Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

Trajetórias de partículas geradas por ondas periódicas com vorticidade

Roberto Ribeiro Santos Junior

Rio de Janeiro-RJ

Junho de 2014

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

Trajetórias de partículas geradas por ondas periódicas com vorticidade

Roberto Ribeiro Santos Junior

Tese de doutorado apresentada ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Nachbin.
Coorientador: Prof. Dr. Paul Milewski.

Rio de Janeiro-RJ
Junho de 2014

Ribeiro-Junior, Roberto.

Trajetórias de partículas geradas por ondas periódicas com vorticidade / Roberto Ribeiro Santos Junior. – Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

145 f.

Orientador: Prof. Dr. André Nachbin.

Coorientador: Prof. Dr. Paul Milewski.

Tese (doutorado) – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2014.

Referências bibliográficas.

1. Dinâmica dos fluidos. 2. Ondas de gravidade periódicas viajantes. 3. Trajetória de partículas 4. Vorticidade constante 5. Fluxo com cisalhamento 6. Pontos de estagnação - Tese. I. Nachbin, André II. Milewski, Paul. III. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. IV. Título.

CDU : 531.3

: 531.32

A meus pais Roberto Ribeiro e Josefa Rosidete, a minha irmã Rafaela, a minha vó Marcília (in memorian) e a minha namorada Gisele.

Agradecimentos

Inicialmente eu gostaria de agradecer à Deus, por ter me dado muita saúde, força e perseverança para enfrentar a árdua jornada que passei para concluir o doutorado.

Finalizar o doutorado é para mim a realização de um sonho traçado quando ainda era criança, no quintal da minha casa, quando falei para minha mãe que seria um professor universitário. Naquele momento isto era algo que parecia muito distante, mas com a ajuda e o incentivo de muita gente, concretizou-se.

Pretendo agradecer a todos que colaboraram de alguma forma para a realização deste sonho e tentarei não esquecer de ninguém.

Uma pessoa fundamental para esta conquista é a minha primeira professora, a Prof.ª Rosidete, minha mãe. Ela me alfabetizou e me ensinou as operações básicas da matemática. Ela abriu para mim a porta de um novo mundo, o mundo do conhecimento. Ela me ensinou a ter prazer em estudar, a gostar de aprender coisas novas e a me interessar por abrir um livro. Falando ainda sobre o ensino primário, outra pessoa importantíssima é a Prof.ª Raimunda, ou como todos os alunos a chamavam, Dona Raimunda. Ela era uma professora excelente, muito dedicada com todos os alunos.

A pessoa que provocou em mim o interesse pela matemática foi o Prof. Antônio Lisboa. Tive o privilégio de ter sido seu aluno da 5ª à 8ª série. O Prof. Antônio é a pessoa mais sábia que conheci no meio da matemática. Sua sapiência não é apenas restrita ao conhecimento acadêmico. Ele é o exemplo de como devemos ser no meio acadêmico. As primeiras lições que aprendi com ele foram humildade e simplicidade. O conhecimento não é para enaltecer o ego daquele que o detêm, mas sim para transformar a sociedade. Ao senhor, Prof. Antônio, eu digo: muito obrigado por ter acreditado e ter dedicado muito do seu tempo a mim. Esta tese de doutorado também é sua.

Aos meus amigos do ensino fundamental, muito obrigado pelos incentivos que vocês sempre me deram.

Em um certo momento pairou em minha mente fazer graduação em física, o responsável por isto foi o Prof. Mauro Santos que me ensinou física no 1^0 e no 3^0 ano do ensino médio. Gostei muito destes cursos, e principalmente da forma que o Prof. Mauro acreditava em cada um dos alunos. Nunca esquecerei quando no primeiro dia de aula do

3º ano, Mauro falou que acreditava que aquela turma atingiria recorde de aprovação no vestibular.

Aos meus amigos Adriano, Eduardo, João Carlos e Jocimar com quem convivi em parte do ensino fundamental e no ensino médio muito obrigado por sempre me incentivarem e acreditarem que eu conseguiria.

Conheci o IMPA através do Prof. Valdemberg Araújo quando tinha por volta de 13 anos. Ele me mostrou o que é ser um pesquisador em matemática. Aprendi muita matemática durante o período que participei do seu Projeto. Muito obrigado Prof. Valdemberg, pela oportunidade de estudar com o senhor e por todos os conselhos que me deu.

Aos professores do departamento de matemática da Universidade Federal de Sergipe - UFS, onde fiz a graduação, muito obrigado pelo empenho e a dedicação que tiveram com todos os alunos. Gostaria de agradecer em especial aos professores Alan Almeida, Almir Rogério, Davi Soares, Fábio Santos e Manuel Lino (in memorian). Com o Prof. Alan tive meu primeiro contato com álgebra abstrata, as aulas eram sensacionais. Foi o Prof. Alan quem me ensinou o jargão do meio matemático. Tenho até hoje as notas de aula deste curso. O Prof. Almir foi meu professor de Análise na Reta, nunca esquecerei as tardes que fiquei na minha casa no Roza Elze estudando Análise. Gostei muito deste curso. Quando estudei EDO com o Prof. Davi, descobri de imediato que queria para minha carreira estudar algo relacionado com equações diferenciais, só fiquei na dúvida se seria EDO ou EDP. Este curso com o Prof. Davi foi meu primeiro contato com matemática aplicada. Me encantava a forma que era feita a modelagem matemática dos problemas. O Prof. Davi foi um excelente professor. O Prof. Fábio foi meu professor de Variáveis Complexas. Em suas aulas falava de tudo relacionado com matemática. Gostava da simplicidade com a qual ele apresentava o conteúdo. Quando ele falava tudo parecia muito fácil. O Prof. Lino foi mais que meu professor. Foi meu amigo e o conselheiro. Sempre me incentivou bastante a acreditar que conseguiria fazer o doutorado.

Tenho que fazer um agradecimento especial, ao meu amigo e a pessoa que me ajudou com adaptação na universidade Marcos Matos. Meu primeiro semestre na UFS foi difícil. Enfrentei dificuldades em Cálculo 1, não conseguia acompanhar o ritmo de aprendizagem que era exigido. Marcos me socorreu neste momento. Me deu inúmeras aulas. Você é um excelente professor Marcos.

No período que estive na UFS fiz grandes amigos. A todos da minha turma de matemática muito obrigado por compartilharem este sonho comigo. Aos meus amigos Adelmo, Alisson Menezes, Kleber, Lucival, Moisés e Raul, com os quais tive o prazer de morar no Roza Elze, muito obrigado por me apoiarem em tudo. Aos meus amigos do Treze, contemporâneos na UFS, Alexandre, Alisson (da física), Balbino, Gilvan, Roberto

Francisco, Mateus (da biologia) e Mateus (da geografia) muito obrigado por sempre me incentivarem e acreditarem em meu potencial.

Aos meus amigos Davis e Bruno, com os quais estive junto desde o ensino médio até a UFS obrigado pelo apoio que sempre me deram.

A minha entrada no meio acadêmico deve-se principalmente a uma pessoa, Prof. Jorge Ferreira. Me lembro que quando o conheci em 2007, ele disse: "Vou fazer de você um doutor em matemática". Prof. Jorge apostou no meu potencial. Me preparou para o mestrado. Seguindo seus conselhos fui fazer o mestrado na Universidade Federal da Bahia - UFBA, onde ele foi co-orientador da minha dissertação. Prof. Jorge foi para mim mais que um professor, foi um segundo pai que a vida me deu. Sempre fez o que podia para me ajudar. Ele é o responsável direto por minha vinda ao IMPA. Muito obrigado por tudo Prof. Jorge.

Queria agradecer a todos os professores que tive no mestrado na UFBA pela excelente formação que me deram. Especialmente ao Prof. Armando por nunca subestimar a capacidade dos seus alunos.

Queria agradecer profundamente ao Prof. Varandas, meu orientador de mestrado, por ter acreditado em meu potencial e ter me dado uma carta de recomendação para vir ao IMPA.

Aos meus amigos do mestrado Angela, João Paulo, Robério, Teles, Vinicius e Wendel muito obrigado por terem me apoiado e dado confiança para fazer o doutorado.

Planejava estudar no IMPA desde que tinha 13 anos. Porém quando recebi o email da divisão de ensino informando que tinha sido aceito para o programa de doutorado tive uma mistura de sentimentos, felicidade e medo. Fiquei assustado com tanta mudança que isto provocaria na minha vida. Seguindo os conselhos do Prof. Jorge e do Prof. Varandas vim para cá.

O início não foi fácil. Sofri bastante no primeiro curso que fiz: Análise Funcional no verão de 2010 com o Prof. Roberto Imbuzeiro. Não tinha o mesmo ritmo de aprendizado dos outros alunos, devido a isto passei a não acreditar na minha capacidade, sentimento que ocorre em alguns alunos recém chegados ao IMPA. O Prof. Imbuzeiro foi fundamental na recuperação da minha autoestima. Os conselhos que ele dava aos alunos me ajudaram a ter forças para lutar para me manter no IMPA. Muito obrigado Prof. Imbuzeiro.

No IMPA ganhei um "bilhete de loteria premiado"quando o Prof. André Nachbin aceitou ser meu orientador. Os cursos que fiz com ele foram sensacionais. Meus amigos mais próximos sabem o quanto era fã de suas aulas. Seus conselhos e experiências me ajudaram bastante a enfrentar as dificuldades. Quando estava mais triste ou desacreditado, gostava de conversar com ele, fazia bem para a alma. O Prof. André será a referência

que tomarei na minha vida acadêmica. Agradeço-o por ter aceitado me orientar, pela paciência que teve comigo e por todo o suporte que me deu no IMPA.

Através do Prof. André, conheci o Prof. Paul Milewsk, uma pessoa fantástica. O período que trabalhei com o Prof. André e Prof. Paul em Bath foi muito produtivo. Gostaria de agradecer ao Prof. Paul por todos as sugestões, críticas e debates que tivemos. A experiência do Prof. Paul foi peça fundamental nas descobertas que fizemos nesta tese.

Aos amigos que fiz no IMPA muito obrigado por terem feito a minha estadia no Rio de Janeiro mais feliz. Em especial gostaria de agradecer a Ana Maria, Elaís, Lucas Ambrozio, Nara, Roberto Teodoro e Ruben. Gostaria de agradecer ao meu amigo Carlos Sauer que foi um grande companheiro no meu primeiro ano no IMPA. Aos companheiros com quem compartilhei moradia em algum período do doutorado – Flávio, Manoel, Luiz Paulo, Felipe (Belezinha) e Cayo – vocês foram meus irmãos no Rio de Janeiro. Gostaria de agradecer também a todos que fizeram ou fazem parte da família "Portão Vermelho", especialmente Dania, Hudson, Inês, Yunelsi, Leandro, Léo, Marilene e Rafael.

Muito obrigado a todos os funcionários do IMPA, por me tratarem sempre bem e pela disposição com que me ajudaram quando necessitei.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a Petróleo Brasileiro S.A. (PETROBRAS) pelo suporte financeiro durante os cursos de doutorado e o desenvolvimento da minha tese.

Agradeço ao ex-presidente Lula por criar mecanismos que possibilitaram o custeio dos meus estudos. Seus programas darão oportunidades para que outras crianças pobres, "sem parentes importantes"e que vêm do interior consigam realizar seus estudos.

Como meu pai costuma falar: "quando se está longe de casa, filho chora e mãe não vê". Ficar longe da minha família durante estes anos foi sofrido. Quando a alma padece só a poesia acalenta o coração. Agradeço a Belchior, Fagner, Luiz Gonzaga, Gonzaguinha e Zé Ramalho por suas canções que me ajudaram nos momentos de tristeza a matar a saudade da minha família e da minha terra.

