_{\mathcal{F}}) \subset p^* \cong \mathbb{P}^2$ , logo  $\mathcal{F}$  é pull-back linear de uma folheação em  $\mathbb{P}^2$ . Portanto, podemos supor que  $\mathcal{G}$  não possui singularidades isoladas.

Seja  $E$  uma componente irredutível de  $|H_{\mathcal{G}}|$  e  $M_0$  o saturado de um germe de folha genérica de  $\mathcal{F}$  por  $\mathcal{G}$ . Consideremos

$$\Delta_{M_0}^*(L) := f^* \Delta_{M_0}(L).$$

Sendo  $\ker(df(p)) = T_p \eta_E$  então  $p \in \Delta_{M_0}^*(L) \cap E$  se, e somente se,  $T_p \eta_E = T_p \mathcal{F}_E$ . Portanto  $\Delta_{M_0}^*(L) \cap E$  é não vazio para o saturado  $M_0$  de um germe de folha genérica de  $\mathcal{F}$  se, e somente se,  $\mathcal{F}_E = \eta_E$ . Pela Proposição 4.12,  $\Delta_{M_0}^*(L) \cap E$  é não vazio para algum  $E$ , logo  $\mathcal{F}_E = \eta_E$  para alguma componente irredutível  $E$  de  $|H_{\mathcal{G}}|$ .

Pela Proposição 4.4 temos

$$H_{\mathcal{G}} = E_1 + E_2, \quad H_{\mathcal{G}} = 2E \quad \text{ou} \quad H_{\mathcal{G}} = E$$

e  $\Delta_{\mathcal{G}}$  tem dimensão pura 1.

Suponhamos  $H_{\mathcal{G}} = 2E$  e denotamos  $C = f(E)$ . Podemos supor que  $C$  é uma reta e  $\mathcal{G}$  coincide com a folheação de tipo (3) do Teorema 4.10. Se  $\mathcal{F}_E := (f^* \mathcal{F})|_E$  então pela observação feita no parágrafo acima obtemos  $\mathcal{F}_E = \eta_E$ . Isto implica que a projeção  $\phi_E : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow C$  é uma integral primeira racional de  $\mathcal{F}$ . Mas as fibras de  $\phi_E$  são planos contendo  $C$ , i.e.,  $\mathcal{F}$  coincide com o pencil de planos contendo  $C$ . Neste caso,  $\mathcal{F}$  é pull-back linear de uma folheação radial em  $\mathbb{P}^2$  e portanto estamos no caso (2) do enunciado do teorema.

Suponhamos  $H_{\mathcal{G}} = E$  e denotamos  $C = f(E)$ . Pelo Teorema 4.10,  $C$  é uma cúbica torcida e  $\mathcal{G}$  é formada pelas retas secantes de  $C$ . Novamente, devemos ter  $\mathcal{F}_E = \eta_E$ . Sendo que uma reta genérica  $g^{-1}(L)$  intersecta  $E$  em dois pontos distintos, obtemos que  $\Delta_{M_0}^*(L)$  consiste em dois pontos distintos. O que contradiz a Proposição A.4. Portanto este caso não acontece.

Suponhamos que  $H_{\mathcal{G}} = E_1 + E_2$  e denotamos  $C_i = f(E_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Afirmamos que  $C_1 \neq C_2$ . De fato, suponha por contradição que  $C_1 = C_2$ . O cone  $F_p$ ,  $p \in C$ , formado pelas retas invariantes por  $\mathcal{G}$  que passam por  $p$  é irredutível (já que  $C$  é irredutível). Se  $N_i$  é uma componente irredutível de  $f|_{E_i}$ ,  $i = 1, 2$ . Então as imagens por  $f$ ,  $f(g^{-1}(g(N_i)))$ ,  $i = 1, 2$ , são cones irredutíveis distintos formados por retas invariantes por  $\mathcal{G}$  que passam por  $p$ . Isto é absurdo, já que  $F_p$  é irredutível.

Podemos supor que  $H_{\mathcal{G}} = E_1 + E_2$  e  $C_i = f(E_i)$ ,  $i = 1, 2$  com  $C_1 \neq C_2$ . Pelo Teorema 4.10 podemos supor que  $C_1$  é uma reta. Se  $\mathcal{F}_{E_i} := (f^*\mathcal{F})|_{E_i}$ , então como já foi observado  $\mathcal{F}_{E_1} = \eta_{E_1}$  ou  $\mathcal{F}_{E_2} = \eta_{E_2}$ .

Se  $\mathcal{F}_{E_1} = \eta_{E_1}$  então a projeção  $\phi_{E_1} : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow C_1$  é uma integral primeira racional de  $\mathcal{F}$  e resultado segue do Exemplo 4.13 e do Teorema 4.14. Neste caso, estamos no caso (1) do enunciado do teorema.

Se  $\mathcal{F}_{E_2} = \eta_{E_2}$  então a projeção  $\phi_{E_2} : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow C_2$  é uma integral primeira racional de  $\mathcal{F}$  e como as fibras de  $\phi_{E_2}$  são planos contendo  $C_1$ , segue que  $\mathcal{F}$  é um pencil de planos e estamos no caso (2) do teorema. ■

## 5

### Folheações Degeneradas em $\mathbb{P}^4$

#### 5.1

##### Generalidades

Se  $\mathcal{F}$  é uma folheação de posto no máximo dois em  $\mathbb{P}^n$ , então temos uma das seguintes possibilidades (veja [CLn], Teorema B):

1.  $\mathcal{F}$  admite integral primeira racional;
2.  $\mathcal{F}$  é pull-back linear de uma folheação em  $\mathbb{P}^2$ .

De fato, se  $\Sigma$  é um espaço linear de dimensão três genérico, então  $\mathcal{F}|_{\Sigma}$  também tem posto no máximo dois. Logo pelo Teorema 4.15,  $\mathcal{F}|_{\Sigma}$  satisfaz uma das possibilidades acima. O resultado segue de ([CLn], Lemas 2 e 3).

Neste capítulo vamos estudar folheações de posto três em  $\mathbb{P}^4$ . Neste caso, as fibras de  $G_{\mathcal{F}}$  definem uma folheação por retas  $\mathcal{G}$ . Como foi observado, temos o seguinte diagrama associado à  $\mathcal{G}$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & f & \\
 & & & \curvearrowright & \\
 B \times_{B'} \Lambda' & \xrightarrow{\phi^*} & \Lambda' & \xrightarrow{f'} & \mathbb{P}^4 \\
 g \downarrow & & g' \downarrow & & \\
 B & \xrightarrow{\phi} & B' & & 
 \end{array}$$

onde  $\phi : B \rightarrow B'$  é a resolução de família de retas  $B' \subset \mathbb{G}(1, 4)$ . O divisor  $R_{\mathcal{G}}$  de pontos de ramificação de  $f$  pode ser decomposto como  $R_{\mathcal{G}} = H_{\mathcal{G}} + V_{\mathcal{G}}$  onde  $H_{\mathcal{G}}$  é formado por componentes horizontais (i.e.,  $g|_{|H_{\mathcal{G}}|}$  tem posto 3 em um aberto denso). Se  $L \in B$ , por simplicidade, continuamos denotando por  $L \subset \mathbb{P}^4$  a reta associada invariante por  $\mathcal{G}$ . A Proposição 4.4 diz que se  $L \in B$  e  $g^{-1}(L) \not\subset |R_{\mathcal{G}}|$ , então  $\Delta_{\mathcal{G}}(L)$  é um divisor em  $L$  de grau três.

#### 5.2

##### Os Exemplos

Folheação degeneradas podem ser construídas a partir de folheações por retas. No que segue, daremos alguns exemplos de folheações de posto três em

$\mathbb{P}^4$ , depois mostraremos que estes englobam todos os casos que possivelmente não admitem integral primeira racional.

Seja  $M$  o germe de uma subvariedade complexa de codimensão um invariante por  $\mathcal{F}$  e  $M_0$  o saturado de  $M$  por  $\mathcal{G}$ . Pela classificação de variedades de posto dois em  $\mathbb{P}^4$  (Teorema A.6) temos as seguintes possibilidades:

1.  $M_0$  é um cone;
2.  $M_0$  é um join de duas curvas;
3.  $M_0$  é uma união de planos (não-osculadores) contendo as retas tangentes de uma curva  $C$ , ou seja,  $M_0$  é um band sobre  $C$ ;
4. Existem uma curva  $C$  e uma superfície  $S$  tal que  $M_0$  é formada por retas tangentes à  $S$  que intersectam  $C$ ;
5. Existem duas superfícies  $S_1, S_2$  tal que  $M_0$  é formada por retas tangentes à estas. Possivelmente  $S_1 = S_2$ .

**Observação 5.1** Se uma folha genérica de  $\mathcal{F}$  é do tipo (4) ou (5) acima, então a família de retas definida por  $\mathcal{G}$  seria formada por retas tangentes a uma superfície contida em  $\Delta_{\mathcal{G}}$ . Mas tal família não define uma folheação por retas em  $\mathbb{P}^4$  (veja [DeP5], Proposição 1.3).

No que segue, continuamos com a Notação 4.7 e separamos os exemplos abaixo de acordo com o tipo de folha genérica. Estes podem ser: cones, joins ou bands.

### 5.2.1

#### **Cones**

**Exemplo 5.2** O pull-back por uma projeção linear  $\mathbb{P}^4 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$  de uma folheação não-degenerada em  $\mathbb{P}^3$  é uma folheação de posto três em  $\mathbb{P}^4$ . A folheação por retas associada é formada pela família de retas contendo o centro da projeção linear.

**Observação 5.3** Em todos os exemplos abaixo, se  $\mathcal{F}$  não admite integral primeira racional, então esta deve ter posto três. De fato, se  $\mathcal{F}$  não tem posto três então podemos supor que  $\mathcal{F}$  tem posto dois, pois, toda folheação de posto um é um pencil de hiperplanos (logo possui integral primeira racional). Pela classificação de folheações de posto dois  $\mathcal{F}$  deveria ser pull-back linear de uma folheação em  $\mathbb{P}^2$ , ou seja, as fibras da aplicação de Gauss associada à  $\mathcal{F}$  são

planos contendo uma reta (o centro da projeção linear). Mas toda folheação  $\mathcal{F}$  construída a seguir provém de uma folheação por retas  $\mathcal{G}$  cujo as folhas estão contidas nas fibras da aplicação de Gauss de  $\mathcal{F}$ . Portanto uma reta genérica invariante por  $\mathcal{G}$  deveria intersectar o centro da projeção linear. Mas para tal folheação  $\mathcal{G}$ , não existe uma reta fixa tal que uma reta genérica invariante por  $\mathcal{G}$  intersecta esta. Portanto  $\mathcal{F}$  não pode ter posto dois.

### 5.2.2

#### Joins

**Exemplo 5.4** Seja  $\mathcal{G}$  uma folheação por retas em  $\mathbb{P}^4$  definida pela família de retas que intersectam uma superfície irreduzível  $S$  e uma curva irreduzível  $C$  distinta de uma reta. Neste caso, pela Observação 4.5 temos

$$H_{\mathcal{G}} = E_1 + 2E_2, \quad S = f(E_1) \quad \text{e} \quad C = f(E_2).$$

Folheações por retas em  $\mathbb{P}^4$  com as propriedades acima foram completamente classificadas em [Mar2, DeP2], em todos os casos, se  $S$  não é um plano então  $C$  é uma curva planar ([Mar2], pag.396; [DeP2], Lema 2).

Consideremos a projeção ao longo das folhas de  $\mathcal{G}$

$$\phi_{E_1} : \mathbb{P}^4 \dashrightarrow S.$$

Definimos  $\mathcal{F} = \phi_{E_1}^*(\eta)$ , onde  $\eta$  é uma folheação em  $S$ . Sendo  $\phi_{E_1}$  uma aplicação racional,  $\mathcal{F}$  admite integral primeira racional se, e somente se,  $\eta$  admite integral primeira racional.