Durante os últimos quatros anos trabalhei com a garra do povo nordestino, que construiu a pujança das grandes cidades e cujos calos das mãos dão contorno ao progresso. Dedico esta tese a cada a nordestino que foi obrigado a deixar o seio de sua família e vir para o "sul maravilha"em busca de um futuro melhor. Eles foram meu exemplo para suportar a saudade da minha casa. Eles transformam dor em esperança e a tristeza em fé. Por mais que a distância faça aumentar a saudade de seus familiares em suas terras natais, nunca deixam de sorrir e acreditar num futuro melhor.

Agradeço a minha vó Marcília (in memorian) pelas orações que ela fez por mim. Agradeço também a todos os meus tios e primos por sempre torcerem pelo meu sucesso.

No IMPA conheci uma pessoa muito especial, fundamental para esta conquista,

minha namorada Gisele. Ela foi meu porto seguro e meu baluarte. Nos momentos de mais estresse, ela me tranquilizava e me dava confiança de que tudo daria certo. Muito obrigado Gi, pelo suporte emocional que você me deu.

A meus pais Roberto e Rosidete, e a minha irmã Rafaela agradeço por todos os esforços que fizeram para que eu chegasse até aqui. Nos momentos que o cansaço superava as minhas energias, me inspirava na determinação para o trabalho que cresci vendo no meu pai e na minha mãe. Entrego esta tese aos meus pais. Ela simboliza o título de "Doutor como Pais"ao Sr. Roberto Ribeiro dos Santos e a Sra. Josefa Rosidete Bispo Santos.

"Que Stendhal confessasse haver escrito um de seus livros para cem leitores, coisa é que admira e consterna. O que não admira, nem provavelmente consternará, é se este outro livro não tiver os cem leitores de Stendhal, nem cinquenta, nem vinte, e quando muito, dez. Dez? Talvez cinco."

Brás Cubas

Resumo

O estudo de ondas não lineares com efeitos de vorticidade constante no interior do fluido é bem recente. Do ponto de vista da Análise este tema é ainda mais recente, com pouca teoria disponível e diversas questões em aberto. Quanto a trabalhos numéricos, a maioria, trata apenas sobre os efeitos da vorticidade no perfil da onda de superfície livre. A proposta deste trabalho é analisar em detalhe quais as consequências da vorticidade constante no interior do fluido. Um mapeamento conforme igual ao usado por Milewski et al. [40] é utilizado para extrair estas informações. A formulação numérica utilizada permite calcular com precisão a localização de pontos de estagnação. Com isto, mostramos que o sistema dinâmico das trajetórias das partículas no referencial da onda sofre uma bifurcação sela-centro de acordo com variações da vorticidade e da onda de superfície. Tais resultados são inéditos. Nenhum dos estudos teóricos e numéricos realizados anteriormente analisaram a bifurcação sofrida por este sistema. Mostramos também que em fluxos com pontos de estagnação, os pontos de máximo da pressão ocorrem no fundo abaixo dos pontos de sela, e não abaixo da crista. Além disso, órbitas de partículas no referencial fixo em fluxos com vorticidade constante são calculadas numericamente pela primeira vez na literatura.

Palavras-chave: Problema de fronteira livre. Ondas de água. Ondas periódicas. Ondas viajantes. Ondas de Stokes. Trajetórias de partículas. Método numérico. Vorticidade constante. Pontos de estagnação.

Abstract

The study of nonlinear waves under the effects of constant vorticity inside the fluid is very recent. From the point of view of Analysis this theme is even more recent with little theory available and several open issues. As to numerical work, the majority deals only on the effects of vorticity along the wave profile of the free surface. The purpose of this work is to analyze the consequences of constant vorticity in the interior of the fluid body. The same conformal map used by Milewski et al. [40] is used to extract this information. The numerical formulation allows us to calculate accurately the location of stagnation points. We showed that the dynamical system for the particle trajectories in the wave frame of reference undergoes a saddle-center bifurcation as the vorticity and the surface wave are varied. These results are unprecedented. Previously neither theoretical nor numerical studies analyzed the bifurcation mechanism that this system undergoes. We also show that in flows with stagnation points, the points of maximum pressure occur on the bottom below the saddle points and away from the crest. In addition, under constant vorticity the particle orbits in the physical frame are calculated numerically for the first time in the literature.

Keywords: Free-boundary problem. Water waves. Periodic waves. Traveling waves. Stokes waves. Particle trajectories. Numerical methods. Constant vorticity. Stagnation point.

Notação

A notação utilizada foi a seguinte:

η	Elevação da superfície
τ	Período da onda
λ	Comprimento de onda
H	Altura da onda
a	Amplitude da onda
$c = \lambda/\tau$	Velocidade de fase
d	Largura do canal
$k = 2\pi/\lambda$	Número de onda
$\alpha = H/d$	Parâmetro de não linearidade
$\beta = d^2/\lambda^2$	Parâmetro de dispersão
$\varepsilon = H/\lambda$	Parâmetro para fixar a classe da onda de superfície. A menos dos perfis exóticos de ondas, perfis que não são gráficos de uma função , ε é a inclinação da onda.
x	Coordenada horizontal no referencial de laboratório
y	Coordenada vertical no referencial de laboratório
u	Velocidade horizontal do fluido
v	Velocidade vertical do fluido
p	Pressão no fluido
$\gamma := v_x - u_y$	Intensidade da vorticidade do fluxo
X	Coordenada horizontal no referencial móvel
Y	Coordenada vertical no referencial móvel
ϕ	Potencial de velocidade para o campo de velocidade do fluido
ψ	Função de corrente do fluxo

No estudo de fluxos com vorticidade constante, também foi utilizada a seguinte notação:

$\tilde{\phi}$	Potencial de velocidade para a parte irrotacional do fluxo com vorticidade constante
$\tilde{\psi}$	Função harmônica conjugada de $\tilde{\phi}$
ξ	Coordenada horizontal no domínio canônico
ζ	Coordenada vertical no domínio canônico
$(X(\xi,\zeta), Y(\xi,\zeta))$	Aplicação conforme que leva uma faixa de largura D no domínio físico
$\mathbf{Y}(\xi) := Y(\xi,0) = \eta(X(\xi,0))$	Elevação da superfície livre no domínio canônico
$(\mathbf{X}(\xi), \mathbf{Y}(\xi))$	Parametrização da superfície livre via equações do mapeamento conforme, ou seja, $(\mathbf{X}(\xi), \mathbf{Y}(\xi)) = (X(\xi,0), \eta(X(\xi,0)))$
$\tilde{\phi}(\xi,\zeta) := \tilde{\phi}(X(\xi,\zeta), Y(\xi,\zeta)$	Potencial de velocidade $\tilde{\phi}$ no sistema de coordenadas (ξ,ζ)
$\tilde{\psi}(\xi,\zeta) := \tilde{\psi}(X(\xi,\zeta), Y(\xi,\zeta)$	Função $\tilde{\psi}$ no sistema de coordenadas (ξ,ζ)
$\tilde{\mathbf{\Phi}}(\xi) := \tilde{\phi}(\xi,0)$	Potencial $\tilde{\phi}$ ao longo da superfície livre ($\zeta = 0$)
$\tilde{\mathbf{\Psi}}(\xi) := \tilde{\psi}(\xi,0)$	Função $\tilde{\psi}$ ao longo da superfície livre ($\zeta = 0$)

Sumário

Introdução **23**

1 Trajetórias em fluxos irrotacionais com correnteza uniforme **35**

1.1 As equações governantes para fluxos irrotacionais 36

1.2 A terceira identidade de Green e a formulação integral de fronteira 38

1.3 Descobrir os dados de fronteira ao longo da superfície livre 39

1.3.1 As aproximações de Fenton 40

1.3.2 Um procedimento alternativo 40

1.3.3 Um procedimento numérico mais geral 42

1.4 Método numérico para traçar as trajetórias 43

2 Simulações numéricas para trajetórias em fluxos irrotacionais com correnteza uniforme **47**

2.1 Resultados numéricos e as aproximações da teoria linear e fracamente não linear 48

2.2 Trajetórias na presença de uma correnteza uniforme 50

2.3 A relação entre o formato das órbitas e seus parâmetros de depêndencia . 57

3 Trajetórias em fluxos com vorticidade constante **61**

3.1 As equações governantes para fluxos com vorticidade constante 64

3.1.1 As equações governantes adimensionalizadas 67

3.2 Mapeamento Conforme 68

3.2.1 As equações do mapeamento 68

3.2.2 Definindo o perfil da onda na superfície livre 72

3.3 Caracterização da estrutura dinâmica no fluido 72

3.4 Método para traçar as trajetórias 77

4 Simulações numéricas para trajetórias em fluxos com vorticidade constante **79**

4.1 Dados iniciais discretos e perfil de correnteza adotado 82

4.2 Ondas em profundidade intermediária 85
4.2.1 Ilustrando as aproximações da teoria linear 85
4.2.2 Descobrir os dados iniciais ao longo da superfície livre sob o efeito de vorticidade 87
4.2.3 Pontos de estagnação e o efeito da vorticidade no interior do fluido 92
4.2.4 Trajetórias em fluxos com vorticidade constante 100
4.2.5 A energia do sistema 103
4.3 Simulações para diferentes regimes de onda 105

Conclusões **109**

Referências **111**

Apêndices **117**

A Revisão histórica do estudo de trajetórias de partículas **119**

B O efeito de uma correnteza uniforme no fluxo **127**

C Equações do mapeamento conforme **129**
C.1 Solução da equação de Laplace para $Y(\xi, \zeta)$ 129
C.2 Fórmula para $X(\xi, \zeta)$ 130
C.3 Solução das equações de Laplace para $\tilde{\phi}(\xi, \zeta)$ e $\tilde{\psi}(\xi, \zeta)$ 131

D As condições de fronteira livre no sistema de coordenadas canônico **133**

E Fórmulas para a energia cinética e potencial no sistema de coordenadas canônico **137**

F Discretizações **141**
F.1 Discretizando a equação governante da superfície livre 141
F.2 Discretizando o operador de Hilbert $\mathcal{C}[\cdot]$ 143

Introdução

Olhando para o mar, às vezes é possível seguir uma onda que se propaga na superfície da água. Ao contrário do que se possa imaginar, o que se vê viajando no mar não é a água, mas um padrão de onda.

A seguinte ideia intuitiva de Leonardo da Vinci ajuda a entender um pouco melhor a essência da relação existente entre a propagação da onda de superfície e a dinâmica no interior do fluido ([36], p. 168):

> *The impetus is much quicker than the water, for it often happens that the wave flees the place of its creation, while the water does not; like the waves made in a field of grain by the wind, where we see the waves running across the field while the grain remains in its place.*

Entender o efeito que a passagem de uma onda de gravidade ao longo da superfície de água provoca nas partículas de água no interior é um problema de grande interesse tanto do ponto de vista aplicado quanto matemático. Do ponto de vista aplicado um bom entendimento do campo de velocidade submarino garante maior segurança e confiabilidade aos projetos de estruturas flutuantes e as operações no mar. Por exemplo, o conhecimento do campo de velocidade submarino pode ajudar a definir critérios operacionais na região submarina próximo de uma plataforma, que vão desde o impacto em equipamentos submersos ao transporte de poluentes causado por vazamentos. Do ponto de vista matemático existem ainda muitos problemas a serem investigados.

A proposta deste trabalho é realizar uma análise quantitativa dos efeitos provocados no interior do fluido pela passagem na superfície livre de uma onda não linear periódica viajante nas seguintes situações:

- Onda de superfície livre interagindo com uma correnteza uniforme;
- Onda de superfície livre interagindo com uma correnteza que varia linearmente com a profundidade, ou seja, com vorticidade constante.