Observe que as folhas de  $\mathcal{F}$  são joins  $J(C, N)$  onde  $N$  é folha de  $\eta$ . Mais ainda, o join de curvas distintas de retas, não contidas em um mesmo espaço linear de dimensão três é uma variedade de dimensão três e posto dois. Segue:

1. Se  $S$  é um plano e  $\eta$  é não-degenerada, então  $\mathcal{F}$  tem posto três (veja também o Exemplo 4.13 e o Teorema 4.14).
2. Se  $C$  é uma curva planar, seja  $\Sigma$  o plano contendo  $C$  e  $\pi \cong \mathbb{P}^3 \in \Sigma^*$  genérico. Então pelo Teorema 4.10,  $\pi \cap S$  contém uma reta  $l_\pi$  e  $\mathcal{G}|_\pi$  é formada pela família de retas que intersectam  $C$  e  $l_\pi$ . Se  $l_\pi$  não é invariante por  $\eta$  para  $\pi$  genérico, então  $\mathcal{F}$  tem posto três.

Em todos os casos, segue da Observação 5.3 que se  $\eta$  não possui integral primeira racional, então  $\mathcal{F}$  tem posto três.

**5.2.3  
Bands**

**Exemplo 5.5** Seja  $C$  uma curva planar distinta de uma reta e  $\Sigma$  o plano contendo  $C$ . Considere um morfismo não-constante  $\psi : \Sigma^* \cong \mathbb{P}^1 \rightarrow C$  e para cada  $\pi \in \Sigma^*$  seja  $B_\pi$  a família de retas contidas em  $\pi$  que contém o ponto  $\psi(\pi)$ . A família de retas  $\overline{\cup_{\pi \in \Sigma^*} B_\pi}$  define uma folheação por retas  $\mathcal{G}$  em  $\mathbb{P}^4$ . Temos

$$H_{\mathcal{G}} = 3E, \quad C = f(E).$$

Se  $p \in C$  é um ponto suave, denotamos por  $l_p$  a reta tangente à  $C$  em  $p$ .

Considere a família de planos  $\mathcal{P} \subset \mathbb{G}(2, 4)$  invariantes por  $\mathcal{G}$  definida por

$$\mathcal{P} = \overline{\cup_{\pi \in \Sigma^*} \cup_{\xi \in (l_{\psi(\pi)})^*_\pi} \xi}.$$

Definimos a superfície

$$X = \{(\pi, \xi) \in \Sigma^* \times \mathcal{P} \mid \xi \subset \pi\} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{G}(2, 4).$$

Observe que a primeira projeção  $\tau : X \rightarrow \Sigma^*$  tem fibra genérica isomorfa a  $\mathbb{P}^1$  e considere a projeção natural

$$\begin{aligned} \phi_X : \mathbb{P}^4 &\dashrightarrow X \\ p \in \xi &\mapsto (\pi, \xi); \quad \xi \subset \pi. \end{aligned}$$

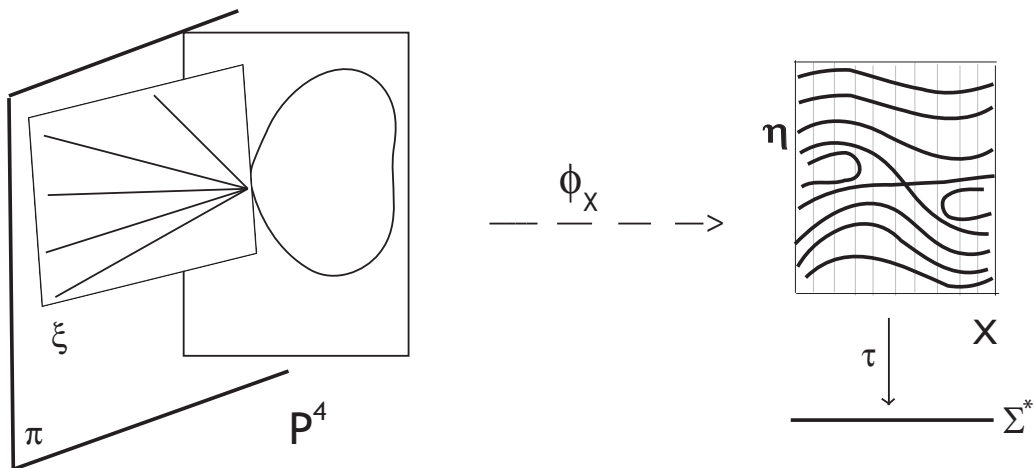


Figura 5.1: Exemplo 5.5

Definimos  $\mathcal{F} = \phi_X^*(\eta)$ , onde  $\eta$  é uma folheação qualquer em  $X$ . Como  $\phi_X$  é uma aplicação racional,  $\mathcal{F}$  admite integral primeira racional se, e somente

se,  $\eta$  admite integral primeira racional.

Por construção, as folhas de  $\mathcal{F}$  são bands sobre a curva  $C$ . Mais ainda, segue da Observação 5.3 que se  $\eta$  não admite integral primeira racional então  $\mathcal{F}$  tem posto três.

**Exemplo 5.6** Seja  $S = S_{1,2}$  o scroll racional normal de grau três em  $\mathbb{P}^4$ , i.e., uma projeção linear da superfície Veronese  $V \subset \mathbb{P}^5$  com centro  $p \in V$

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ & \uparrow v & \searrow \tau_p \\ \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\xi} & S \end{array}$$

Considere o sistema linear de dimensão dois,  $\xi_*|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|$  cujo um elemento genérico é uma cônica irreduzível em  $S$ . A família  $\mathcal{P} \subset \mathbb{G}(2,4)$  de planos que contém tais cônicas define uma folheação por planos em  $\mathbb{P}^4$ .

Seja  $\theta$  uma folheação não-degenerada em  $\check{\mathbb{P}}^2$  e

$$\begin{aligned} G_\theta : \check{\mathbb{P}}^2 &\dashrightarrow \mathbb{P}^2 \\ l &\mapsto G_\theta(l) \in l^* \end{aligned}$$

a aplicação de Gauss associada. Definimos a aplicação racional  $\psi_\theta := \xi \circ G_\theta \circ \xi_*^{-1}$

$$\begin{array}{ccc} \xi_*|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)| & \dashrightarrow^{\psi_\theta} & S \\ \uparrow \xi_* & & \uparrow \xi \\ \check{\mathbb{P}}^2 = |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)| & \dashrightarrow^{G_\theta} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

Sendo  $G_\theta(l) \in l^*$ , então  $\psi_\theta(C) \in |C|$  ( $|C|$  denota o suporte de  $C$ ) para  $C \in \xi_*|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|$ . Portanto a família de retas

$$B := \overline{\cup_{C \in \xi_*|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|} \psi_\theta(C)_{\pi_C}^*}$$

onde  $\pi_C$  denota o plano contendo  $|C|$ , define uma folheação por retas  $\mathcal{G}$  em  $\mathbb{P}^4$  tal que  $\mathcal{G}|_{\pi_C}$  consiste na folheação radial por  $\psi_\theta(C) \in |C|$  (veja a figura 5.2).

Definimos a folheação de codimensão um em  $\mathbb{P}^4$ ,  $\mathcal{F} := \varphi^*(\theta)$  onde  $\varphi$  é uma aplicação racional definida da seguinte forma

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}^4 &\dashrightarrow \check{\mathbb{P}}^2 \\ q \in \pi_C &\mapsto \xi_*^{-1}(C). \end{aligned}$$

Vamos analisar as folhas de  $\mathcal{F}$ . Sendo que  $G_\theta$  é genericamente um difeomorfismo local, a imagem direta de  $\theta$  por  $G_\theta$  para  $\mathbb{P}^2$  define uma web

$\theta^\vee$  (a web dual de  $\theta$ ) em  $\mathbb{P}^2$  e por conseguinte uma web  $\xi_*\theta^\vee$  em  $S$ , já que  $\xi$  é uma aplicação birracional.

Consideremos a projeção ao longo das folhas de  $\mathcal{G}$

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{P}^4 &\dashrightarrow S \\ p \in \pi_C &\mapsto \psi_\theta(C). \end{aligned}$$

Seja  $p \in S$  um ponto genérico, existe uma vizinhança  $U \subset S$  de  $p$  onde  $(\xi_*\theta^\vee)|_U$  é totalmente decomponível, ou seja, existem folheações  $\eta_1, \dots, \eta_k$  transversais, tangentes à  $\xi_*\theta^\vee$  onde  $k = \deg(\theta)$ . Observe que

$$\phi^{-1}(p) = \cup_{i=1}^k \pi_{C_i}$$

onde  $\eta_i$  é tangente à  $|C_i|$  no ponto  $p$  e

$$\phi^{-1}(U) = \cup_{i=1}^k W_i$$

com  $\pi_{C_i} \subset W_i$ .

Segue da comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^4 & \xrightarrow{\xi_*|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)} & S \\ \downarrow \varphi & \uparrow \xi_* & \uparrow \xi \\ \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{G_\theta} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

que  $\mathcal{F}|_{W_i} = \phi^*(\eta_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Portanto, por construção, uma folha de  $\mathcal{F}|_{W_i}$  é um band sobre uma curva invariante por  $\eta_i$ .

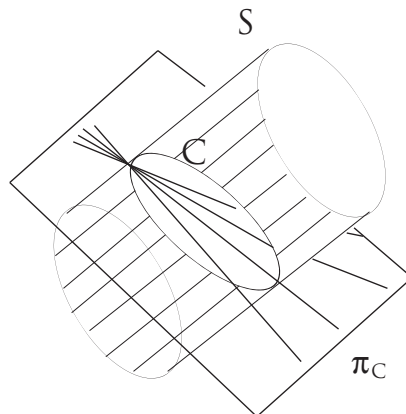


Figura 5.2: Exemplo 5.6

Observe que  $\mathcal{F}$  admite integral primeira racional se, e somente se,  $\theta$



admite integral primeira racional. Observe também que se  $\theta$  tem grau um, então  $\mathcal{F}$  é o pull-back de uma folheação em  $S$ . Mais ainda, segue da Observação 5.3 que se  $\theta$  não admite integral primeira racional então  $\mathcal{F}$  tem posto três.

**Exemplo 5.7** Sejam  $\Sigma \cong \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^4$  e  $\psi : \Sigma^* \cong \mathbb{P}^1 \longrightarrow \Sigma^\vee \cong \mathbb{P}^2$  um morfismo não-constante. Consideremos a superfície

$$X = \{(\pi, p) \in \Sigma^* \times \Sigma \mid p \in \psi(\pi) \subset \mathbb{P}^2\} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$$

Seja  $R$  o divisor de pontos de ramificação da projeção

$$\begin{aligned} \tau_2 : X &\longrightarrow \Sigma \\ (\pi, p) &\longmapsto p. \end{aligned}$$

Podemos escrever  $R = D + V$ , onde  $D$  é o divisor associado às componentes horizontais de  $R$  e  $V$  às componentes verticais de  $R$ .

Seja  $\eta$  uma folheação de Riccati em  $X$  (veja [Bru], Capítulo 4) com respeito a fibração

$$\begin{aligned} \tau_1 : X &\longrightarrow \Sigma^* \\ (\pi, p) &\longmapsto \pi \end{aligned}$$

tangente ao núcleo de  $d\tau_2$  ao longo de  $|D|$ , i.e., se  $v \in H^0(X, TX \otimes T_\eta^*)$  é um campo tangente à  $\eta$ , então

$$d\tau_2(\pi, p)v(\pi, p) = 0,$$

para  $(\pi, p) \in |D|$  genérico.

Antes de definir a folheação por retas faremos duas afirmações.

**Afirmção 1** *Seja  $v_\pi$  a restrição de  $v$  a uma fibra  $\tau_1^{-1}(\pi)$  não invariante por  $\eta$ . A condição de  $\eta$  ser tangente ao núcleo de  $d\tau_2$  ao longo de  $|D|$  implica que  $\tau_{2*}(v_\pi)$  se estende a um campo de direções sem tangência com a reta  $\psi(\pi)$ .*

*Prova.* Primeiro observe que  $\tau_2(|D|)^\vee = \text{Im}(\psi) \subset \Sigma^\vee$ , ou seja, consideremos os seguintes casos:

1.  $\tau_2(|D|)$  consiste em um único ponto  $p \in \Sigma$ , se  $\text{Im}(\psi)$  é uma reta.
2.  $\tau_2(|D|)$  é uma curva e a família de retas definidas por  $\text{Im}(\psi)$  são tangentes à  $\tau_2(|D|)$ .

*caso 1.* A menos de uma parametrização local de  $X$  em uma vizinhança de um ponto genérico  $(\pi, p) \in |D|$ , podemos supor que  $(\pi, p) = (0, 0)$ ,  $\tau_1^{-1}(\pi) = \{x = 0\}$  e

$$\begin{aligned} \tau_2 : (\mathbb{C}^2, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0) \\ (x, y) &\longmapsto (y, xy). \end{aligned}$$

Se  $v_\pi(y) = \frac{\partial}{\partial x} + a(y)\frac{\partial}{\partial y}$ ,  $a \in \mathcal{O}_0$ , então a condição de tangência com o núcleo de  $d\tau_2$  ao longo de  $|D|$  implica que  $a(0) = 0$ , i.e.,  $a(y) = y\tilde{a}(y)$ ,  $\tilde{a} \in \mathcal{O}_0$ . Segue que

$$d\tau_2(0, y)v_\pi(y) = y\frac{\partial}{\partial x} + a(y)\frac{\partial}{\partial y} = y\left(\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{a}(y)\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Portanto  $\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{a}(y)\frac{\partial}{\partial y}$  é uma extensão de  $\tau_{2*}(v_\pi)$  sem tangências com a reta  $\psi(\pi)$ .

*caso 2.* Em um ponto genérico  $(\pi, p) \in |D|$  podemos supor que a reta associada à  $\psi(\pi)$  possui tangência quadrática com  $\tau_2(|D|)$  em  $p$ . Portanto, a menos de uma parametrização local de  $X$  em uma vizinhança de  $(\pi, p)$  podemos supor que  $(\pi, p) = (0, 0)$ ,  $\tau_1^{-1}(\pi) = \{x = 0\}$  e

$$\begin{aligned} \tau_2 : (\mathbb{C}^2, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0) \\ (x, y) &\longmapsto (x + y, xy), \end{aligned}$$

ou seja, uma parametrização local da família de retas tangentes à cônica  $\{x^2 - 4y = 0\}$ .

Se  $v_\pi(y) = \frac{\partial}{\partial x} + a(y)\frac{\partial}{\partial y}$ ,  $a \in \mathcal{O}_0$ , então a condição de tangência com o núcleo de  $d\tau_2$  ao longo de  $|D|$  implica que  $1 + a(0) = 0$ , i.e.,  $1 + a(y) = y\tilde{a}(y)$ ,  $\tilde{a} \in \mathcal{O}_0$ . Segue que

$$d\tau_2(0, y)v_\pi(y) = (1 + a(y))\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} = y\left(\tilde{a}(y)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Portanto  $\tilde{a}(y)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$  é uma extensão de  $\tau_{2*}(v_\pi)$  sem tangências com a reta  $\psi(\pi)$ . ■

**Afirmção 2** *Se ainda denotamos por  $\tau_{2*}(v_\pi)$  sua extensão, então existe uma folheação radial  $\theta_\pi$  por um ponto  $p_\pi \in \Sigma$  tangente à  $\tau_{2*}(v_\pi)$  ao longo da reta  $\psi(\pi) \subset \Sigma$ .*

*Prova.* O campo normal em  $\psi(\pi)$ ,  $\tau_{2*}(v_\pi)$  pode ser estendido a uma folheação  $\theta_\pi$  em uma vizinhança  $U$  de  $\psi(\pi) \subset \Sigma$ . Como o complementar de  $U$  é Stein,  $\theta_\pi$

se estende à uma folheação holomorfa em  $\Sigma$  que continuamos denotando por  $\theta_\pi$ . Mas esta não possui pontos de tangência com  $\psi(\pi) \subset \Sigma$ , logo trata-se de uma folheação de grau zero, i.e., radial por um ponto  $p_\pi \in \Sigma$ . ■

Seja  $\varphi : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{G}(1, 4)$  um morfismo tal que  $\varphi(\pi) \subset \pi$  e  $\varphi(\pi) \cap \Sigma = p_\pi$ , onde

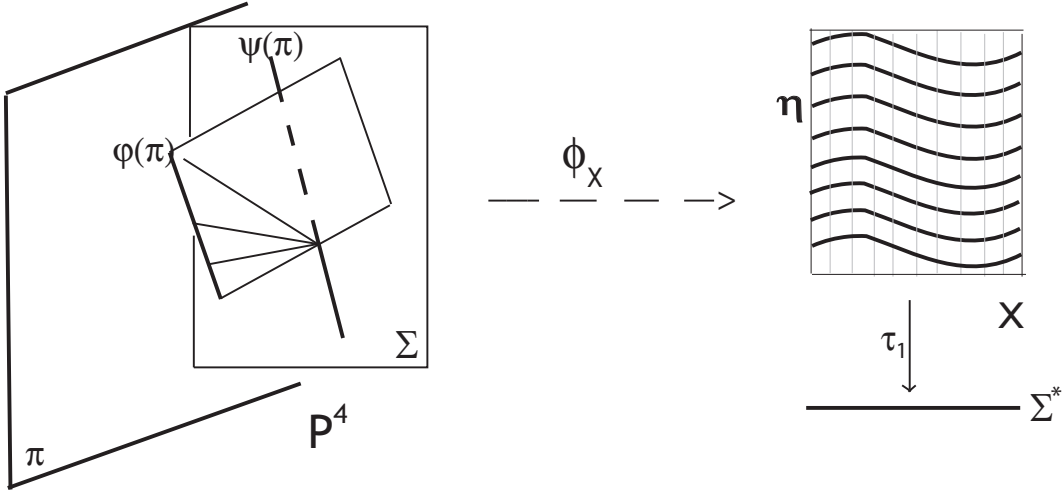


Figura 5.3: Exemplo 5.7

continuamos denotando  $\varphi(\pi)$  a reta associada vista como subconjunto de  $\mathbb{P}^4$ . Tal família de retas define uma superfície

$$S := \cup_{\pi \in \Sigma^*} \varphi(\pi) \subset \mathbb{P}^4.$$

Se  $\tau_1^{-1}(\pi)$  não é invariante por  $\eta$ , então a família de retas  $B_\pi$  que intersectam  $\varphi(\pi)$  e  $\psi(\pi)$  define uma folheação por retas em  $\pi$  e portanto

$$\overline{\cup_{\pi \in \Sigma^*} B_\pi}$$

define uma folheação por retas  $\mathcal{G}$  em  $\mathbb{P}^4$ .

Como  $\Sigma$  é uma componente fundamental de  $\mathcal{G}$ , existe uma componente horizontal  $E \subset \Lambda$  tal que  $\Sigma = f(E)$ . A projeção ao longo das folhas de  $\mathcal{G}$

$$\phi_E : \mathbb{P}^4 \dashrightarrow \Sigma,$$

define uma aplicação racional

$$\begin{aligned} \phi_X : \mathbb{P}^4 &\dashrightarrow X \\ p \in \pi &\mapsto (\pi, \phi_E(p)). \end{aligned}$$

Definimos  $\mathcal{F} = \phi_X^*(\eta)$ . Como  $\phi_X$  é uma aplicação racional,  $\mathcal{F}$  admite integral primeira racional se, e somente se,  $\eta$  admite integral primeira racional.

Por construção, uma folha de  $\mathcal{F}$  é um band sobre uma curva  $N \subset \Sigma$ , onde  $N$  é a imagem direta de uma folha de  $\eta$  por  $\tau_2$ . Mais ainda, segue da Observação 5.3 que se  $\eta$  não admite integral primeira racional então  $\mathcal{F}$  tem posto três.

Observe também que se  $\tau_2(|D|)$  consiste em um único ponto, então  $|D|$  é invariante por  $\eta$  e  $\mathcal{F}$  é pull-back por  $\phi_E$  de uma folheação em  $\Sigma$ .

**Exemplo 5.8** Considere  $\Sigma \cong \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^4$  e seja  $\psi : \Sigma^* \cong \mathbb{P}^1 \longrightarrow |\mathcal{O}_\Sigma(d)|$ ,  $d > 1$ , um morfismo não-constante. Suponhamos que exista um morfismo  $\mu : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma$  tal que  $\mu(\pi) \in \psi(\pi)$  e  $\mu(\pi)$  é um ponto de multiplicidade  $(d-1)$  de  $\psi(\pi)$  (por simplicidade, continuamos denotando por  $\psi(\pi) \subset \Sigma$  a respectiva curva associada). A superfície

$$X = \{(\pi, p) \in \Sigma^* \times \Sigma \mid p \in \psi(\pi)\} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$$

define uma fibração sobre  $\Sigma^*$

$$\begin{aligned} \tau_1 : X &\longrightarrow \Sigma^* \\ (\pi, p) &\longmapsto \pi. \end{aligned}$$

Consideremos a projeção

$$\begin{aligned} \tau_2 : X &\longrightarrow \Sigma \\ (\pi, p) &\longmapsto p. \end{aligned}$$

Seja  $\theta_\pi$  a folheação  $\Sigma$  radial por  $\mu(\pi)$ . Sendo que  $\tau_2$  é genericamente um difeomorfismo local, existe uma única folheação  $\eta$  em  $X$  tal que o conjunto de pontos de tangência entre  $\tau_2^*(\theta_\pi)$  e  $\eta$  contém a fibra  $\tau_1^{-1}(\pi)$  para  $\pi \in \Sigma^*$  genérico. O conjunto de tangências entre  $\eta$  e  $\tau_1^{-1}(\pi)$  está concentrado em  $\tau_2^{-1}(\mu(\pi))$ , ou seja, o conjunto de tangências entre  $\eta$  e a fibração determinada por  $\tau_1$  coincide com  $\tau_2^*(\text{Im}(\mu))$ .

Fixemos um morfismo  $\varphi : \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{G}(1, 4)$  tal que  $\varphi(\pi) \subset \pi$  e  $\varphi(\pi) \cap \Sigma = \mu(\pi)$ , onde continuamos denotando  $\varphi(\pi)$  a reta associada vista como subconjunto de  $\mathbb{P}^4$ . Tal família de retas define uma superfície

$$S := \bigcup_{\pi \in \Sigma^*} \varphi(\pi) \subset \mathbb{P}^4.$$

A família  $B_\pi$  de retas que intersectam  $\varphi(\pi)$  e  $\psi(\pi)$  define uma folheação por retas em  $\pi$  e portanto

$$\overline{\bigcup_{\pi \in \Sigma^*} B_\pi}$$

define uma folheação por retas  $\mathcal{G}$  em  $\mathbb{P}^4$ .

Como  $\Sigma$  é uma componente fundamental de  $\mathcal{G}$ , existe uma componente horizontal  $E \subset \Lambda$  tal que  $\Sigma = f(E)$ . A projeção ao longo das folhas de  $\mathcal{G}$

$$\phi_E : \mathbb{P}^4 \dashrightarrow \Sigma,$$

define uma aplicação racional

$$\begin{aligned} \phi_X : \mathbb{P}^4 &\dashrightarrow X \\ p \in \pi &\mapsto (\pi, \phi_E(p)). \end{aligned}$$

Definimos  $\mathcal{F} = \phi_E^*(\eta)$ . Como  $\phi_X$  é uma aplicação racional,  $\mathcal{F}$  admite integral primeira racional se, e somente se,  $\eta$  admite integral primeira racional.