No caso em que a onda de superfície interage com uma correnteza uniforme o foco é analisar os padrões de trajetórias das partículas do próprio fluido no interior. Já para

ondas interagindo com uma correnteza que varia linearmente com a profundidade, além de procurar pelos padrões de trajetórias, pretende-se explorar em detalhes um fenômeno bastante interessante: o surgimento de pontos de estagnação, bem como estruturas que surgem associadas ao mesmo fenômeno. Em particular, analisar a estrutura do plano de fase, tema de grande interesse em análise. Pontos de estagnação são pontos no fluido que viajam com velocidade igual à velocidade da onda. Nestes pontos a velocidade vertical é nula e a velocidade horizontal é a mesma da onda, ou seja, este é um ponto crítico, estático, quando visto no referencial móvel da onda. Para uma leitura mais rápida, está disponível no Apêndice A uma revisão sucinta sobre a história dos estudos realizados sobre trajetórias de partículas. Pontuamos de forma esquemática qual é a contribuição desta tese a este tema.

Os primeiros resultados relacionados a trajetórias de partículas abaixo de uma onda de água são devidos a Stokes [49], trabalho publicado em 1847, no qual ele mostra que para ondas no regime de águas rasas (ou seja ondas longas) e no regime de águas profundas, cada partícula sofre um pequeno *drift* (deslocamento residual) na direção de propagação da onda após descrever uma órbita quase fechada. O método de cálculo utilizado envolve sucessivas aproximações, e a validade desta conclusão é um tanto duvidosa (apud [55], p. 145). Para aumentar a desconfiança nos resultados de Stokes, órbitas fechadas – com a forma circular para águas profundas ou com a forma elíptica para canais em profundidade finita – foram obtidas a partir de uma linearização da equação diferencial ordinária-EDO das trajetórias das partículas, sob a hipótese de ondas de superfície periódicas e lineares ([35], p. 356; [48], p. 47). Estas órbitas fechadas foram depois "confirmadas"por experimentos laboratoriais [46] (uma foto destes experimentos podem ser encontrada em ([48], p. 42)), fato que aumenta ainda mais as suspeitas sobre a veracidade das aproximações de Stokes.

Com o intuito legitimar os resultados de Stokes [49], em 1953 Ursell [55] forneceu uma prova rigorosa para a existência de um *drift* suave associado à passagem de uma onda de gravidade na superfície. Esta prova foi realizada para ondas no regimes de águas profundas e no regime de águas rasas em profundidade uniforme.

Em 1979, Longuet-Higgins [39] descobriu a partir de aproximações que órbitas induzidas por ondas não lineares sofrem a ação de um *drift*. Entretanto o mesmo não acreditava ser válido para ondas lineares, como leva a entender no seguinte trecho retirado de ([39], p. 497):

> *In progressive gravity waves of very small amplitude it is well known that the orbits of the particles are either elliptical or circular. In steep water waves, however, the orbits become quite distorted, as shown by the existence of a mean horizontal drift or mass-transport in irrotational waves.*

Contudo uma foto de um experimento realizado pelo próprio Longuet-Higgins em 1986 ([38], p. 686) para traçar a trajetória de uma partícula na superfície levanta indícios sobre o perfil das trajetórias de todas as partículas no interior do fluido. A trajetória obtida tem a forma de um laço com um *drift*.

Em contraste com [55] , em 1997, sem fazer nenhuma restrição ao regime da onda, a partir de uma análise do transporte de energia, Yih [60] sugere a existência de um *drift*. Apenas recentemente foi realizada uma prova rigorosa, mais geral, do *drift* sofrido pelas partículas e da forma de suas órbitas.

Como se pode notar, o avanço da análise matemática rigorosa no assunto foi muito recente. Em 2008, foi publicado o trabalho de Constantin e Villari [19], no qual é provado que para o problema linearizado não existem órbitas fechadas. Apesar de [19] ter sido publicado em 2008, lendo o trabalho de Constantin [9], publicado em 2006, fica evidente que [19] foi feito antes de 2006. Em [9], Constantin demonstrou que órbitas fechadas não existem para ondas de pequenas e grandes amplitudes. Além disso, forneceu uma descrição geométrica das trajetórias das partículas: as órbitas têm a forma de laços. Em [19], a análise foi simplificada, pois foi realizada a partir das fórmulas explícitas do campo de velocidade, da pressão e da superfície livre conhecidas da teoria linear. No caso mais geral em [9], nenhuma destas informações é conhecida. Constantin conseguiu os resultados através de um estudo qualitativo do problema de valor de fronteira não linear proveniente da formulação via função de corrente. As ferramentas utilizadas foram propriedades das funções harmônicas.

Ampliando o estudo das trajetórias de partículas, em 2010, Constantin e Strauss [16] analisaram trajetórias provenientes da interação da onda de superfície livre com uma correnteza uniforme. Eles provaram analiticamente que neste caso existe a possibilidade de uma trajetória fechada, ou seja, do *drift* ser nulo. Contudo sua localização e outras informações quantitativas continuavam desconhecidas. Uma das contribuições do trabalho apresentado nesta tese é reproduzir muitos dos resultados de Constantin e Strauss [16] de uma perspectiva quantitativa através de um modelo numérico preciso.

Informações quantitativas das órbitas das partículas são de interesse teórico e prático. A grande dificuldade está na necessidade de resolver uma EDO não linear para descobrir as trajetórias. Isto acontece mesmo para ondas lineares em fluxos irrotacionais, onde o campo de vetores (a saber o campo de velocidade do fluido) é conhecido explicitamente, mas a EDO segue sendo não linear ([8], p. 138; [19], p. 8; [48], p. 47).

Neste trabalho é proposta uma formulação integral de fronteira para capturar órbitas de partículas abaixo de ondas de Stokes em escoamentos irrotacionais com correnteza uniforme em uma gama de regimes de ondas. Como será descrito nos Capítulos 1 e 2, esta formulação computacional é adequada para capturar com alta precisão in-

formações quantitativas, e assim reproduzir vários padrões de trajetórias de partículas, como por exemplo os descritos em [9, 16, 19]. A definição de onda de Stokes utilizada é a encontrada em ([8], p. 132): ela é uma onda periódica viajante, em um fluxo irrotacional bidimensional, com perfil simétrico e monótona da crista ao cavado.

Nesta linha, outros trabalhos numéricos disponíveis na literatura [21, 25, 30, 45] são baseadas em expansões em séries de potências em termos do parâmetro $kH/2$, onde H é a altura da onda e $k = 2\pi/\lambda$, onde λ é o comprimento de onda. Este parâmetro não foi usado em [5], onde uma série de Fourier foi truncada e seus coeficientes calculados através de uma variante do método de Newton. Em um estudo mais recente, Umeyama [54] usou o parâmetro a/k, onde a é a amplitude da onda. Já em [43]– para ondas no regime de águas profundas – os autores usaram um potencial complexo e reconstruíram o problema ao longo de um disco no plano complexo. Depois disso, uma aproximação espectral de Fourier foi considerada.

Através da formulação integral de fronteira proposta, podemos calcular o campo de velocidade em qualquer ponto dentro do fluido sem realizar qualquer tipo de expansão em série de potências. São usadas todas as informações disponíveis sobre os dados de fronteira para capturar o campo de vetores da EDO não linear para as trajetórias das partículas no interior do domínio.

Das muitas expansões disponíveis, a aproximação de quinta ordem de Fenton [25] é amplamente aceita e tem uma boa precisão para ondas de Stokes com comprimento 10 vezes menor que a profundidade do canal. A aproximação é feita em termos do parâmetro $kH/2$. Para ondas de Stokes fracamente não lineares, as aproximações de Fenton são bastante precisas e funcionam como uma excelente ferramenta de teste de precisão do método integral de fronteira. Desta forma usamos as aproximações de Fenton tanto como teste como uma aproximação inicial para os casos além do regime previsto por Fenton.

Como mencionado anteriormente, uma das contribuição deste trabalho ao estudo de trajetórias induzidas pela interação entre ondas de Stokes com uma correnteza uniforme é capturar de forma quantitativa características descobertas analiticamente por Constantin e colaboradores [9, 16, 19]. Nossos resultados quantitativos são obtidos através de um modelo numérico preciso que evita expansão em série de potências, sendo assim útil para mais regimes de ondas de Stokes, no que toca à sua amplitude. Em particular mostramos que trajetórias de partículas podem ser capturadas com grande precisão, por exemplo, no caso da órbita fechada que é capturada com muitos dígitos de precisão. Além disso, as simulações mostraram que, quando a onda interage com uma correnteza uniforme **pode existir uma órbita não suave dentro do fluido.** Este fato não era conhecido nos trabalhos de Constantin. A configuração numérica possui precisão espectral no espaço [53], devido ao fato de se integrar funções periódicas suaves ao longo da superfície livre.

As ferramentas utilizadas são a terceira identidade de Green ([31], p. 97) e o método das imagens sobre o fundo plano junto a uma função de Green periódica dada em ([27], p. 327). Com isto, a integral de linha ao longo da fronteira é reduzida à superfície livre.

A vorticidade em cena

Dando um passo à frente no estudo da interação onda-correnteza, permite-se a correnteza variar linearmente com a profundidade. O fluxo induzido pela correnteza variando linearmente com a profundidade para a superfície livre em repouso é denominado de fluxo cisalhante trivial.

Permitir que a intensidade da correnteza varie linearmente com a profundidade tem um grande impacto: o fluxo passa a ser rotacional. Neste novo cenário, os fluxos possuem vorticidade constante. Do ponto de vista de Análise este tema é ainda mais recente com menos teoria disponível e diversas questões em aberto.

No estudo de fluxos com vorticidade constante, o objetivo principal deste trabalho é analisar quantitativamente os efeitos provocados pela vorticidade no interior do fluido. Este estudo será feito sob a hipótese que a onda de superfície livre é uma onda periódica viajante.

As primeiras perguntas que surgem, e requerem respostas, ao tratar deste novo fluxo são as seguintes: Quais propriedades do fluxo irrotacional permanecem válidas? Quais mudanças a vorticidade constante provoca no fluxo? Propriedades inerentes às ondas de gravidade periódicas viajantes em fluxos irrotacionais, tais como simetria do perfil da superfície livre [44, 51], analiticidade das linhas de correntes [37] e a conjectura de Stokes [1, 42] continuam sendo válidas em fluxos rotacionais [10, 11, 12, 13, 29, 58]. Quanto às características peculiares aos fluxos com vorticidade constante são conhecidas a existência de perfis exóticos de ondas e a existência de pontos de estagnação. Perfis exóticos são perfis de ondas que não são gráficos de uma função. Pontos de estagnação são interessantes porque sua existência leva a concluir que existe uma região onde o fluido é "transportado"com a onda, fato que não ocorre em fluxos irrotacionais. Matematicamente os pontos de estagnação são definidos como pontos de equilíbrio da equação diferencial ordinária (EDO) das trajetórias no referencial da onda. Conforme estudo inédito realizado neste trabalho, há o surgimento de uma estrutura muito interessante no plano de fase deste sistema.

Os resultados conhecidos pela comunidade científica sobre ondas periódicas viajantes na presença de fluxos rotacionais podem ser divididos em três grupos: (i) analíticos; (ii) via aproximações e linearizações; (iii) numéricos.