Por construção, uma folha de  $\mathcal{F}$  é um band sobre uma curva  $N \subset \Sigma$ , onde  $N$  é a imagem direta de uma folha de  $\eta$  por  $\tau_2$ . Mais ainda, segue da Observação 5.3 que se  $\eta$  não admite integral primeira racional então  $\mathcal{F}$  tem posto três.

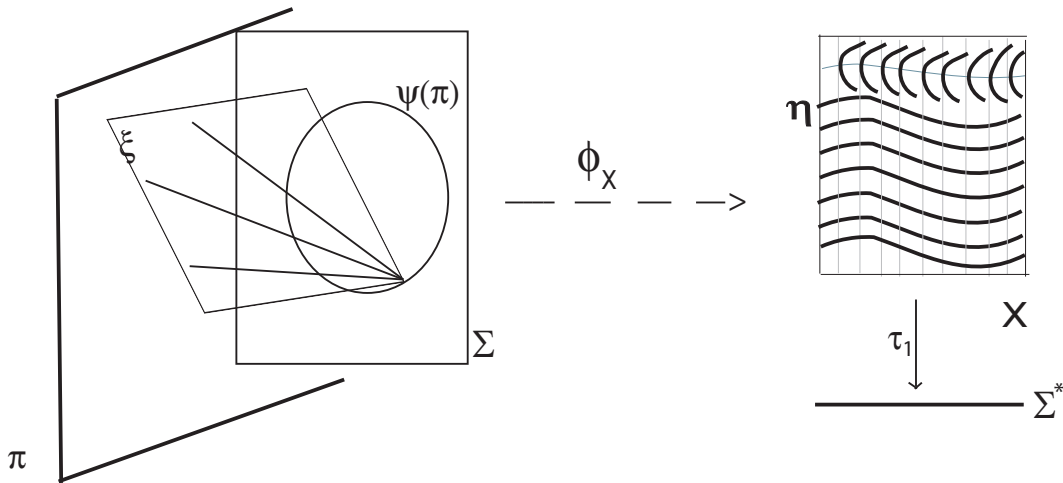


Figura 5.4: Exemplo 5.8

### 5.3

#### Teorema de Classificação

**Teorema 5.9** *Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação de posto três em  $\mathbb{P}^4$ . Então temos uma das seguintes possibilidades:*

1.  $\mathcal{F}$  admite integral primeira racional.
2.  $\mathcal{F}$  coincide com uma das folheações descritas nos exemplos da seção 5.2.

### 5.3.1 Estratégia da Prova

Se  $\mathcal{F}$  possui posto três, podemos considerar a folheação por retas  $\mathcal{G}$  definida pelas fibras de  $G_{\mathcal{F}}$ . Seja  $M_0$  o saturado de um germe de folha genérica de  $\mathcal{F}$  por  $\mathcal{G}$ , temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f_{M_0} := f \circ i_1 & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 \Lambda_{M_0} & \xrightarrow{i_1} & \Lambda & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^4 \\
 g_{M_0} \downarrow & & \downarrow g & & \\
 B_{M_0} & \xrightarrow{i_2} & B & & 
 \end{array}$$

onde  $B_{M_0} = g(M_0)$  e  $\Lambda_{M_0} = \Lambda|_{B_{M_0}}$ . O conjunto de pontos onde  $f$  não é imersão (resp.  $f_{M_0}$ ) define o divisor  $R_{\mathcal{G}} = H_{\mathcal{G}} + V_{\mathcal{G}}$  em  $\Lambda$  (resp.  $R_{M_0} = H_{M_0} + V_{M_0}$  em  $\Lambda_{M_0}$ ) tal que a imagem por  $f$  das componentes horizontais, i.e., componentes irredutíveis do suporte de  $H_{\mathcal{G}}$  (resp.  $H_{M_0}$ ) define o conjunto fundamental  $\Delta_{\mathcal{G}}$  de  $\mathcal{G}$  (resp. conjunto focal  $\Delta_{M_0}$  de  $M_0$ ).

Se  $L \in B_{M_0}$ , então  $H_{\mathcal{G}}$  (resp.  $H_{M_0}$ ) define um divisor  $\Delta_{\mathcal{G}}^*(L)$  (resp.  $\Delta_{M_0}^*(L)$ ) em  $g^{-1}(L)$  que pode ser visto como divisor em  $L \subset \mathbb{P}^4$  (já que  $f|_{g^{-1}(L)}$  é um isomorfismo), neste caso, denotamos por  $\Delta_{\mathcal{G}}(L)$  (resp.  $\Delta_{M_0}(L)$ ). Se  $g^{-1}(L) \not\subset |R_{\mathcal{G}}|$ , então

- $\Delta_{\mathcal{G}}(L)$  possui grau três (Proposição 4.4).
- $\Delta_{M_0}(L)$  possui grau dois (Proposição A.4).
- $\Delta_{M_0}(L) \leq \Delta_{\mathcal{G}}(L)$  (Proposição 4.12).

Se  $E$  é uma componente irredutível do suporte de  $H_{\mathcal{G}}$ , consideremos a folheação  $(f^*\mathcal{F})|_E$ . Sendo que uma reta genérica  $g^{-1}(L)$  é transversal à  $E$  e invariante por  $f^*\mathcal{F}$ , segue que  $(f^*\mathcal{F})|_E$  define uma folheação de codimensão um em  $E$ .

As fibras de  $f|_E$  definem uma folheação  $\eta_E$  de codimensão  $\dim f(E)$  em  $E$  e denotamos  $\eta_E \subset (f^*\mathcal{F})|_E$  quando  $\eta_E$  for tangente à  $(f^*\mathcal{F})|_E$ .

**Lema 5.10** *Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação de posto três em  $\mathbb{P}^4$  e  $\mathcal{G}$  a folheação por retas definida pelas fibras de  $G_{\mathcal{F}}$ . Se  $E$  é uma componente irredutível do suporte de  $H_{\mathcal{G}}$  tal que  $f(E)$  possui dimensão dois. Então*

$$\eta_E \subset (f^*\mathcal{F})|_E$$

se, e somente se,  $|\Delta_{M_0}^*(L)| \cap E$  é não-vazio para  $L \in B$  genérico.

*Prova.* Segue da Proposição 4.6 que

$$\ker df(x) \subset T_x E,$$

para um ponto genérico  $x \in E$ . Portanto  $\ker df(x) = T_x \eta_E$ , ou seja,  $T_x \eta_E \subset T_x(M_0 \cap E)$ , e somente se,  $x \in |\Delta_{M_0}^*(L)|$  (i.e.,  $f_{M_0}$  não é imersão em  $x$ ). ■

O lema anterior assume um papel fundamental, pois, se  $f(E)$  possui dimensão dois, então  $\eta_E \subset (f^* \mathcal{F})|_E$  implica que as fibras da projeção

$$\phi_E : \mathbb{P}^4 \dashrightarrow f(E)$$

ao longo das folhas de  $\mathcal{G}$ , são cones invariantes por  $\mathcal{F}$ .

A prova do Teorema consiste em analisar a relação entre o conjunto focal  $\Delta_{M_0}$  de  $M_0$  e as componentes irredutíveis do suporte de  $H_{\mathcal{G}}$ .

### 5.3.2

#### Prova do Teorema

Utilizaremos a notação da seção 5.3.1.

Se  $\mathcal{G}$  é radial por um ponto  $p \in \mathbb{P}^4$ , então como  $\mathcal{G}$  é tangente à  $\mathcal{F}$  segue que  $\text{Im}(G_{\mathcal{F}}) \subset p^\vee \cong \mathbb{P}^3$  (onde  $p^\vee \subset \check{\mathbb{P}}^4$  denota a família de hiperplanos que contém  $p$ ). Segue que  $\mathcal{F}$  é pull-back linear de uma folheação não-degenerada em  $\mathbb{P}^3$  pela projeção com centro em  $p$ . Portanto  $\mathcal{F}$  coincide com a folheação do Exemplo 5.2. De agora em diante vamos supor que  $\mathcal{G}$  não possui singularidades isoladas.

Como  $\Delta_{M_0}(L)$  possui grau dois, vamos analisar os seguintes casos separadamente:

$$(I) - \Delta_{M_0}(L) = p_1 + p_2.$$

$$(II) - \Delta_{M_0}(L) = 2p.$$

$$(I) - \Delta_{M_0}(L) = p_1 + p_2.$$

Agora podemos separar em dois casos de acordo com as componentes irredutíveis de  $H_{\mathcal{G}}$ .

-  $|H_{\mathcal{G}}|$  **possui apenas uma componente irredutível:** Digamos  $H_{\mathcal{G}} = E$ . A desigualdade

$$\Delta_{M_0}(L) \leq \Delta_{\mathcal{G}}(L),$$

implica que

$$\Delta_{\mathcal{G}}(L) = p_1 + p_2 + p_3$$

e  $|\Delta_{M_0}^*(L)| \cap E$  é não-vazio. Segue da Observação 4.5 - (1) que  $f(E)$  possui dimensão dois, logo pelo Lema 5.10 obtemos

$$\eta_E \subset (f^*\mathcal{F})|_E.$$

Mas isto contradiz a Proposição A.4, ou seja, neste caso  $M_0$  teria três pontos focais distintos. Portanto este caso não pode acontecer.

-  $|H_{\mathcal{G}}|$  **possui pelo menos duas componentes irredutíveis distintas:**

**Afirmção 3** *Se  $\Delta_{M_0}(L) = p_1 + p_2$ ,  $|H_{\mathcal{G}}|$  possui pelo menos duas componentes irredutíveis distintas e  $\Delta_{\mathcal{G}}$  possui dimensão pura dois, então  $\mathcal{F}$  admite integral primeira racional.*

*Prova.* Segue da hipótese

$$\Delta_{M_0}(L) = p_1 + p_2$$

e do Lema 5.10 que existem  $E_1, E_2$  componentes irredutíveis do suporte de  $H_{\mathcal{G}}$  com possivelmente  $E_1 = E_2$  tal que

$$\eta_{E_i} \subset (f^*\mathcal{F})|_{E_i}, \quad i = 1, 2.$$

Segue que  $H_{M_0} = F_1 + F_2$ , onde  $F_1, F_2$  são componentes irredutíveis distintas de  $\Lambda_{M_0}$  e invariantes por  $\eta_{E_1}, \eta_{E_2}$  respectivamente. Logo  $M_0$  é um join  $J(f(F_1), f(F_2))$ . Seja  $N_i, i = 1, 2$  uma folha de  $\eta_{E_i}$  tal que  $N_i \cap F_i \neq \emptyset$ . Fixamos  $i \in \{1, 2\}$ , como as folhas de  $\eta_i$  são algébricas,  $g^{-1}(g(N_i))$  intersecta  $F_j, i \neq j$ , em uma curva algébrica  $C_j$  não-invariante por  $\eta_{E_j}$ . Segue que  $M_0$  está contida no join  $J(f(C_1), f(C_2))$ . Portanto obtemos que uma folha genérica de  $\mathcal{F}$  é algébrica. O resultado segue do Teorema de Jouanolou [Jou]. ■

Resta analisar o caso que  $|H_{\mathcal{G}}|$  possui pelo menos duas componentes irredutíveis distintas e  $\Delta_{\mathcal{G}}$  possui uma componente fundamental de dimensão um, ou seja,

$$H_{\mathcal{G}} = E_1 + 2E_2, \quad \dim f(E_1) = 2 \quad \text{e} \quad \dim f(E_2) = 1.$$

Segue do Lema 5.10 que  $\eta_{E_1} \subset (f^*\mathcal{F})|_{E_1}$ . Denotamos  $S = f(E_1)$  e  $C = f(E_2)$ . Portanto as fibras  $\phi_{E_1}^{-1}(p)$  são cones sobre  $C$  invariantes por  $\mathcal{F}$ . Segue de ([CLnLPT], Lema 2.2) que existe uma folheação  $\eta$  em  $S$  tal que  $\mathcal{F} = \phi_{E_1}^*(\eta)$ . Logo  $\mathcal{F}$  coincide com uma das folheações descritas no Exemplo 5.4.



(II) -  $\Delta_{M_0}(L) = 2p$ .

Pela classificação de variedades de posto dois e pela Observação 5.1, podemos supor que  $M_0$  é um band, ou seja,  $M_0$  é formada por uma união de planos (não-osculadores) contendo as retas tangentes de uma curva  $C$  e além disso, é fácil ver que a folheação por retas  $\mathcal{G}$  restrita à um tal plano é radial por um ponto  $p \in C$ .

Como  $M_0$  é o saturado de um germe de folha genérica de  $\mathcal{F}$  por  $\mathcal{G}$ , a família  $\mathcal{P} \subset \mathbb{G}(2, 4)$  de tais planos define uma folheação por planos em  $\mathbb{P}^4$  invariantes por  $\mathcal{G}$ . Então separamos em três casos segundo o Teorema 4.11:

**Caso (1) do Teorema 4.11:**

Se existe uma reta  $l$  tal que  $\mathcal{P}$  é formada pela família de planos que contém  $l$ , então  $\text{Im}(G_{\mathcal{F}}) \subset l^* \cong \mathbb{P}^2 \subset \check{\mathbb{P}}^4$ . Neste caso,  $\mathcal{F}$  não possui posto três.

**Caso (2) do Teorema 4.11:**

Existe um plano  $\Sigma$  e um morfismo  $\psi : \Sigma^* \cong \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{G}(1, 4)$  não-constante tal que  $\mathcal{P}$  é formada pela família de planos

$$\overline{\bigcup_{\pi \in \Sigma^*} \bigcup_{\xi \in (\psi(\pi))_{\pi}^*} \xi}.$$

Sendo  $\mathcal{P}$  invariante por  $\mathcal{G}$ , existem morfismos

$$\varphi_{\pi} : (\psi(\pi))_{\pi}^* \longrightarrow \pi, \quad \varphi_{\pi}(\xi) \in \xi,$$

tal que  $\mathcal{G}|_{\xi}$  é formada pela família de retas que contém  $\varphi_{\pi}(\xi)$ . Temos as seguintes possibilidades:

(i)  $\psi(\pi) \subset \Sigma$ , para todo  $\pi \in \Sigma^*$  (veja a figura 5.5).

(i.a) Se  $\text{Im}\varphi_{\pi} = \psi(\pi)$ , então

$$H_{\mathcal{G}} = 3E, \quad f(E) = \Sigma.$$

Podemos supor que  $C^{\vee} := \text{Im}(\psi)$  é uma curva contida em  $\Sigma^{\vee}$ . Seja  $C \subset \Sigma$  a curva dual de  $C^{\vee}$ , i.e., a família de retas  $\psi(\pi) \subset \Sigma$  são tangentes à curva  $C$ .

Seja  $p \in \mathbb{P}^4$  um ponto genérico e  $M_0$  o saturado do germe de uma folha genérica de  $\mathcal{F}$  por  $\mathcal{G}$  contendo  $p$ . Sabemos que  $M_0$  é um band sobre uma curva  $C_{M_0}$ , i.e.,  $M_0$  é formada por uma união de planos contendo as retas tangentes de  $C_{M_0}$  e além disso,  $\mathcal{G}$  restrita

à um tal plano é radial por um ponto  $p \in C_{M_0}$ . Daí segue que  $C_{M_0}^\vee \subset C^\vee \subset \Sigma^\vee$ , portanto  $C_{M_0} \subset C$ . Mas isto contradiz a hipótese  $\text{Im}\varphi_\pi = \psi(\pi)$ . Portanto este caso não acontece.

- (i.b) Se  $\text{Im}\varphi_\pi = \{p_\pi\} \subset \psi(\pi)$ , então  $\mathcal{G}$  coincide com a folheação descrita no Exemplo 5.5, i.e.,

$$H_{\mathcal{G}} = 3E, \quad \dim f(E) = 1 \quad \text{e} \quad f(E) \subset \Sigma.$$

Portanto a projeção  $\phi_X : \mathbb{P}^4 \dashrightarrow X$  definida no Exemplo 5.5 possui fibras conexas tangentes à  $\mathcal{F}$ , segue de ([CLnLPT], Lema 2.2) que existe uma folheação  $\eta$  em  $X$  tal que  $\mathcal{F} = \phi^*(\eta)$ . Portanto  $\mathcal{F}$  coincide com uma das folheações descritas no Exemplo 5.5.

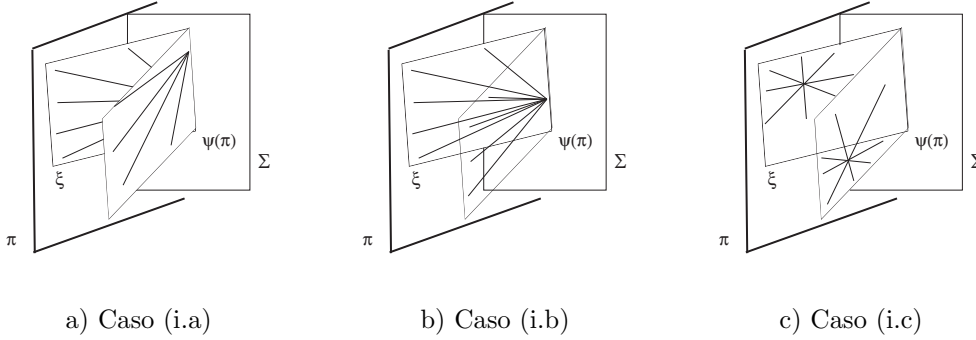


Figura 5.5: Caso (i).

- (i.c) Suponhamos  $\text{Im}\varphi_\pi \not\subset \psi(\pi)$ . Consideremos a superfície

$$S = \overline{\bigcup_{\pi \in \Sigma^*} \bigcup_{\xi \in (\psi(\pi))^*} \varphi_\pi(\xi)} \subset \mathbb{P}^4.$$

Seja  $p \in \mathbb{P}^4$  um ponto genérico e  $M_0$  o saturado do germe de uma folha genérica de  $\mathcal{F}$  por  $\mathcal{G}$  contendo  $p$ . Sabemos que  $M_0$  é um band sobre uma curva  $C_{M_0}$ , i.e.,  $M_0$  é formada por uma união de planos contendo as retas tangentes de  $C_{M_0}$  e além disso,  $\mathcal{G}$  restrita à um tal plano é radial por um ponto  $q \in C_{M_0}$ . Portanto  $C_{M_0} \subset S$ .

Como  $p$  é um ponto genérico, podemos supor  $M_0 \not\subset \pi$ , pois caso contrário,  $\mathcal{F}$  coincidiria com o pencil de hiperplanos contendo  $\Sigma$  e portanto não teria posto três. Logo  $C_{M_0} \not\subset \pi$  e  $T_p C_{M_0} \not\subset \pi$ .

Mas pela descrição de  $M_0$ , existe um plano  $\xi \in \mathcal{P}$ , com  $p \in \xi \subset M_0$  tal que  $\mathcal{G}$  restrita à  $\pi$  coincide com a folheação radial por  $p$  e além disso,  $\xi$  contém  $T_p C_{M_0}$ . Mas isto é absurdo, já que  $\xi \subset \pi$ . Portanto este caso não acontece.

- (ii)  $\psi(\pi) \not\subset \Sigma$ , para  $\pi \in \Sigma^*$  genérico (veja a figura 5.6).

(ii.a) Suponhamos  $\text{Im}\varphi_\pi = \psi(\pi)$ . Consideremos a superfície

$$S = \overline{\cup_{\pi \in \Sigma^*} \psi(\pi)} \subset \mathbb{P}^4.$$

Com um argumento análogo ao caso (i.c) vemos que este caso não acontece.

(ii.b) Suponhamos  $\text{Im}\varphi_\pi = \{p_\pi\} \subset \psi(\pi)$ . Consideremos a curva

$$C = \overline{\cup_{\pi \in \Sigma^*} p_\pi}.$$

Pela descrição das folhas de  $\mathcal{F}$ , os planos invariantes por  $\mathcal{P}$  contém as retas tangentes de  $C$ . Mas isto é absurdo, já que tais planos estão contidos em  $\pi \in \Sigma^*$ . Portanto este caso não acontece.

(ii.c) Suponhamos  $\text{Im}\varphi_\pi \subset \pi \setminus (\psi(\pi) \cup \Sigma)$ . Consideremos as superfícies

$$S_1 = \overline{\cup_{\pi \in \Sigma^*} \psi(\pi)} \quad \text{e} \quad S_2 = \overline{\cup_{\pi \in \Sigma^*} \cup_{\xi \in (\psi(\pi))^*} \varphi_\pi(\xi)}.$$

Observe que  $\Delta_{\mathcal{G}}(L) = p_1 + p_2 + p_3$  onde  $p_1 = L \cap S_1$ ,  $p_2 = L \cap L_2$  e  $p_3 = L \cap \Sigma$ . Mas isto contradiz a hipótese  $\Delta_{M_0}(L) = 2p$ , já que  $\Delta_{M_0}(L) \leq \Delta_{\mathcal{G}}(L)$ . Portanto este caso não acontece.

(ii.d) Suponhamos  $\text{Im}\varphi_\pi \subset \Sigma$ . Consideremos a superfície

$$S = \overline{\cup_{\pi \in \Sigma^*} \psi(\pi)}.$$

Suponhamos primeiramente que a família de curvas  $\text{Im}\varphi_\pi$ ,  $\pi \in \Sigma^*$  é constante, ou seja, a função  $\pi \mapsto \text{Im}\varphi_\pi$  é constante. Sabemos que se  $M_0$  é o saturado de um germe de uma folha genérica de  $\mathcal{F}$  por  $\mathcal{G}$ , então  $M_0$  é um band sobre uma curva  $C_{M_0}$ , i.e.,  $M_0$  é formada por uma união de planos invariantes por  $\mathcal{P}$  contendo as retas tangentes de  $C_{M_0}$  e além disso,  $\mathcal{G}$  restrita à um tal plano é radial por um ponto  $q \in C_{M_0}$ . Portanto  $C_{M_0} \subset \text{Im}\varphi_\pi \subset \Sigma$ . Mas isto é absurdo, já que um plano  $\xi \in (\psi(\pi))^*$  genérico não é tangente à  $\text{Im}\varphi_\pi$ . Portanto podemos supor que  $\pi \mapsto \text{Im}\varphi_\pi$  não é constante.

Se a família de curvas  $\text{Im}\varphi_\pi$ ,  $\pi \in \Sigma^*$ , é formada por retas, então  $\mathcal{G}$  coincide com a folheação descrita no Exemplo 5.7, se não,  $\mathcal{G}$  coincide com a folheação descrita no Exemplo 5.8. Nos dois casos temos a projeção  $\phi_X : \mathbb{P}^4 \dashrightarrow X$  cujo as fibras são conexas e invariantes por  $\mathcal{F}$ . Logo por ([CLnLPT], Lema 2.2) existe uma folheação  $\eta$  em  $X$  tal que  $\mathcal{F} = \phi_X^*(\eta)$  e portanto  $\mathcal{F}$  coincide com uma das folheações descritas nos Exemplos 5.7 e 5.8.

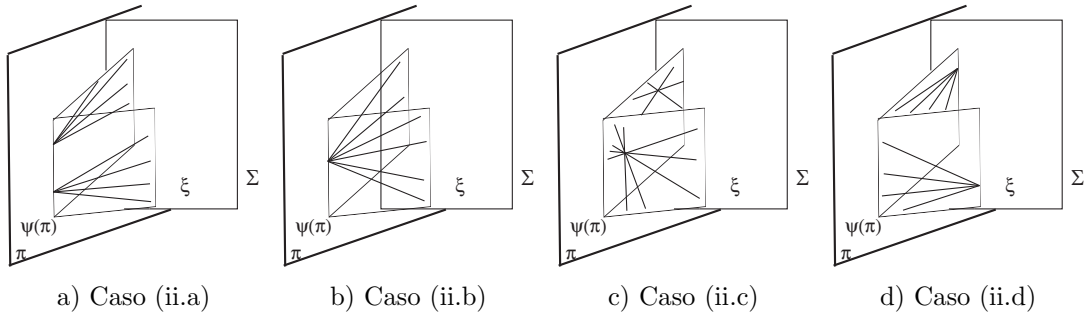


Figura 5.6: Caso (ii).