Não há uma prova rigorosa da existência de ondas periódicas viajantes de grandes amplitudes em fluxos rotacionais com pontos de estagnação. Neste trabalho iremos exibir

uma diversidade de regimes de onda-vorticidade com a presença de pontos de estagnação e como estes se posicionam no retrato de fase. Os resultados analíticos sobre existência de ondas de grande amplitude em fluxos rotacionais [14, 15] restringem-se a fluxos sem pontos de estagnação. Para fluxos com pontos de estagnação é provada apenas a existência de ondas de pequena amplitude [18]. É sabido que a velocidade vertical do fluido, v, abaixo de uma onda periódica viajante simétrica na superfície livre é uma função ímpar [14]. Além disso em fluxos sem pontos de estagnação a velocidade horizontal das partículas, u, é menor que a velocidade da onda, c. A partir disto, os trabalhos teóricos concentram-se em abordar fluxos sem pontos de estagnação em regimes onde o máximo de $u - c$ está perto de zero, ou seja, em fluxos de "quase estagnação"[17]. O objetivo destes trabalhos é descobrir em qual região do fluido está o máximo da velocidade horizontal e deste modo descobrir onde pontos de estagnação podem possivelmente ocorrer. A localização dos pontos de estagnação é fornecida de forma precisa nesta tese.

Dentre os trabalhos acadêmicos que utilizam aproximações e linearizações destaca-se o de Ehrnström e Villari [23]. Os autores linearizaram as equações governantes em torno do fluxo cisalhante trivial e encontraram uma expressão para o campo de velocidades no interior do fluido. O conhecimento deste campo de velocidades permitiu que se encontrassem três pontos de estagnação por comprimento de onda no interior do fluido e se realizasse uma classificação topológica dos mesmos, um ponto de centro e dois pontos de sela. Além disso, foi dada uma descrição dos padrões de trajetórias possíveis. Estendendo este trabalho para o caso de vorticidade dependendo linearmente da função de corrente, Ehrnström et al [22] supuseram que a elevação da superfície livre e todas as grandezas do fluido admitem uma expansão da forma

$$f = f_0 + r f_1 + \mathcal{O}(r^2), \quad r \to 0,$$

onde para $r = 0$ a superfície livre é plana e tem-se fluxo gerado pela correnteza ambiente. A partir disto, obtiveram uma expressão para o campo de velocidades. Como resultado encontraram múltiplas camadas dentro do fluido onde existem pontos de estagnação.

Ainda no grupo das aproximações e linearizações, Wahlen [61] construiu, a partir da teoria da bifurcação, fluxos com vorticidade constante que são perturbações do fluxo cisalhante trivial. Com isto mostrou que existem três pontos de estagnação por comprimento de onda e descreveu qualitativamente as trajetórias. Contudo neste trabalho, não foi feita nenhuma classificação topológica dos pontos de estagnação.

A maioria dos estudos numéricos para ondas em fluxos com vorticidade constante restringe-se a mostrar os efeitos provocados pela vorticidade no perfil da onda de superfície livre [6, 56, 57]. Até onde se sabe, os trabalhos numéricos voltados para os efeitos da vorticidade no interior do fluido são devidos a Teles da Silva e Peregrine [50], Vasan e

Oliveras [59] e Ko e Strauss [33, 34]. Abaixo é feita uma breve descrição de cada um destes trabalhos.

- Em 1988, Teles da Silva e Peregrine [50] desenvolveram um método numérico para construir ondas de superfície livre em fluxos com vorticidade constante. Eles utilizaram o potencial complexo de velocidade, onde, a partir de um mapeamento do domínio físico no plano complexo, as equações governantes da fronteira livre foram re-escritas na forma de uma equação integro-diferencial, em função do perfil da onda. A discretização desta equação resultou em um sistema de equações não lineares que foi resolvido pelo método de Newton. No fim do artigo, é exibida uma figura com gráficos de linhas de corrente e curvas de nível da pressão no interior do fluido. A partir destes gráficos vê-se que há pelo menos um ponto de estagnação e a perda de monotocidade da pressão. Porém não é deixado claro no trabalho como tais gráficos foram construídos. Nem como a estrutura apresentada varia com parâmetros (vorticidade e onda de superfície). Os autores justificam estes gráficos a partir de uma comparação entre ondas periódicas viajantes e ondas cisalhantes de superfície construídas pelo modelo de Peregrine [41]. Ondas cisalhantes de superfície são ondas caracterizadas por possuírem na superfície livre uma camada de alta velocidade que flui sobre o restante do fluido, que tem menor velocidade. A partir desta comparação também é concluída a existência de pontos dentro do fluido com pressão menor que a pressão atmosférica.

- Nos trabalhos de Ko e Strauss [33, 34], em 2008, foram abordados os casos de vorticidade constante e descontínua [34] e fluxos com camadas de vorticidade [33]. Em seus estudos eles aplicaram a transformação de Dubreil-Jacotin, a qual achata a superfície livre e mapeia o domínio físico em um quadrado. As equações governantes no novo sistema de coordenadas foram resolvidas usando o pacote TRILINOS. Para a utilização da transformação de Dubreil-Jacotin é necessário supor que a velocidade horizontal das partículas no fluido, u, é menor que a velocidade da onda, c, o que exclui a existência de pontos de estagnação no interior. Em seus trabalhos, Ko e Strauss estudam fluxos para os quais o máximo de $u - c$ está perto de zero, ou seja, fluxos de "quase estagnação". Os resultados de Ko e Strauss dão indícios para existência de pontos de estagnação, mas não podem informar a localização dos mesmos. Cabe ressaltar o pioneirismo de Ko e Strauss ao abordar vorticidade não constante.

- Em 2014, Vasan e Oliveras [59] abordaram fluxos com vorticidade constante. Eles escreveram as equações governantes via uma formulação não local recente [20] e

construíram um método numérico preciso para traçar as linhas de corrente e encontrar a pressão no interior do fluido. A principal contribuição do trabalho de Vasan e Oliveras é deduzir uma relação entre a elevação da onda de superfície e a pressão no fundo do canal. A partir desta relação, Vasan e Oliveras mostram que para determinados valores de vorticidade o ponto de máximo da pressão no fluido, por comprimento de onda, ocorre em dois pontos no fundo do canal. Quanto ao estudo de pontos de estagnação os resultados de Vasan e Oliveras são os mesmos de Teles da Silva e Peregrine [50]. Assim como no trabalho de Teles da Silva e Peregrine [50], a metodologia utilizada por Vasan e Oliveras para encontrar pontos de estagnação foi observar os gráficos das linhas de corrente ([59], p. 3235). Desta forma, a depender do caso, é possível identificar a existência de um ponto de estagnação, porém não se consegue encontrar com precisão sua localização. Traçar as linhas de corrente não é o método adequado para encontrar com precisão pontos de estagnação. Deste modo é possível identificar apenas pontos de centro que estejam suficientemente longe do fundo, pois neste caso as linhas de corrente fechadas podem ser notadas. Apenas traçando as linhas de corrente, pontos de estagnação que possam ocorrer perto do fundo ficam despercebidos. Sem conhecer a localização precisa dos pontos de estagnação é impossível fazer um estudo rigoroso dos mecanismo responsáveis pelo surgimento dos mesmos. Mais ainda, é impossível fazer um estudo detalhado sobre a influência destes pontos e outras características do fluxo, como por exemplo o efeito da presença deles na localização dos pontos de máximo da pressão. Por isto, Vasan e Oliveras, ao analisar a correlação existente entre a presença de pontos de estagnação e a localização dos pontos de máximo da pressão, restringem-se a fluxos nos quais as ondas de superfície possuem amplitudes arbitrariamente pequena, pois neste regime é conhecida uma condição para o surgimento de pontos de estagnação.

Como pode ser visto, os trabalhos numéricos anteriores sobre os efeitos da vorticidade constante no interior do fluido [50, 34, 59] não encontraram com precisão a localização dos pontos de estagnação. O estudo de pontos de estagnação nestes trabalhos resumiu-se a traçar as linhas de corrente [50, 59] ou estudar fluxos de "quase estagnação"[34]. Além disso, nenhum trabalho numérico encontrou órbitas de partículas no referencial de laboratório. Os resultados existentes para órbitas de partículas foram obtidos a partir de linearizações ou aproximações [23, 61] e são válidos apenas para ondas de amplitude arbitrariamente pequena.

Da revisão histórica da literatura sobre fluxos com vorticidade constante, nota-se que não existe nenhum trabalho teórico ou numérico contendo com precisão a localização dos pontos de estagnação. Mostraremos nesta tese um método numérico capaz de **descobrir com precisão a localização dos pontos de estagnação**. Este método numérico

abre espaço para uma série de estudos. Por exemplo, permite-nos analisar como os pontos de estagnação surgem ou desaparecem no interior do fluido em função de variações da vorticidade e da onda de superfície livre. Pela definição de pontos de estagnação, é fácil perceber que, matematicamente, eles são os pontos de equilíbrio da EDO das trajetórias no referencial da onda. Será feito um estudo inédito sobre a bifurcação sofrida pela EDO das trajetórias no referencial da onda, tendo como parâmetros do sistema a vorticidade e a onda de superfície.

Não há na literatura nenhum resultado teórico ou numérico sobre trajetórias de partículas no referencial de laboratório geradas por ondas periódicas viajantes não lineares em fluxos com vorticidade constante. Os resultados existentes mais próximos deste tema são métodos numéricos para traçar linhas de corrente [50, 34, 59], as quais são as trajetórias das partículas no referencial móvel. Entre traçar as linhas de corrente a obter as órbitas no referencial de laboratório existe uma dificuldade muito grande. Ao traçar as linhas de corrente a evolução no tempo das partículas ficam desconhecidas, bem como o sentido destas curvas. Estas dificuldades impossibilitam descobrir as trajetórias no referencial de laboratório apenas com o conhecimento das linhas de corrente. De forma mais intuitiva, é como se o retrato de fase fosse uma pintura dos rastros das partículas. Ele representa fielmente a forma das órbitas no referencial móvel, contudo uma pessoa admirando o quadro não é capaz de dizer o tempo que o pintor observou cada partícula para a pintura adquirir tal formato. Apresentaremos um método numérico para capturar, de forma inédita na literatura, **órbitas das partículas no referencial físico** geradas por ondas periódicas viajantes em fluxos com vorticidade constante. Alguns exemplos de padrões de órbitas obtidos são mostrados na figura 4.15.

Neste trabalho também será apresentado um método para encontrar a **pressão no interior do fluido**. Isto somado à capacidade de encontrar pontos de estagnação com precisão permite que, pela primeira vez, seja estudado como a presença de pontos de estagnação afetam a localização dos pontos de máximo da pressão em fluxos com vorticidade constante, nos quais as ondas de superfície são não lineares. Cabe ressaltar, que os métodos numéricos que propomos neste trabalho são válidos inclusive para perfis de ondas de superfície que não são gráficos de uma função, isto é, perfis de ondas para os quais existe um $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que a reta $x = x_0$ corta a curva que parametriza a onda de superfície em mais de um ponto.

A ideia principal que utilizamos para tratar computacionalmente dos fluxos com vorticidade constante é reformular as equações governantes do sistema, baseando-se em uma aplicação conforme do domínio físico em uma faixa com coordenadas horizontal e vertical dadas por ξ, ζ respectivamente. Através desta aplicação conforme, a onda de superfície livre é mapeada na superfície $\zeta = 0$, sendo este procedimento utilizado por

[6, 40].

Como será mostrado, a partir deste procedimento foram construídos os seguintes métodos numéricos:

(i) Método para encontrar pontos de estagnação.

(ii) Método para encontrar as linhas de corrente.

(iii) Método para calcular a pressão no interior.

(iv) Método para traçar trajetórias.

Por meio do método **(i)** é possível calcular com precisão a localização dos pontos de estagnação. Isto permitirá realizar um estudo numérico preciso sobre como pontos de estagnação surgem, ou desaparecem, no interior do fluido em função de variações da vorticidade γ e da superfície livre η. Para simplificar a compreensão dos mecanismos que provocam o surgimento de pontos de estagnação aplicamos a seguinte metodologia no espaço de parâmetros:

(a) A classe da onda de superfície é fixada, e consideramos apenas os efeitos causados por variações da vorticidade γ. A classe da onda é fixada através de sua declividade considerando o parâmetro $\varepsilon = H/\lambda$, onde H é altura da onda e λ é o comprimento de onda.