**Caso (3) do Teorema 4.11:**

Existe uma superfície  $S$  e uma família  $\mathcal{C}$  de dimensão dois de cônicas (distintas de retas) em  $S$  tal que  $\mathcal{P}$  é formada pela família de planos que contém tais cônicas. Mais ainda,  $S$  é um cone de grau 3 se tais cônicas são reduzidas ou  $S = S_{1,2}$  (o scroll racional de grau 3 em  $\mathbb{P}^4$ ) se tais cônicas são irredutíveis.

Denotaremos por  $\pi_C$  o plano contendo uma cônica  $C \in \mathcal{C}$ . Sendo que os planos  $\pi_C$ ,  $C \in \mathcal{C}$ , são invariantes por  $\mathcal{G}$  (pela definição de  $\mathcal{P}$ ) obtemos que  $\mathcal{G}$  restrita à  $\pi_C$  coincide com a folheação radial formada pela família de retas que contém um ponto  $q_C \in \pi_C$ .

Afirmamos que  $q_C \in S$ . De fato, se  $q_C \notin S$  teríamos  $\Delta_{\mathcal{G}}(L) = q_C + p_1 + p_2$  onde  $p_1, p_2 \in S$ , já que por um ponto genérico de  $S$  passam infinitas retas invariantes por  $\mathcal{G}$ . Mas isto contradiz a hipótese  $\Delta_{M_0}(L) = 2p$ , pois  $\Delta_{M_0}(L) \leq \Delta_{\mathcal{G}}(L)$ . Portanto existe um morfismo  $\psi : \mathcal{C} \rightarrow S$  tal que  $\psi(C) = q_C \in C$  e uma projeção

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{P}^4 &\dashrightarrow S \\ p \in \pi_C &\mapsto \psi(C). \end{aligned}$$

Seja  $p \in \mathbb{P}^4$  genérico e  $U$  uma vizinhança de  $p$  tal que  $\phi|_U$  possui fibras conexas. Além disso, as fibras de  $\phi|_U$  são invariantes por  $\mathcal{F}$ , logo por ([CLnLPT], Lema 2.2) existe uma folheação  $\eta$  em  $\phi(U)$  tal que  $\mathcal{F}|_U = \phi|_U^*(\eta)$ .

Como foi observado  $S$  é um cone de grau 3 se tais cônicas são reduzidas ou  $S = S_{1,2}$  (o scroll racional de grau 3 em  $\mathbb{P}^4$ ) se tais cônicas são irredutíveis.

Suponhamos que  $S$  é um cone. A família de cônicas  $\mathcal{C}$  define uma fibração por retas em  $S$  contendo o vértice. Seja  $M_0$  o saturado de um germe de folha de  $\mathcal{F}$  por  $\mathcal{G}$  que contém  $p$ . Sabemos que  $M_0$  é um band sobre uma curva  $C_{M_0} \in S$ , i.e.,  $M_0$  é formada por uma união de planos invariantes por  $\mathcal{P}$  contendo as retas tangentes de  $C_{M_0}$ . Daí segue que  $C_{M_0}$  é tangente à fibração definida por  $\mathcal{C}$ , logo  $C_{M_0} \subset C$  para algum  $C \in \mathcal{C}$ . Portanto  $M_0$  é um band sobre uma reta,

neste caso, é fácil ver que  $M_0$  possui posto um. Logo  $\mathcal{F}$  possui posto no máximo dois. Portanto este caso não acontece.

Se  $S = S_{1,2}$  então  $\mathcal{F}$  coincide com uma das folheações descritas no Exemplo 5.6.

## A

### Variedades com Aplicação de Gauss Degenerada

O estudo de variedades com Aplicação de Gauss Degenerada e propriedades diferencial-geométricas de variedades algébricas tem origem em vários trabalhos de C.Segre, entre estes [S1, S2, S3]. Este estudo foi renovado após o artigo de Griffiths e Harris [GH2] onde o conceito de formas fundamentais, i.e., uma sequência de sistemas lineares definidos no espaço tangente projetivizado em um ponto genérico da variedade são introduzidos e estudados; entre estes está a segunda forma fundamental que pode ser interpretada como diferencial da aplicação de Gauss. O assunto apresenta uma crescente literatura, veja por exemplo [AG1, AG2, IL, FP]. Entre as técnicas utilizadas está o método de “moving frames” introduzido por Frenet [Fre], Serret [Ser] e Darboux [Dar] para o estudo de curvas e superfícies e desenvolvido por E.Cartan [Car] para o estudo de subvariedades em qualquer espaço homogêneo.

Seja  $M \subset \mathbb{P}^n$  subvariedade complexa de dimensão  $m$ . Considere a projeção canônica  $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$ , denotamos por  $\hat{M} = \pi^{-1}(M) \cup \{0\}$  o cone afim sobre  $M$ . Dado um ponto  $p \in M$  seja  $\hat{p} \in \hat{M}$  tal que  $\pi(\hat{p}) = p$ , denotamos por  $T_p M = \mathbb{P}(T_{\hat{p}} \hat{M})$  o espaço tangente projetivo de  $M$  em  $p$ . Temos uma aplicação holomorfa naturalmente associada

$$\begin{aligned} \Gamma : M &\longrightarrow \mathbb{G}(m, n) \\ p &\longmapsto T_p M \end{aligned}$$

denominada **Aplicação de Gauss de  $M$** , onde  $\mathbb{G}(m, n)$  denota a Grassmaniana de  $m$ -planos em  $\mathbb{P}^n$ . Claramente, se  $M$  é uma variedade projetiva então  $\Gamma$  define uma aplicação racional onde o conjunto de pontos de indeterminação coincide com o conjunto de pontos singulares de  $M$ .

O **posto** da subvariedade  $M$  é por definição o posto da diferencial de sua aplicação de Gauss. Dizemos que  $M$  é **degenerada** se tem posto menor que sua dimensão. Caso contrário dizemos que  $M$  é não-degenerada.

Se  $M$  é degenerada então a diferencial  $d\Gamma(p)$  é singular em todo ponto de  $M$  e tem posto constante  $r < m$  fora de subconjunto analítico  $S$  de  $M$ . Pelo

Teorema da Função Implícita as fibras de  $\Gamma$  definem uma folheação holomorfa em  $M \setminus S$  de dimensão  $m - r$  que denotaremos por  $\mathcal{G}_M$ . Um dos principais resultados a respeito desta aplicação, diz que as folhas desta folheação são espaços lineares.

**Teorema A.1** [S2, GH2] *Seja  $M$  uma subvariedade complexa de  $\mathbb{P}^n$  de dimensão  $m$  e  $\Gamma$  a aplicação de Gauss associada à  $M$ . Se  $M$  é degenerada, então uma fibra genérica de  $\Gamma$  é uma união de subconjuntos abertos de espaços lineares de dimensão  $m - r$ , onde  $r$  é o posto de  $M$ .*

Além das referências citadas anteriormente existe uma prova elementar para o caso hipersuperfície obtida por Fischer e Wu em [FW], posteriormente generalizada Fischer e Piontkowski em [FP].

**Exemplo A.2** Dados  $E$  e  $F$  subespaços lineares de  $\mathbb{P}^n$  denotaremos por  $\langle E, F \rangle$  o projetivizado do espaço gerado pelos respectivos cones afins  $\hat{E}$  e  $\hat{F}$ . Sejam  $V_1, V_2 \subset \mathbb{P}^n$  subvariedades projetivas. Definimos o Join de  $V_1$  e  $V_2$  como  $J(V_1, V_2) = \overline{\cup_{p \in V_1, q \in V_2, p \neq q} \langle p, q \rangle}$ . Temos o seguinte resultado clássico:

**Lema de Terracini:** Se  $z \in J(V_1, V_2)$  é um ponto genérico então

$$T_z J(V_1, V_2) = \langle T_p V_1, T_q V_2 \rangle,$$

para quaisquer  $p \in V_1 \setminus \text{Sing}(V_1)$ ,  $q \in V_2 \setminus \text{Sing}(V_2)$  tal que  $z \in \langle p, q \rangle$ .

Segue do Lema de Terracini que  $J(V_1, V_2)$  é uma variedade degenerada.

Seja  $M \subset \mathbb{P}^n$  subvariedade complexa de dimensão  $m$  e posto  $1 \leq r < m$ . Seja  $B' \subset \mathbb{G}(m - r, n)$  o fecho algébrico da família de  $(m - r)$ -planos que contém as fibras de  $\Gamma$ . Consideremos  $M_0 := \cup_{L \in B'} L \subset \mathbb{P}^n$ . Consideremos a variedade

$$\Lambda' = \{(p, L) \in \mathbb{P}^n \times B' \mid p \in L\}.$$

junto com as projeções naturais  $g' : \Lambda' \rightarrow B'$  e  $f' : \Lambda' \rightarrow \mathbb{P}^n$ . Então temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & & f & \\ & & & \curvearrowright & \\ B \times_{B'} \Lambda' & \xrightarrow{\phi^*} & \Lambda' & \xrightarrow{f'} & \mathbb{P}^n \\ g \downarrow & & g' \downarrow & & \\ B & \xrightarrow{\phi} & B' & & \end{array}$$

onde  $\phi$  é a resolução de  $B'$  e  $f = f' \circ \phi^*$ . Denotamos por  $\Lambda$  o produto fibrado  $B \times_{B'} \Lambda'$ . Observe que  $\Lambda$  é um fibrado projetivo sobre  $B$ , portanto uma variedade não-singular.

Seja  $R_{M_0}$  o divisor de ramificação de  $f$ , i.e.,

$$R_{M_0} = \{(p, L) \in \Lambda \mid \det Jf(p, L) = 0\}.$$

Podemos escrever  $R_{M_0} = H_{M_0} + V_{M_0}$  onde  $g|_{|H_{M_0}|}$  tem posto  $r$  em um aberto denso e  $g|_{|V_{M_0}|}$  não é dominante.

**Definição A.3** Se  $E$  é uma componente irredutível do suporte de  $H_{M_0}$ , então  $f(E)$  será chamado **componente focal de  $M_0$** . A união das componentes focais será chamada **conjunto focal de  $M_0$**  e denotaremos por  $\Delta_{M_0}$ .

É possível mostrar que  $\Delta_{M_0} \subset \text{Sing}(M_0)$  (veja [IL], Teorema 3.4.2). Seja  $L \in B$ , como  $f|_{g^{-1}(L)}$  é um isomorfismo, a restrição do divisor  $H_{M_0}$  à  $g^{-1}(L)$  define uma hipersuperfície  $\Delta_{M_0}(L)$  em  $L$ .

**Proposição A.4** Se  $g^{-1}(L) \not\subset |R_{M_0}|$ , então  $\Delta_{M_0}(L)$  é uma hipersuperfície em  $L$  de grau  $r$ .