(b) A vorticidade γ é fixada, e consideramos os efeitos causados por variações da declividade da onda, ε.

Os pontos de estagnação são os pontos de equilíbrio da EDO das trajetórias no referencial da onda. Novos resultados encontrados, utilizando o método (ii), indicam que tanto no caso **(a)** quanto em **(b)** ocorre uma bifurcação do tipo sela-centro no surgimento dos pontos de estagnação. Nestes casos, existem dois pontos de sela e um de centro por comprimento de onda λ. À medida que estes parâmetros diminuem, os pontos se aproximam, colidem no fundo do canal abaixo da crista e depois deixam de existir. Para ilustrar várias questões desta dinâmica, será apresentada uma curva de bifurcação no espaço dos parâmetros (γ, ε).

Através do método **(iii)** para calcular a pressão no interior, serão traçadas as curvas de nível da pressão abaixo de ondas não lineares, incluindo ondas cujos perfis não são escritos como o gráfico de uma função. Além disso, mostraremos que a presença de pontos de estagnação no interior do fluido implica na existência de dois pontos de máximo da pressão localizado no fundo do canal e simétricos em relação à crista. Algo surpreendente, pois para fluxos irrotacionais o ponto de máximo da pressão está no fundo

e diretamente abaixo da crista [16]. Os trabalhos numéricos anteriores sobre pressão mostraram esta correlação entre dois pontos de máximo da pressão e a presença de pontos de estagnação, apenas para ondas de amplitudes arbitrariamente pequena [59]. Perfis exóticos de ondas que foram encontrados por Vanden-Broeck ([56], p. 214; [57], p. 346) e Teles da Silva e Peregrine([50], p. 292) serão reproduzidos e o fluxo abaixo destas ondas pela primeira vez será analisado. Serão calculadas as linhas de corrente e as curvas de nível da pressão abaixo destes perfis exóticos.

Através do método numérico proposto para encontrar trajetórias, pela primeira vez, serão capturadas órbitas de partículas no referencial de laboratório em fluxos com pontos de estagnação. Até onde se sabe os únicos resultados sobre trajetórias de partículas (dinâmica detalhada ao longo das trajetórias e não linhas de corrente) existentes são feitos através de linearizações ou aproximações das equações governantes [22, 23, 61] e são válidos apenas para ondas arbitrariamente pequenas. Vale notar que linhas de corrente descrevem trajetórias no referencial móvel, mas sem nenhuma indicação da velocidade da partícula, como por exemplo seu sentido.

A tese está organizada como segue.

No Capítulo 1 descreve-se a formulação matemática e o método numérico utilizado para encontrar trajetórias em fluxos irrotacionais com correnteza uniforme. Na Seção 1.1 mostra-se a conexão entre as equações de Euler e a EDO das trajetórias das partículas, para definir o campo de vetores da EDO supracitada. Na Seção 1.2 uma formulação teoria do potencial alternativa é realizada para apresentar a formulação integral de fronteira. Através desta formulação integral de fronteira o potencial de velocidade $\phi(x, y, t)$ pode ser definido em qualquer ponto do interior do domínio. Seu gradiente define o campo de velocidade, isto é, o campo de vetores da EDO das trajetórias. Na Seção 1.3 a formulação é completada mostrando como se obtém todos os dados de fronteira relevante. Em particular, para o regime de ondas viajantes considerado, mostra-se como calcular os dados de Dirichlet e Neumann compatíveis com o potencial $\phi(x, y, 0)$ a partir de um perfil de onda inicial $\eta(x, 0)$, sem ter de resolver as equações de Euler incompressíveis. Na Seção 1.4 é descrito o método numérico para traçar trajetórias em fluxos irrotacionais.

O Capítulo 2 é reservado para mostrar os resultados das simulações realizadas pelo método numérico proposto no Capítulo 1. Na Seção 2.1 é feito um estudo comparativo entre os resultados numéricos para ondas de pequena amplitude e os resultados de aproximações da teoria linear e fracamente não linear. Na Seção 2.2 são apresentados os padrões de trajetórias encontrados. Os padrões de órbitas provados analiticamente por Constantin e colaboradores são pela primeira vez capturados sem realizar nenhuma linearização ou expansão. Além disso, é mostrado indicação da existência de uma órbita não suave. Na Seção 2.3 é analisada a relação entre a forma das órbitas e a profundidade

inicial da partícula e altura da onda. Além disso, para a órbita periódica é analisada a dependência de sua forma em relação à intensidade da correnteza.

O Capítulo 3 é usado exclusivamente para descrever o mapeamento conforme e a formulação matemática dos métodos utilizados para encontrar pontos de estagnação e outros efeitos da vorticidade no interior do fluido. Na Seção 3.1 as equações de Euler são reformuladas em termos do potencial de velocidade da parte irrotacional do fluxo, que tem vorticidade constante. Na Seção 3.2 são obtidas as equações do mapeamento conforme. Em seguida as equações de fronteira livre, cinématica e Bernoulli, são arranjadas de forma que no sistema de coordenadas canônico a onda de superfície livre esteja restrita a uma única equação. Na Seção 3.3 são descritos os métodos numéricos para encontrar pontos de estagnação, traçar linhas de corrente e encontrar a pressão no interior do fluido. Na Seção 3.4 é descrito o método numérico para encontrar trajetórias de partículas no referencial de laboratório.

No Capítulo 4 são discutidos os resultados das simulações efetuadas pelos métodos numéricos propostos no Capítulo 3. Na Seção 4.1 é mostrado como foram feitas as discretizações e definido qual o perfil de correnteza adotado nas simulações. Na Seção 4.2 são feitas diversas simulações para ondas no regime de profundidade intermediária. Nesta seção são mostrados os resultados obtidos nesta tese para fluxos com vorticidade constante. Primeiro é feita uma comparação entre os resultados numéricos para ondas de pequena amplitude e os provenientes de aproximações da teoria linear. Em seguida são analisados os efeitos da vorticidade no perfil da onda de superfície livre. Depois são analisados detalhadamente os efeitos da vorticidade no interior do fluido. Atenção especial é dada aos mecanismos de surgimento de pontos de estagnação. Em seguida são apresentados perfis de trajetórias sob o efeito de vorticidade. E por fim é calculada a energia do sistema. Na Seção 4.3 é analisada a variação da localização dos pontos de estagnação com a mudança do regime da onda de águas rasas para águas profundas.

Capítulo 1

Trajetórias em fluxos irrotacionais com correnteza uniforme

Recentemente foram obtidos teoremas importantes sobre resultados qualitativos para as trajetórias de partículas sob uma onda de Stokes em fluxos irrotacionais. Vários padrões de órbitas foram descritos, incluindo o caso de órbitas fechadas quando uma onda de Stokes propaga na presença de uma correnteza uniforme adversa [16].

A trajetória de uma partícula do fluido, descrita pela órbita $(x(t), y(t))$, é governada pela equação diferencial ordinária (EDO):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u(x(t), y(t), t), \\ \dfrac{dy}{dt} = v(x(t), y(t), t), \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0). \end{cases} \tag{1.1}$$

O deslocamento horizontal da partícula é dado por $x(t)$, enquanto o vertical é $y(t)$. Esta forma de descrever o fluido já é bem conhecida em dinâmica dos fluidos como descrição lagrangiana.

Para o caso no qual o movimento das partículas é devido a ondas de superfície, o estudo desta EDO é extremamente complicado. Para o mais simples problema de ondas de superfície linear surge um sistema não linear de EDOs.

A dificuldade a ser enfrentada por trabalhos teóricos e aplicados é analisar da melhor maneira possível o campo de vetores da EDO. Em outras palavras, entender como passar a informação do campo ao longo da onda de superfície livre para um ponto (x, y) no interior do fluido. Mais ainda, como extrair informações relevantes a partir do movimento da superfície livre de uma maneira eficiente e precisa.

Neste capítulo apresentaremos uma formulação integral de fronteira do problema, formulação que é adequada a ser implementada em um modelo computacional para cap-

turar informações quantitativas, com alta precisão, e capaz de reproduzir vários padrões possíveis para trajetórias de partículas, como por exemplo os descritos em [9, 16, 19].

Nesta linha, outros trabalhos numéricos [21, 25, 30, 45] são baseadas em expansões em séries de potências em termos do parâmetro $kH/2$, onde H é a altura da onda e $k = 2\pi/\lambda$, onde λ é o comprimento de onda. Este parâmetro não foi usado em [5], onde uma série de Fourier foi truncada e seus coeficientes calculados através de uma variante do método de Newton. Em um estudo mais recente, Umeyama [54] usou o parâmetro a/k, onde a é amplitude da onda. Já em [43]– para ondas no regime de águas profundas – os autores usaram o potencial complexo e reconstruiram o problema ao longo de um disco no plano complexo. Depois disso, uma aproximação espectral de Fourier foi considerada.

Todos estes métodos construídos via aproximações ou expansões em séries de potências têm em comum que seus resultados são válidos apenas para ondas fracamente não lineares.

Através da formulação integral de fronteira proposta aqui, pode-se calcular o campo de velocidade em qualquer ponto dentro do fluido sem realizar qualquer tipo de expansão em série de potências. São usadas todas as informações disponíveis sobre os dados de fronteira para capturar o campo de vetores da EDO das trajetórias das partículas no interior do domínio do fluido.

1.1 As equações governantes para fluxos irrotacionais

O ponto inicial para a formulação matemática são as equações de Euler bidimensionais na presença de uma fronteira livre, as quais são dadas por

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y &= -\frac{1}{\rho}p_x, \\ \\ v_t + uv_x + vv_y &= -\frac{1}{\rho}p_y - g, \end{cases} \qquad \text{em} \qquad -d < y < \eta(x,t), \tag{1.2}$$

$$u_x + v_y = 0, \qquad \text{em} \qquad -d < y < \eta(x,t), \tag{1.3}$$

onde $\eta(x,t)$ é a superfície livre de água, $p(x,y,t)$ é a pressão, ρ é a densidade constante, e $g = 10m/s^2$ é a aceleração da gravidade. A irrotacionalidade do fluxo é caracterizada matematicamente por

$$u_y = v_x \qquad \text{em} \qquad -d < y < \eta(x,t). \tag{1.4}$$

Agregadas ao sistema (1.2)-(1.4) estão as seguintes condições de fronteira

$$\begin{cases} v &= \eta_t + u\eta_x, \quad \text{sobre} \quad y = \eta(x,t), \\ p &= p_{atm}, \quad \text{sobre} \quad y = \eta(x,t), \\ v &= 0, \quad \text{sobre} \quad y = -d, \end{cases} \tag{1.5}$$

onde p_{atm} é a pressão atmosférica constante.