*Prova.* Seja  $\psi : \mathbb{D}^r \rightarrow B$  uma parametrização local em uma vizinhança de  $L$  da forma

$$\psi(s) = \mathbb{P}(\text{span}\{\alpha_0(s), \dots, \alpha_{m-r}(s)\}),$$

onde  $\alpha_0, \dots, \alpha_{m-r} : \mathbb{D}^r \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ , são funções holomorfas. A menos de uma parametrização local de  $\Lambda$  temos que  $f$  é da forma

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D}^r \times \mathbb{P}^{m-r} &\longrightarrow M_0 \\ (s, t) &\mapsto t_0\alpha_0(s) + \dots + t_{m-r}\alpha_{m-r}(s), \quad t = (t_0 : \dots : t_{m-r}) \end{aligned}$$

Podemos supor que  $f$  é imersão nos pontos  $(s, e_0)$  para todo  $s \in \mathbb{D}^r$ . Como o espaço tangente de  $M_0$  é constante ao longo de  $L$ , obtemos

$$\text{span} \left\{ \alpha_0, \dots, \alpha_{m-r}, \sum_{i=0}^{m-r} t_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial s_1}, \dots, \sum_{i=0}^{m-r} t_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial s_r} \right\} \subset \text{span} \left\{ \alpha_0, \dots, \alpha_{m-r}, \frac{\partial \alpha_0}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial \alpha_0}{\partial s_r} \right\}.$$

Observe que vale a igualdade na equação acima se, e somente se,  $f$  é um isomorfismo em  $(s, t)$ . Se denotamos

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial s} := \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial \alpha_i}{\partial s_r} \right),$$

para  $i = 0, \dots, m-r$ , então existem matrizes,  $A_i(s) \in M(r, \mathbb{C})$ ,  $i = 0, \dots, m-r$ , tal que

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial s} = A_i \frac{\partial \alpha_0}{\partial s} \quad \text{mod } \text{span}\{\alpha_0, \dots, \alpha_{m-r}\}.$$



Segue que

$$\sum_{i=0}^{m-r} t_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial s} = \left( \sum_{i=0}^{m-r} t_i A_i \right) \frac{\partial \alpha_o}{\partial s} \quad \text{mod } \text{span}\{\alpha_0, \dots, \alpha_{m-r}\},$$

portanto,  $f$  não é imersão em  $(s, t)$  se, e somente se,

$$\det \left( \sum_{i=0}^{m-r} t_i A_i(s) \right) = 0.$$

■

Uma simples análise do conjunto focal permite obter uma classificação de superfícies degeneradas.

**Teorema A.5** *[G, S2] Se  $M \subset \mathbb{P}^n$  é uma superfície complexa degenerada. Então temos as seguintes possibilidades:*

1.  $M_0$  é um cone sobre uma curva;
2.  $M_0$  é uma superfície formada pelas tangentes de uma curva.

*Prova.* Se  $M$  tem posto zero, então claramente  $M_0$  deve ser um plano. Podemos supor que  $M$  tem posto um. O conjunto focal de  $M_0$ , intersecta cada reta  $L \in B$  em um único ponto e tem dimensão zero ou um. Se  $\Delta_{M_0}$  tem dimensão zero então  $M_0$  é um cone. Se  $\Delta_{M_0}$  tem dimensão um então a aplicação

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D} \times \mathbb{P}^1 &\longrightarrow M_0 \\ (s, (t_0 : t_1)) &\mapsto \pi(t_0 \alpha_0(s) + t_1 \alpha_1(s)) \end{aligned}$$

tem posto um em um ponto genérico  $(s, (t_0 : t_1)) \in |H_{M_0}|$ , ou seja, uma reta genérica  $L \in B$  é tangente à  $\Delta_{M_0}$ . ■

No caso de hipersuperfícies em  $\mathbb{P}^4$  temos o seguinte:

**Teorema A.6** *[AG1, Rog, MT] Se  $M \subset \mathbb{P}^4$  é uma hipersuperfície complexa de posto dois. Então temos as seguintes possibilidades:*

1.  $M_0$  é um cone;
2.  $M_0$  é um join de duas curvas;
3.  $M_0$  é uma união de planos (não-osculadores) contendo as retas tangentes de uma curva;

4. *Existem uma curva  $C$  e uma superfície  $S$  tal que  $M_0$  é formada por retas tangentes à  $S$  que intersectam  $C$ ;*
5. *Existem duas superfícies  $S_1, S_2$  tal que  $M_0$  é formada por retas tangentes à estas. Possivelmente  $S_1 = S_2$ .*

*Prova.* Segue as mesmas linhas da prova do Teorema A.5. Para detalhes veja [AG1, Rog, MT]. ■

## B Componentes do Espaço de Folheações

Denotamos por  $\mathcal{F}(d, n)$  o espaço de folheações de codimensão 1 em  $\mathbb{P}^n$  e grau  $d$ . Observe que este é um subconjunto algébrico quase-projetivo de  $H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(d+2))$ . Se  $n = 2$  então a condição de integrabilidade é trivial, portanto  $\mathcal{F}(d, 2)$  é um subconjunto aberto de um espaço linear.

É fácil ver que toda folheação de grau zero é um pencil de hiperplanos, ou seja, tem integral primeira da forma  $F/G$  onde  $F, G$  são polinômios homogêneos de grau um.

Algumas famílias infinitas de componentes irredutíveis de  $\mathcal{F}(d, n)$  são conhecidas:

**Pull-back linear** . Seja  $A$  o conjunto de projeções lineares  $\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^2$ . O conjunto de folheações  $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(d, n)$  do tipo pull-back linear de  $\mathbb{P}^2$ ,  $PL(d, n)$  é definido pela imagem do morfismo

$$\begin{aligned} A \times \mathcal{F}(d, 2) &\longrightarrow \mathcal{F}(d, n) \\ (\psi, \mathcal{G}) &\longmapsto \psi^*(\mathcal{G}). \end{aligned}$$

Então  $PL(d, n)$ ,  $d \geq 1$ ,  $n \geq 3$  é uma componente irredutível de  $\mathcal{F}(d, n)$ , (cf. [CaLn]).

**Pull-back genérico** . Seja  $A_m$  o conjunto de aplicações racionais  $\psi = (F_0, F_1, F_2) : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^2$  de grau algébrico  $m$ , i.e.,  $\text{gr}(F_i) = m$  tal que  $V_i = (F_i = 0)$ , para  $i = 1, 2, 3$  estão em posição geral. Seja  $B \subset \mathcal{F}(k, 2)$  o conjunto de folheações com apenas singularidades hiperbólicas. O par  $(\phi, \mathcal{F}) \in A_m \times B$  é dito um par genérico se  $C(\phi) \cap \text{Sing}(\mathcal{F})$  é vazio, onde  $C(\phi)$  denota o conjunto de valores críticos de  $\phi$ . Se  $(\phi, \mathcal{F})$  é um par genérico então  $\phi^*(\mathcal{F}) \in \mathcal{F}(d, n)$  com  $d = (k+2)m - 1$ . Denotamos por  $PG(d, n)$  o fecho de Zariski do conjunto formado pelas folheações do tipo  $\phi^*(\mathcal{F})$  onde  $(\phi, \mathcal{F})$  é um par genérico.

Então  $PG(d, n)$  é uma componente irredutível de  $\mathcal{F}(d, n)$  (cf. [CLnE]).

**Racional.** Sejam  $p, q \in \mathbb{N}$  primos entre si tal que  $p + q - 2 = d$ , definimos  $R(p, q)$  o conjunto de folheações  $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(d, n)$  com integral primeira da forma  $F^p/G^q$  onde  $F$  e  $G$  são polinômios homogêneos de grau  $l$  e  $m$  respectivamente, com  $lp = mq$ .

O fecho de Zariski  $\overline{R(p, q)}$ ,  $p + q - 2 = d$  é uma componente irredutível de  $\mathcal{F}(d, n)$  (cf. [GLn]).

**Logarítmica.** Sejam  $F_1, \dots, F_k$ ,  $k \geq 3$ , polinômios homogêneos em  $\mathbb{C}^{n+1}$  tal que  $\sum_{i=1}^k d_i - 2 = d$  onde  $d_i = \text{gr}(F_i)$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  números complexos satisfazendo  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot d_i = 0$ .

Denotamos por  $L(d_1, \dots, d_k)$  o conjunto de folheações definida em coordenadas homogêneas de  $\mathbb{C}^{n+1}$  pela 1-forma

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{dF_i}{F_i}$$

com  $F_1, \dots, F_k$  primos entre si.

O fecho de Zariski  $\overline{L(d_1, \dots, d_k)}$  é uma componente irredutível de  $\mathcal{F}(d, n)$  (cf. [Cl]).

**Álgebra de Lie afim .** Denotamos por  $E(d, 3) \subset \mathcal{F}(d, 3)$  o conjunto de folheações  $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$  que em uma carta afim  $\mathbb{C}^3 \subset \mathbb{P}^3$  pode ser definida pela 1-forma  $i_{X_{\alpha\beta}} i_S(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)$  onde

$$\begin{aligned} S &= ((d-1)^2 + d)x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + d \cdot x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \\ X_{\alpha\beta} &= \alpha((d-1)^2 + d)x_2^{d-1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \beta \cdot d \cdot x_3^{d-1} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}^* \end{aligned}$$

Observe que  $\text{Sing}(\mathcal{F}_{\alpha\beta})$  contém a curva racional normal  $(t^{(d-1)^2+d}, t^d, t)$  e que o grupo de transformações afins que preservam esta é isomorfo ao grupo afim  $\text{Aff}(\mathbb{C})$ . Além disso,  $[S, X_{\alpha\beta}] = -X_{\alpha\beta}$ , portanto  $S$  e  $X_{\alpha\beta}$  geram uma ação do grupo afim  $\text{Aff}(\mathbb{C})$  em  $\mathbb{C}^3$ , onde as folhas de  $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$  coincidem com as órbitas desta.

O fecho de Zariski  $\overline{E(d, 3)}$ ,  $d \geq 2$ ,  $n \geq 3$ , é uma componente irredutível de  $\mathcal{F}(d, 3)$  (cf. [CCGL]). O caso  $d = 2$  foi analisado primeiramente em [CLn].

O pull-back por projeções lineares, i.e., o fecho de Zariski dos conjuntos  $PE(d, n) = \{\phi * (\mathcal{F}) | \phi : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^3 \text{ projeção linear e } \mathcal{F} \in E(d, 3)\}$ ,  $d \geq 2$ ,  $n \geq 3$ , também geram componentes do espaço de folheações.

**Meta-abeliana subálgebra de  $\text{aut}(\mathbb{P}^n)$**  . Considere a subálgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $\text{aut}(\mathbb{P}^n)$  gerada por

$$X = \sum_{i=0}^n (n - 2i) X_i \frac{\partial}{\partial X_i} \text{ e } Y_j = \sum_{i=0}^{n-j} X_{i+j} \frac{\partial}{\partial X_i}.$$

Então  $\mathfrak{g}$  define uma folheação  $\mathcal{F}(\mathfrak{g}) \in \mathcal{F}(n-1, n)$  definida em coordenadas homogêneas pela 1-forma  $i_R i_X i_{Y_1} \dots i_{Y_{n-2}} (dX_0 \wedge \dots \wedge dX_n)$  onde  $R$  é o campo radial.

O fecho da órbita de  $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$  pela ação natural do grupo  $\text{aut}(\mathbb{P}^n)$  em  $\mathcal{F}(n-1, n)$  é uma componente irredutível de  $\mathcal{F}(n-1, n)$  (cf. [CkP]).

O estudo das componentes irredutíveis de  $\mathcal{F}(d, n)$  foi iniciado por Jouanolou em [Jou] onde as componentes irredutíveis de  $\mathcal{F}(1, n)$  foram classificadas para todo  $n \geq 3$ .

**Teorema B.1** [Jou] *O espaço de folheações de grau 1 em  $\mathbb{P}^n$ ,  $n \geq 3$ , tem duas componentes irredutíveis  $PL(1, n)$  e  $\overline{R(1, 2)}$ .*

A classificação das componentes irredutíveis de  $\mathcal{F}(2, n)$  foi obtida por D. Cerveau e A. Lins Neto em [CLn].