Neste estudo de trajetórias de partículas, as ondas de superfície são ondas de Stokes. **Ondas de Stokes** são ondas aquáticas de gravidade, periódicas, viajantes, simétricas, monótonas da crista ao cavado que propagam na superfície livre de um canal com fundo plano e impermeável em fluxos irrotacionais. Supomos que todas as variáveis dependentes (η, u, v e p) das equações de Euler são suaves, λ-periódicas na variável x e têm a mesma velocidade de propagação c. Mais ainda, η, u e p são simétricas com respeito à crista, enquanto v é antissimétrica ([9], p. 525). Por conveniência a velocidade é tomada como sendo positiva, deste modo as ondas propagam para a direita. Além disso, o nível de equilíbrio da água é considerado em $y = 0$; além disso tem-se que

$$\int_0^\lambda \eta(x,t)\, dx = 0.$$

É conveniente reformular as equações de Euler em termos de potencial de velocidade. A condição de irrotacionalidade do fluxo assegura que existe $\phi(x,y,t)$ tal que $(u,v) = \nabla\phi$. A irrotacionalidade do fluxo e a incompressibilidade do fluido asseguram que ϕ é uma função harmônica no domínio (veja [62], p. 431-434)

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -d < y < \eta(x,t)\},$$

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \qquad \text{in} \qquad \Omega, \tag{1.6}$$

e satisfaz as condições de fronteira livre (Bernoulli e cinemática)

$$\begin{cases} \phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2) + g\eta = 0, \\ \\ \eta_t + \phi_x\eta_x - \phi_y = 0, \end{cases} \qquad \text{em} \qquad y = \eta(x,t), \tag{1.7}$$

junto com a condição de impermeabilidade no fundo

$$\phi_y = 0 \qquad \text{em} \qquad y = -d. \tag{1.8}$$

O potencial ϕ denotará o potencial de velocidade na ausência de correnteza. Logo (ϕ_x, ϕ_y) denota o campo de velocidade para um fluxo sem correnteza.

Para fluxos irrotacionais a definição de velocidade da onda (c) será adotada como sendo a primeira aproximação de Stokes [49]. Desta forma c é a média, na coordenada

horizontal, da velocidade horizontal do fluido no referencial móvel por comprimento de onda λ, para uma profundidade fixa.

A inclusão de uma correnteza uniforme de intensidade κ afeta apenas a velocidade de propagação da onda e a velocidade horizontal do fluido u. Na presença de uma correnteza um observador na praia verá a onda propagando com velocidade $c + \kappa$ e a velocidade horizontal do fluido passa a ser $u = \phi_x + \kappa$. Mais informações sobre a primeira aproximação de Stokes para a velocidade da onda e o efeito da correnteza uniforme no fluxo são dadas no Apêndice B.

Portanto na presença de uma correnteza uniforme a EDO das trajetórias (1.1) é re-escrita na forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \phi_x(x(t), y(t), t) + \kappa, \\ \dfrac{dy}{dt} = \phi_y(x(t), y(t), t), \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0). \end{cases} \tag{1.9}$$

Neste contexto, $\kappa < 0$ indica uma correnteza no sentido oposto à direção de propagação da onda, enquanto para $\kappa > 0$ sua direção é favorável.

1.2 A terceira identidade de Green e a formulação integral de fronteira

Nesta seção vamos mostrar como usufruir da formulação da teoria do potencial para calcular, de forma eficiente e elegante, o campo vetorial das trajetórias de (1.9).

Seja $(x, y) \in \widetilde{\Omega}$ um ponto na correspondente célula periódica $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ como mostrado na figura 1.1. Seja $K_{(x,y)}$ uma função de Green para a equação de Laplace (1.6), com uma singularidade em (x, y). Da terceira identidade de Green ([31], p. 97) segue que

$$\phi(x, y, t) = \oint_{\partial\widetilde{\Omega}} \left\{ \phi \frac{\partial K_{(x,y)}}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} K_{(x,y)} \right\} dS, \tag{1.10}$$

onde $\partial\widetilde{\Omega} = \Gamma \cup \Upsilon_b \cup \Upsilon_l \cup \Upsilon_r$ e $\mathbf{n}$ é o vetor normal à fronteira apontando para fora.

Usando a função de Green periódica ([27], p. 327) temos

$$G(x, y) = \log\left(1 + e^{-\frac{4\pi y}{\lambda}} - 2e^{-\frac{2\pi y}{\lambda}} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right), \tag{1.11}$$

e o método das imagens, escreve-se o núcleo

$$K_{(x,y)}(\tilde{x}, \tilde{y}) = G(\tilde{x} - x, \tilde{y} - y) + G(\tilde{x} - x, -\tilde{y} - y - 2d).$$

Esta função de Green, além de ser periódica, satisfaz a condição de Neumann

$$\frac{\partial K_{(x,y)}}{\partial y}(\tilde{x}, -d) = 0. \tag{1.12}$$

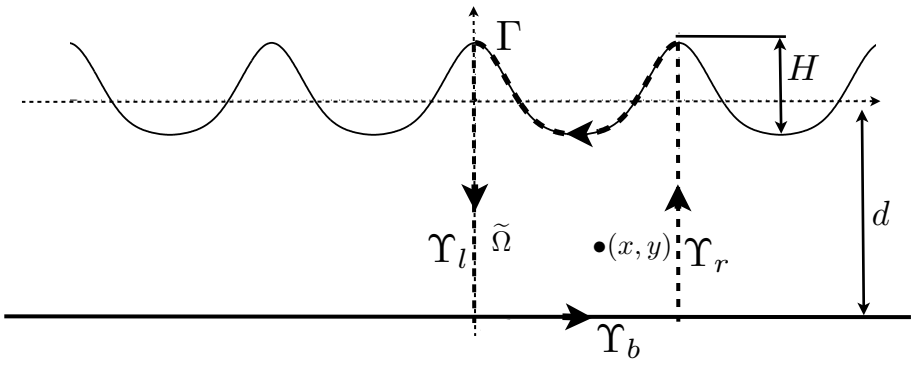

Figura 1.1: Geometria da formulação integral de fronteira.

Portanto a integral de fronteira torna-se agora restrita somente à superfície livre $\Gamma(t)$. Por conseguinte a terceira identidade de Green é escrita como

$$\begin{aligned}\phi(x,y,t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\lambda \Big\{ & \phi(s,\eta(s,t),t)\frac{\partial K}{\partial \mathbf{n}}(s,\eta(s,t);x,y) \\ & -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}(s,\eta(s,t),t)K(s,\eta(s,t);x,y)\Big\}\,\|(1,\eta_x(s,t))\|ds,\end{aligned} \tag{1.13}$$

onde

$$\mathbf{n} = (-\eta_x(s,t),1)/(\|(-\eta_x(s,t),1)\| \quad \text{e} \quad \Gamma(t) = \{(s,\eta(s,t));\ s\in[0,\lambda]\}.$$

Assim o campo de vetores de (1.9) é facilmente encontrado através de

$$\begin{aligned}\phi_x(x,y,t) = & \frac{1}{4\pi}\int_0^\lambda \Big\{ \phi(s,\eta(s,t),t)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial K}{\partial \mathbf{n}}(s,\eta(s,t),x,y)\right] \\ & -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}(s,\eta(s,t),t)\frac{\partial K}{\partial x}(s,\eta(s,t),x,y)\Big\}\,\|(1,\eta_x(s,t))\|ds.\end{aligned} \tag{1.14}$$

Analogamente obtém-se $\tilde{\phi}_y(x,y,t)$.

1.3 Descobrir os dados de fronteira ao longo da superfície livre

Para calcular o campo vetorial da equação das trajetórias (1.9) a partir de (1.14) devem ser conhecidos os dados de Dirichlet (ϕ) e Neumann ($\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}$) de (1.6) ao longo da superfície livre.

Uma onda de Stokes, de pequena ou grande amplitude, não tem uma fórmula de representação fechada. A existência de tais ondas é estabelecida de forma qualitativa [1, 2, 32, 52], a partir de aproximações das equações governantes [21, 25, 30, 45, 54] ou

numericamente [50]. Uma aproximação de alta ordem bem aceita é devido a Fenton [25], que será mais detalhada abaixo.

Nesta seção apresentatremos dois procedimentos para calcular o campo de velocidade no interior do fluido a partir de (1.14). Ambos os métodos apresentados fazem uso da hipótese de que sejam conhecidos a priori o perfil da onda de superfície livre η e sua velocidade de propagação c. Esta é uma escolha de relevância prática, quando se observa ondas no oceano.

1.3.1 As aproximações de Fenton

Fenton [25, 26] desenvolveu uma aproximação em série de potências de alta ordem para calcular o perfil da onda de Stokes e seu correspondente potencial de velocidade, em qualquer ponto (x, y) no domínio do fluido Ω. Sua expansão é de quinta ordem em termos do parâmetro $\epsilon = kH/2$ (H é a altura da onda, definida como a altura do pico ao cavado, e $k = 2\pi/\lambda$) e é dada por:

$$\phi(x,y,t) = C_0(kd)(g/k^3)^{1/2} \sum_{i=1}^{5} \epsilon^i \sum_{j=1}^{i} A_{ij} \cosh(jk(y+d)) \sin(jk(x-ct)), \tag{1.15}$$

$$\eta(x,t) = \sum_{i=1}^{5} \epsilon^i \sum_{j=1}^{i} \frac{B_{ij}}{k} \cos(jk(x-ct)), \tag{1.16}$$

$$c = \left(\frac{g}{k}\right)^{\frac{1}{2}} [C_0(kd) + \epsilon^2 C_2(kd) + \epsilon^4 C_4(kd)], \tag{1.17}$$

onde $A_{ij} = A_{ij}(kd)$, $B_{ij} = B_{ij}(kd)$, $C_0(kd)$, $C_2(kd)$ e $C_4(kd)$ são dados em [25]. Fenton também considerou o caso onde existe uma correnteza uniforme de intensidade κ. Neste caso, o único ajuste necessário é incorporar o efeito da correnteza na velocidade de propagação da onda, que passa a ser $c + \kappa$, e na velocidade horizontal do fluido, que passa a ser $\phi_x(x, y, t) + \kappa$ (mais detalhes são mostrados no Apêndice B). Experimentos em laboratório e simulações numéricas [25] mostram que as aproximações de Fenton são precisas para ondas com comprimento 10 vezes menor que a profundidade.

1.3.2 Um procedimento alternativo

Pretendemos realizar simulações numéricas com ondas de Stokes além do regime de validade das aproximações de Fenton. Portanto é necessário ter um procedimento alternativo para capturar os dados de Dirichlet e Neumann. É claro que as aproximações de Fenton serão úteis na validação do novo procedimento em regimes de profundidade intermediária com o parâmetro $\epsilon = kH/2$ pequeno.

Para a formulação integral de fronteira, os dados iniciais necessários são os dados Dirichlet e Neumann do potencial ao longo da superfície livre, e o perfil da onda de Stokes.

Estas informações são usadas em (1.14) para que o campo de vetores da EDO (1.9) seja calculado.

Usando a hipótese de que as variáveis dependentes das equações governantes possuem uma depêndencia (x,t) da forma $x-ct$ é possível calcular $\phi(x,\eta(x,t),t)$, $\phi_x(x,\eta(x,t),t)$ e $\phi_y(x,\eta(x,t),t)$ de um modo bastante preciso. Com efeito, as equações de fronteira livre (1.7) podem ser re-escritas como

$$\begin{cases} -c\phi_x + \frac{1}{2}(\phi_x^2+\phi_y^2) + g\eta &= 0, \\ \\ -c\eta_x + \phi_x\eta_x - \phi_y &= 0, \end{cases} \quad \text{em } \ y=\eta(x,t). \tag{1.18}$$

Este é um sistema não linear de equações em $\phi_x(x,\eta(x,0),0)$ e $\phi_y(x,\eta(x,0),0)$. É fácil encontrar que as soluções são

$$\begin{aligned} \phi_x^{\pm}(x,\eta(x,0),0) &= \frac{c+c\eta_x(x,0)^2 \pm \sqrt{\Delta}}{1+\eta_x(x,0)^2}, \\ \phi_y^{\pm}(x,\eta(x,0),0) &= (\phi_x^{\pm}(x,\eta(x,0),0)-c)\eta_x(x,0), \end{aligned} \tag{1.19}$$

onde $\Delta = [c+c\eta(x,0)^2]^2 - 2[1+\eta(x,0)^2]\left[g\eta(x,0)+\frac{1}{2}c^2\eta_x(x,0)^2\right]$. Para escolher qual das soluções acima é física, nas fórmulas (1.19) os valores de η e c foram substituídos, respectivamente, pelos das aproximações de Fenton (1.16) e (1.17). Feito isto as soluções (1.19) foram comparadas com as aproximações de Fenton para ϕ_x e ϕ_y, em regimes de amplitudes moderadas. Variando a amplitude do perfil de onda inicial verificou-se que a solução-menos (ϕ_x^-,ϕ_y^-) foi sempre precisa enquanto a outra solução foi sempre espúria. Esta escolha funciona bem em simulações numéricas, e mais comentários sobre isto serão feitos mais à frente.

O dado de Neumann é calculado diretamente da solução do sistema não linear ao longo da superfície livre. O dado de Dirichlet é calculado integrando

$$\frac{d}{dx}\left[\phi(x,\eta(x,0),0)\right] = \phi_x(x,\eta(x,0),0) + \phi_y(x,\eta(x,0),0)\eta_x(x,0).$$

Assim

$$\phi(x,\eta(x,0),0) = \int_0^x \left[\phi_x(s,\eta(s,0),0) + \phi_y(s,\eta(s,0),0)\eta_x(s,0)\right]\, ds. \tag{1.20}$$

A constante de integração é zero porque pela definição de onda de Stokes a superfície livre é simétrica, e as velocidades horizontal e vertical do fluido são simétrica e antissimétrica, respectivamente. Logo, o integrando em (1.20) é par, o que implica que ϕ é ímpar.

Encontrados todos os dados iniciais ao longo da superfície livre, o campo de vetores de (1.9) pode ser obtido a partir de (1.14). Observe que por se tratar de ondas viajantes os dados são facilmente transladados de acordo com o instante de tempo.

É importante que se confirme que a fórmula analítica (1.19) fornece dados precisos ao longo da superfície livre quando comparados às aproximações de Fenton. Para isto calculamos o erro relativo na norma l_∞ dado por

$$E_r(\phi_x^-) = \frac{||\phi_x^-(x_j, \eta^{Fenton}(x_j,0),0) - \phi_x^{Fenton}(x_j, \eta^{Fenton}(x_j,0),0)||_\infty}{||\phi_x^{Fenton}(x_j, \eta^{Fenton}(x_j,0),0)||_\infty}.$$

Considere um exemplo com $d = 1$, altura de onda $H = 0.003$, comprimento de onda $\lambda = 2\pi$ e $J = 2^{14}$ pontos ao longo da superfície livre. Este número alto de pontos é necessário para calcular órbitas com alta precisão. Em particular, para encontrar órbitas de partículas que estão inicialmente perto da superfície livre. Isto é necessário porque para pontos perto da superfície livre a singularidade da função de Green se aproxima da superfície. Para este exemplo tem-se

$$E_r(\phi_x^-) = 2.1 \times 10^{-04}; \quad E_r(\phi_y^-) = 5.2 \times 10^{-07}; \quad E_r(\phi_x^+) = 10^3; \quad E_r(\phi_y^+) = 1.5;$$

confirmando que a solução-menos de (1.19) fornece uma boa aproximação.

1.3.3 Um procedimento numérico mais geral

No procedimento analítico descrito acima foram utilizados os valores de c e η fornecidos pelas aproximações de Fenton. Foram obtidas duas soluções e uma delas escolhida por inspeção, comparando-a com as aproximações de Fenton. Agora tentaremos fazer escolhas mais automáticas, ou seja, sem escolher entre duas soluções. Isto é realizado numericamente por meio de um método de otimização.

O sistema não linear (1.18) é reformulado no seguinte problema:

$$\min\ f^j(x,y) \ \text{ dado que } \quad (x,y) \in D^j, \tag{1.21}$$

onde

$$f^j(x,y) = [G_1^j(x,y)]^2 + [G_2^j(x,y)]^2,$$

$$G^j(x,y) = \begin{pmatrix} G_1^j(x,y) \\ G_2^j(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cx + \frac{1}{2}(x^2+y^2) + g\eta(x_j,0) \\ (-c+x)\eta_x(x_j,0) - y \end{pmatrix}, \quad j = 1,\ldots,J,$$

e

$$D^j = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \le x \le b_1 \text{ e } a_2 \le y \le b_2\}.$$

Claramente as soluções de (1.21) são $\phi_x(x_j, \eta(x_j,0),0)$ e $\phi_y(x_j,\eta(x_j,0),0)$, $j = 1,\ldots,J$.

É fácil ver que para o parâmetro $\epsilon = kH/2$ grande, as aproximações de Fenton para $(\phi_x, \phi_y, \eta, c)$ não fornecem uma boa aproximação para o problema (1.21). Uma

tentativa para melhorar este cenário é considerar no problema (1.21) η e c dados por Fenton e procurar por soluções (ϕ_x, ϕ_y) de (1.21) no domínio

$$D^j = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \phi_x^{Fenton}(x_j, \eta(x_j,0),0) - \delta \leq x \leq \phi_x^{Fenton}(x_j, \eta(x_j,0),0) + \delta,$$
$$\phi_y^{Fenton}(x_j, \eta(x_j,0),0) - \delta \leq y \leq \phi_y^{Fenton}(x_j, \eta(x_j,0),0) + \delta\}.$$

Procedemos desta forma com a solução numérica de (1.21) obtida através do método do gradiente projetado com o tamanho do passo de iteração calculado pela regra de Armijo([3], p. 226). O método sempre convergiu para valores próximos da solução-menos em (1.19).

Na tabela 1.1 é exibida a comparação entre a solução-menos dada por (1.19) com a dada pelo método de otimização. Para mensurar a discrepância entre as soluções dadas por cada método calculou-se $\|\phi_x^- - \phi_x^{GP}\|_\infty$, onde GP denota a solução via método do gradiente projetado. Como se pode ver as soluções são muito próximas.

H	λ	d	$\|\phi_x^- - \phi_x^{GP}\|_\infty$	$\|\phi_y^- - \phi_y^{GP}\|_\infty$
0.003	2π	1	3.6×10^{-16}	2×10^{-14}
0.44	2π	1	7.1×10^{-13}	2.9×10^{-12}

Tabela 1.1: Parâmetros utilizados: $\delta = H$ e $J = 2^{14}$. Na primeira linha é mostrado um regime onde as aproximações de Fenton possuem boa precisão e ambos os métodos alternativos funcionam bem. Na segunda linha a altura da onda é muito maior e ainda assim as duas aproximações alternativas continuam muito próximas. Veja também a tabela 1.2.

Na tabela 1.2 são exibidos dados para auxiliar na análise de qual método é mais preciso, no sentido de satisfazer as condições de fronteira livre (1.18). A solução (1.19) e a obtida via método do gradiente projetado são bastante precisas. Contudo visto que a solução (1.19) tem uma fórmula explícita para os dados ao longo da superfície livre sua implementação é mais eficaz, pois leva menos tempo computacional. Para exemplificar, usando $J = 2^{14}$ pontos ao longo da superfície livre, o método do gradiente projetado é 1000 vezes mais lento que usar (1.19) na mesma malha. Note também na tabela 1.2 que para ondas maiores as aproximações de Fenton são um pouco menos precisas.

1.4 Método numérico para traçar as trajetórias

Recapitulando, para calcular as trajetórias das partículas é necessário que sejam conhecidos previamente: a profundidade d do canal, a intensidade da correnteza κ, o perfil

H	λ	d	Método	erro/eq. de Bernoulli	erro/ cond. de cinemat.
0.003	2π	1	Aprox. de Fenton	3.1×10^{-6}	4.5×10^{-9}
			Equação (1.19)	10^{-15}	10^{-16}
			Grad. Projet.	3.5×10^{-18}	2×10^{-14}
0.44	2π	1	Aprox. de Fenton	0.3325	0.2315
			Eequação (1.19)	1.7×10^{-15}	10^{-16}
			Grad. Projet.	4.4×10^{-16}	3×10^{-12}

Tabela 1.2: Esta tabela apresenta os erros máximos obtidos ao avaliar as aproximações de Fenton, a solução-menos em (1.19) e a solução via gradiente projetado na equação de Bernoulli e na condição de cinemática. O erro é calculado ponto a ponto e mostramos o erro máximo. Os resultados são comparados para os diferentes métodos. Os resultados obtidos pela equação (1.19) e gradiente projetado são bastante precisos. Contudo o método analítico da equação (1.19) é mais eficiente, a saber em uma malha com $J = 2^{14}$ pontos ele é 1000 vezes mais rápido que o método do gradiente projetado.

inicial da onda $\eta_0 \equiv \eta(x, 0)$ e sua velocidade de propagação (para detalhes da definição de velocidade da onda veja Apêndice B). Uma descrição do algoritmo é dada abaixo.

Algoritmo para encontrar trajetórias de partículas em fluxos irrotacionais

Neste estudo η_0 e c são fornecidos por Fenton, equações (1.16) e (1.17). As seguintes etapas descrevem o algoritmo:

1. *Obter os dados ao longo da superfície livre*: primeiro $\phi_x^-(x, \eta_o, 0)$ e $\phi_y^-(x, \eta_o, 0)$ são calculados a partir de (1.19). O dado de Neumann segue imediatamente. Depois calcula-se o dado de Dirichlet $\phi(x, \eta(x, 0), 0)$ por integração, como em (1.20), usando regra do trapézio. Esta quadratura é de precisão espectral, ver [53]. Para manter a precisão espectral em (1.20), $\eta_x(x, 0)$ é calculado no espaço de Fourier por meio da FFT.

2. *Dados viajantes*: uma vez que os valores iniciais $\phi_x(x, \eta_0, 0)$, $\phi_y(x, \eta_0, 0)$ e $\phi(x, \eta_0, 0)$ são conhecidos, realizam-se as translações correspondentes $\phi(x, \eta(x, t), t)$, $\phi_x(x, \eta(x, t), t)$ e $\phi_y(x, \eta(x, t), t)$ em qualquer tempo t, aplicando a rotação correspondente no espaço de Fourier [53]. Isto também possui precisão espectral. Na presença de uma correnteza uniforme as translações são realizadas para $c + \kappa$.

3. *Encontrar o campo de vetores*: o campo de vetores de (1.9) é calculado a partir de

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \phi_x(x,y,t) + \kappa \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^\lambda \left\{ \phi(s,\eta(s,t),t)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial K}{\partial \mathbf{n}}(s,\eta(s,t),x,y)\right] \right. \\ &\left. -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}(s,\eta(s,t),t)\frac{\partial K}{\partial x}(s,\eta(s,t),x,y) \right\} \|(1,\eta_x(s,t))\| ds + \kappa. \end{aligned}$$

Similarmente encontra-se $v(x,y,t) = \phi_y(x,y,t)$. Como singularidade do núcleo K está dentro de $\widetilde{\Omega}$, novamente a regra do trapézio é de alta precisão, porque neste caso o integrando é suave ao longo da fronteira.

4. *Traçar as trajetórias:* as trajetórias das partículas são encontradas numericamente integrando a EDO (1.9) usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) ([47], p.438). Depois, de cada passo no tempo de RK4, os passos 2 e 3 são repetidos.

Capítulo 2

Simulações numéricas para trajetórias em fluxos irrotacionais com correnteza uniforme

Neste capítulo mostraremos os resultados das simulações numéricas para encontrar trajetórias de partículas. O método numérico é via implementação no Matlab do método proposto na Seção 1.4.

Até o presente ponto deste trabalho a principal contribuição trata de trajetórias induzidas pela interação entre ondas de Stokes com uma correnteza uniforme, e a captura de forma quantitativa das características descobertas analiticamente por Constantin e colaboradores [9, 16, 19].

Através do modelo numérico proposto, trajetórias de partículas serão capturadas com grande precisão. Por exemplo, órbitas fechadas são calculadas com muitos dígitos de precisão. A configuração numérica possui precisão espectral no espaço [53] devido ao fato de integrar-se funções periódicas suaves ao longo da superfície livre sob a qual não há nenhuma restrição de diferenciabilidade.