**Teorema B.2** [CLn] *O espaço de folheações de grau 2 em  $\mathbb{P}^n$ ,  $n \geq 3$ , tem seis componentes irredutíveis  $PL(2, n)$ ,  $\overline{R(2, 2)}$ ,  $\overline{R(1, 3)}$ ,  $\overline{L(2, 1, 1)}$ ,  $\overline{L(1, 1, 1, 1)}$  e  $\overline{PE(2, n)}$ .*

## Referências Bibliográficas

- [AG1] M.A. Akivis, V.V. Goldberg. Differential geometry of varieties with degenerate Gauss maps, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 18. Springer-Verlag, New York, (2004).
- [AG2] M.A. Akivis, V.V. Goldberg. Projective differential geometry of submanifolds, North Holland, Amsterdam, (1993).
- [Asc] E. Ascione. Sul complesso di 1°ordine delle trisecanti di una superficie immersa in un  $S_4$ , *Rendiconti della R.Accademia dei Lincei serie V* **VI**, 162-169, (1897).
- [Bru] M. Brunella. Birational geometry of foliations. Monografias de Matemática. [Mathematical Monographs]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, (2000).
- [B] A. Bruno. On homaloidal polynomials. *arxiv:math.AG/0403323* (2004).
- [Cl] O. Calvo-Andrade. Irreducible components of the space of holomorphic foliations, *Math. Ann.*, 299, n°4, 751-767, (1994).
- [CCGL] O. Calvo-Andrade, D. Cerveau, L. Giraldo, A. Lins Neto. Irreducible components of the space of foliations associated to the affine Lie algebra, *Ergodic Theory Dynam. Systems* 24, n°4, 987-1014, (2004).
- [CaLn] C. Camacho, A. Lins Neto. The topology of integrable differential forms near a singularity, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* n°55, 5-35, (1982).
- [CaLnS] C. Camacho, A. Lins Neto, P. Sad. Foliations with algebraic limit sets, *Ann. of Math.* 136, 429-446, (1992).
- [Car] E. Cartan. Groupes finis et continus et la géométrie différentielle, Gauthier-Villars, Paris, (1937).
- [CHKS] F. Catanese, S. Hostem, A. Khetan, B. Sturmfels. The maximum likelihood degree, *Amer. J. Math* 128, n°3, 671-697, (2006).

- [C] D. Cerveau. Feuilletages en droites, équations des eikonales et aures équations différentielles, *arXiv:math.DS/0505601v1* (2005)
- [CLn] D. Cerveau, A. Lins-Neto. Irreducible components of the space of holomorphic foliations of degree two in  $\mathbb{P}^n$ , *Annals of Mathematics* 143, 577-612, (1996).
- [CLnE] D. Cerveau, A. Lins-Neto, S.J. Edixhoven. Pull-back components of the space of holomorphic foliations on  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ ,  $n \geq 3$  *J. Algebraic Geom.*, 10, n°4, 695-711, (2001).
- [CLnLPT] D. Cerveau, A. Lins-Neto, F. Loray, J.V. Pereira, F. Touzet. Algebraic reduction theorem for complex codimension one singular foliations, *Comment. Math. Helv.* 81, n°1, 157-169, (2006).
- [CM] D. Cerveau, J.F. Mattei. Formes intégrables holomorphes singulières, *Astérisque* 97, (1982).
- [CiRS] C. Ciliberto, F. Russo, A. Simis. Homaloidal hypersurfaces and hypersurfaces with vanishing hessian, *arXiv:math.AG/0701596v1* (2007).
- [CkSoVa] F. Cukierman, M. Soares, I. Vainsencher. Singularities of logarithmic foliations, *Compositio Math* 142, 131-142, (2006).
- [CkP] F. Cukierman, J.V. Pereira. Stability of Holomorphic Foliations with Split Tangent Sheaf, to appear in *American Journal of Mathematics*, *arXiv:math.CV/0511060\**.
- [Dar] G. Darboux. Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces et les Applications Géométriques du Calcul Infinitésimal, 4 volumes, Gauthier-Villars, Paris, (1914), (1915), (1894), (1896), (JFM 45, p.881; JFM 53, p.659; JFM 27, p.497) Reprint by Chelsea Publishing Co., Bronx, N.Y., Vol.I xxiv+601 pp.; Vol.II xix+567 pp.; Vol.III xvi+501 pp.; Vol.IV xvi+537 pp., (1972); Reprint by Éditions Jacques Gabay, Sceaux, (1993) Vol.I & II, 604 pp.; Vol.III & IV, 536 pp.
- [DeP1] P. De Poi. On First Order Congruences of Lines, *Ph.D. thesis*, SISSA-ISAS (1999).
- [DeP2] P. De Poi. On first order congruences of lines of  $\mathbb{P}^4$  with a fundamental curve, *Manuscripta Math.*, 106, 101-116, (2001).

- [DeP3] P. De Poi. Congruence of lines with one-dimensional focal locus, *Portugaliae Mathematica (N.S)*, 61, n°3, 329-338, (2004).
- [DeP4] P. De Poi. On first order congruences of lines in  $\mathbb{P}^4$  with irreducible fundamental surface, *Mathematische Nachrichten*, 278, n°4, 363-378, (2005).
- [DeP5] P. De Poi. On first order congruences of lines in  $\mathbb{P}^4$  with generically non-reduced fundamental surface, *arXiv:math.AG/0407341v3*, (2007).
- [Di] A. Dimca. On Polar Cremona Transformations. *An. Ştiinţ. Univ. Ovidius Constanţa Ser. Mat.*, 9, 47-53 (2001).
- [DiPa] A. Dimca, S. Papadima. Hypersurfaces complements, Milnor fibers and higher homotopy groups of arrangements. *Ann. of Math.* 158, 473-507, (2003).
- [Do] I.V. Dolgachev. Polar Cremona transformations, *Michigan Math. J.* 48, (Volume dedicado a W.Fulton), 191-202, (2000).
- [ES] L. Ein, N. Shepherd-Barron. Some special Cremona transformations, *Amer. J. Math.* 111, 783-800, (1989).
- [EKP] P. Etingof, D. Kazhdan, A. Polishchuk. When is the Fourier transform of an elementary function elementary?, *Selecta Math. (N.S.)*, 8, 27-66, (2002).
- [FaP] T. Fassarella, J.V. Pereira. On the degree of polar transformations. An approach through logarithmic foliation, *Selecta Math. (N.S.)*, 13, 239-252, (2007).
- [FP] G. Fischer, J. Piontkowski. Ruled Varieties. An Introduction to Algebraic Differential Geometry, *Advanced Lectures in Mathematics*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, (2001).
- [FW] G. Fischer, H. Wu. Developable complex analytic submanifolds, *Internat. J. Math.*, 6, n°2, 229-272, (1995).
- [Fre] F. Frenet. Sur les courbes à double courbure, *Thèse, Toulouse*, (1847); *Abstract in Journ. de Math.*, 17, (1852).
- [G] K.F. Gauss. General Investigations of Curved Surfaces, *Raven Press, Hewlett, N.Y.*, (1965)



- [GLn] X. Gómez-Mont, A. Lins Neto. Structural stability of singular holomorphic foliations having a meromorphic first integral, *Topology*, 30, n°3, 315-334, (1991).
- [GH1] P. Griffiths, J. Harris. Principles of algebraic geometry. *Wiley Classics Library*. John Wiley & Sons Inc., New York, (1994). Reprint of the 1978 original.
- [GH2] P. Griffiths, J. Harris. Algebraic geometry and local differential geometry, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 12, no. 3, 355-452, (1979).
- [Har] R. Hartshorne. Algebraic geometry. *Springer-Verlag*, New York, (1977). Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [IL] T.A. Ivey, J.M. Landsberg. Cartan for beginners: differential geometry via moving frames and exterior differential systems, Graduate Studies in Mathematics, 61, American Mathematical Society, Providence, RI, xiv+378, (2003).
- [Jou] J.P. Jouanolou. Équations de Pffaf algébriques,. *Lect. Notes in Math.*, 708, (1979).
- [Kle] S. Kleiman. The transversality of a general translate, *Compositio Math.*, 28, 287-297, (1974).
- [KS] H. Kraft, G. Schwarz. Rational covariants or reductive groups and homaloidal polynomials, *Math. Res. Lett.*, 8, 641-649, (2001).
- [Kum] E.E. Kummer. Über die algebraischen Strahlensysteme, insbesondere über die der ersten und zweiten Ordnung, *Abh. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, 1-20 (1866), also in E.E.Kummer. Collected Papers, Spring Verlag, (1975).
- [K] I. Kupka. The singularities of integrable structurally stable Pfaffian forms, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A*, 52, 1431-1432, (1964).
- [LnP] A. Lins Neto, J.V. Pereira. On the Generic Rank of the Baum-Bott Map *Compositio Mathematica* Vol. 142, No. 6, pp. 1549-1586, (2006).
- [LnSc] A. Lins Neto, B.A. Scárdua. Folheações Algébricas Complexas. *21º Colóquio Brasileiro de Matemática*, IMPA (1997).

- [Mar1] G. Marletta. Sopra i complessi d'ordine uno dell' $S_4$ , *Atti Accad. Gioenia, Serie V, Catania III*, 1-15, Memoria II, (1909).
- [Mar2] G. Marletta. Sui complessi di rette del primo ordine dello spazio a quattro dimensioni, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, XXVIII, 353-399, (1909).
- [MP] E. Mezzetti, D. Portelli. A tour through some classical theorems on algebraic surfaces. *An. St. Ovidius Constanta*, 5, n°2, 51-78, (1997).
- [MT] E. Mezzetti, O. Tommasi. On projective varieties of dimension  $n+k$  covered by  $k$ -spaces, *Illinois J.Math.*, 46 n°2, 443-465, (2002).
- [Mol] R. Mol. Classes polaires associées aux distributions holomorphes de sous-espaces tangents. *Bull. Braz. Math. Soc.* **37** (1) , 29-48, (2006).
- [PY] J.V. Pereira, S. Yuzvinsky. Completely Reducible Hypersurfaces in a Pencil, . *arXiv:math/0701312* (2007).
- [Pi] R. Piene. Polar Classes of Singular Varieties, *Ann. Scient. É. Norm. Sup.* 11, 247-276, (1978).
- [P] J. Piontkowski. Developable varieties of Gauss rank 2, *Internat. J. Math.*, 13, 93-110, (2002).
- [Ran] Z. Ran. Surfaces of order 1 in Grassmannians, *J. Reine Angew. Math.*, 368 ,119-126, (1986).
- [Rog] E. Rogora. Classification of Bertini's series of varieties of dimension less than or equal to four, *Geom. Dedicata*, 64 , n°2, 157-191, (1997).
- [Se] B. Segre. Bertini forms and hessian matrices, *J. London Math. Soc.*, 26, 164-176, (1951).
- [S1] C. Segre. Un'osservazione sui sistemi di rette degli spazi superiori, *Rend. Circ. Mat. Palermo II*, 148-149,(1888).
- [S2] C. Segre. Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi, *Rend. Circ. Mat. Palermo XXX*, 87-121,(1910).
- [S3] C. Segre. Su una classe di superficie dell'iperspazio legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2°ordine, *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino XLII*, 559-591, (1906-1907).

- [S4] C. Segre. Le superficie degli iperspazi con una doppia infinità di curve piane o spaziali, *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino* 56, 75-89, (1921).
- [Ser] J.A. Serret. Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure, *Journ. de Math.*, 16, 193-207, (1851).
- [Sev] F. Severi. Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni e a'suoi punti tripli apparenti, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **XV**, 33-51, (1901).
- [Van] A. van den Essen. Reduction of singularities of the differential equation  $Ady = Bdx$ , *Lecture Notes in Math.*, 712, 44-59, (1979).
- [Za] F.L. Zak. Determinants of projective varieties and their degrees, in "Algebraic transformation groups and algebraic varieties", Proc. Conference "Interesting algebraic varieties arising in algebraic transformation group theory", *Enc. Math. Sci.* 132, Springer Verlag, Berlin, (2004), 207-238.
- [ZILO] F.L. Zak, A.V. Inshakov, S.M. Lvovski, A.A. Oblomkov. On congruences of lines of order one in  $\mathbb{P}^3$ , preprint.