Além de capturar as características das órbitas conhecidas da teoria [9, 16, 19], as simulações mostraram indícios de que quando a onda interage com uma correnteza uniforme **pode existir uma órbita não suave dentro do fluido.**

Animações computacionais, fornecidas como um material adicional para estimular uma melhor intuição da dinâmica das partículas, estão disponíveis em:

http://w3.impa.br/~nachbin/AndreNachbin/Stokes_Waves.html

No algoritmo, o intervalo de comprimento da onda $[0, \lambda)$ é subdividido na grade de pontos $x_j = j\Delta x,\ j = 0, \ldots, (J-1)$, onde $\Delta x = \lambda/J$. Por outro lado o intervalo de tempo $[0, T]$ das trajetórias usado em RK4 é discretizado da forma $t_i = i\Delta t,\ i = 0, \ldots, N$, onde $\Delta t = T/N$.

Em todas as simulações realizadas foram utilizados os valores $\lambda = 2\pi$, $J = 2^{14}$, $N = 10^3$, $T = 3\tau$ (τ período da onda) e profundidade do canal $d = 1$.

2.1 Resultados numéricos e as aproximações da teoria linear e fracamente não linear

O primeiro experimento realizado para validação do método numérico foi com uma onda linear monocromática, para o qual a EDO das trajetórias é dada por

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (a\omega)\cos(kx - \omega t)\cosh(k(y+d))/\sinh(kd), \\ \dfrac{dy}{dt} = (a\omega)\cos(kx - \omega t)\sinh(k(y+d))/\sinh(kd), \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0), \end{cases} \tag{2.1}$$

onde a é amplitude da onda e $\omega^2 = kg\tanh(kd)$. Dado que η_0 é um cosseno, a solução via teoria do potencial linear é direta ([8], p. 138; [19], p. 6). O campo de vetores tem a expressão indicada no sistema acima. Note que mesmo conhecendo o campo de vetores explicitamente, obter uma solução analítica para a trajetória das partículas é uma tarefa não trivial, visto que a EDO (2.1) é fortemente não linear.

O primeiro experimento realizado para validação numérica consistiu em resolver tanto o sistema (2.1) via RK4 como o sistema (1.9) pelo procedimento numérico mostrado na Seção 1.4. Só que neste caso, e apenas nesta simulação, foi utilizado como perfil inicial da onda $\eta_0 = 10^{-3}\cos(x)$ e velocidade de propagação $c = \omega/k$. Através do procedimento da numérico da Seção 1.4 o campo de vetores de (1.9) foi calculado sem conhecer o campo de velocidade dentro do fluido.

A compatibilidade entre as trajetórias das partículas geradas pelos dois métodos foi excelente, com 6 dígitos de precisão (de concordância), veja figura 2.1. É importante ressaltar que normalmente em problemas de ondas lineares as condições na superfície livre são calculadas ao longo do nível do fluido em equilíbrio ($y = 0$), isto é feito devido a amplitude da onda de superfície ser pequena. Porém, no nosso estudo, a formulação integral de fronteira deve ser feita ao longo da respectiva curva da superfície livre. O motivo é que trajetórias de partículas perto da superfície livre podem eventualmente atravessar o nível de equilíbrio por até uma fração da amplitude da onda. Visto que o núcleo da formulação integral de fronteira são potenciais de camada simples e dupla, no momento que uma partícula cruzar o nível $y = 0$ o método numérico geraria um salto espúrio na posição da partícula devido a "colisão"com as fontes e dipolos ao longo da reta $y = 0$, relativa à superfície livre em repouso. Isto é naturalmente evitado integrando sobre a superfície livre pertubado (físico), mesmo esta tendo uma amplitude muito pequena. O

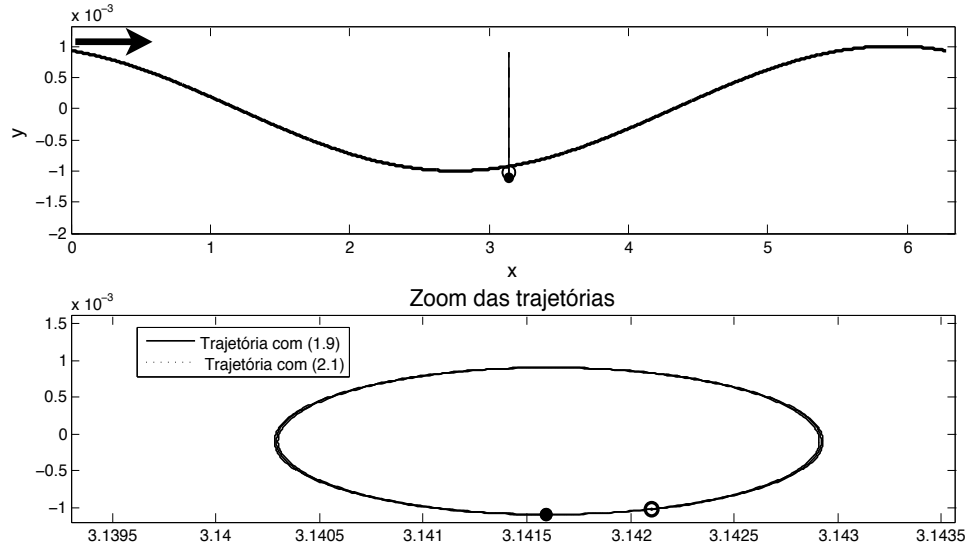

Figura 2.1: As trajetórias das partículas foram obtidas a partir do sistema explícito (2.1) (Trajetória com (2.1)) e usando a EDO (1.9) (Trajetória com (1.9)) onde o campo de vetores foi dado implicitamente através da teoria do potencial. As órbitas são idênticas, veja o gráfico de baixo. A posição inicial das partículas é indicada pelo ponto preto, enquanto o ponto branco mostra a posição final. No gráfico do topo as órbitas ficaram espremidas devido às escalas horizontal e vertical serem de magnitudes diferente. O erro relativo máximo é $E_{max} = 3.1 \times 10^{-7}$, onde mutatis mutandis E_{max} é definido como em (2.2). Os parâmetros usados foram: amplitude da onda 0.001, $k = 1$ e intervalo de tempo $[0, 3\tau]$, onde $\tau = 2.27$ é o período da onda. Foram usados um total de $N = 10^3$ passos no tempo.

drift de Stokes foi observado ao longo das órbitas das partículas, tendo padrões como previsto por Constantin e Villari [19].

Ondas fracamente não lineares

Um outro experimento realizado para a validação numérica foi para ondas fracamente não lineares, regime no qual as aproximações de Fenton possuem uma boa precisão.

O sistema (1.9) foi resolvido de duas formas: com o campo de velocidades dado diretamente pelas aproximações de Fenton; e por meio do método integral proposto na Seção 1.4.

Considerou-se na superfície livre uma onda de Stokes com altura $H = 0.044$. As órbitas encontradas são mostradas na figura 2.2. Elas são muito próximas. Possuem um erro relativo máximo de 3.8×10^{-6}, definido como segue. As órbitas via formulação

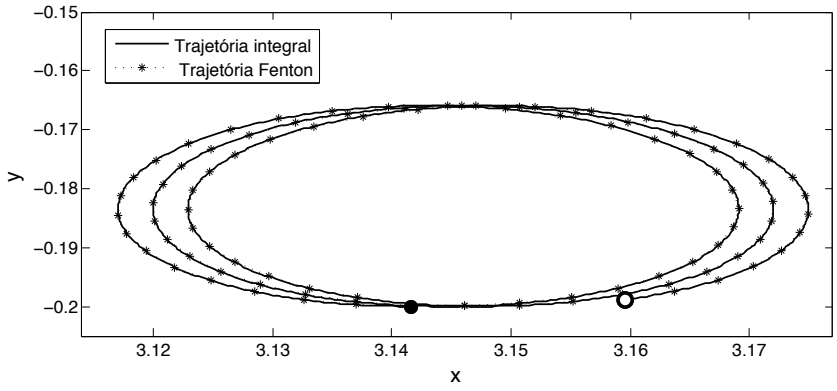

Figura 2.2: Trajetórias das partículas calculadas com o campo de vetores da EDO (1.9) dado por: formulação integral de fronteira (linha sólida) e aproximações de Fenton (linha pontilhada). As órbitas são idênticas. A posição inicial da partícula é indicada pelo ponto preto e enquanto o ponto branco mostra o ponto final. O máximo erro relativo é E_{max} $=3.8 \times 10^{-6}$. Os parâmetros usados foram: $H = 0.044$, $k = 1$ com $kH/2 = 2.2 \times 10^{-2}$, $\tau = 2.2755$ e $N = 10^3$.

integral e via às aproximações de Fenton são denotadas respectivamente por $\mathbf{x}_{num}(t)$ e $\mathbf{x}_{Fenton}(t)$. Então o erro relativo máximo é definido por

$$E_{max} = \frac{\max_{t\in[0,3\tau]} \|\mathbf{x}_{num}(t) - \mathbf{x}_{Fenton}(t)\|_1}{\max_{t\in[0,3\tau]} \|\mathbf{x}_{Fenton}(t)\|_1}, \tag{2.2}$$

onde $\|(a,b)\|_1 = |a| + |b|$.

Como exibido na tabela 1.2, quando a amplitude da onda é maior nosso método (1.19) para calcular $\phi_x(x, \eta(x,0),0)$ e $\phi_y(x, \eta(x,0),0)$ é mais preciso que as aproximações de Fenton, no sentido de resolver as condições de fronteira livre. Mostraremos na próxima o impacto desta diferença, em particular para o caso especial de órbitas fechadas. Estes casos ocorrem para ondas de Stokes na presença de uma correnteza uniforme e contrária ao sentido de propagação da onda [16].

2.2 Trajetórias na presença de uma correnteza uniforme

As ondas de Stokes consideradas nesta seção são ondas não lineares, a saber $H = 0.44$, tal como mostrado na tabela 1.2. Mostraremos resultados de simulações para ondas de Stokes na presença de uma correnteza uniforme. O foco principal é para o caso de correnteza adversa, para o qual Constantin e Strauss [16] provaram a existência de órbita fechada, porém sem a informação de sua localização e quantidade. Além disso, eles

provaram que neste regime também podem existir órbitas que são laços, com um *drift* positivo ou negativo.

Para entender melhor a relação entre o *drift* e a existência de uma órbita fechada é apresentado uma definição formal de *drift*.

Recapitulando, a EDO das trajetórias das partículas é dada por

$$(P) := \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u(x - ct, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = v(x - ct, y), \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0). \end{cases}$$

Através da transformação

$$X(t) = x - ct,\ Y(t) = y(t), \tag{2.3}$$

tem-se que o sistema (P) é equivalente ao sistema

$$(\bar{P}) := \begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = u(X, Y) - c, \\ \dfrac{dY}{dt} = v(X, Y), \\ (X(0), Y(0)) = (X_0, Y_0). \end{cases}$$

Podemos supor sem perda de generalidade que a crista da onda está no ponto $(0, \eta(0))$, o cavado em $(\lambda/2, \eta(\lambda/2))$ e que

$$(X_0, Y_0) \in \{(X, Y) \in \mathbb{R} : -\lambda/2 \leq X \leq \lambda/2 \text{ e } -d \leq Y \leq \eta(X)\},$$

pois u e v são funções λ-periódicas na variável X.

Seja $(X(t), Y(t))$ a trajetória da partícula obtida como solução de $(\bar{P})$ com condição inicial $(X(0), Y(0) = (\lambda/2, Y_0)$. Em fluxos irrotacionais, para ondas de superfície suave é válido $u < c$ no fluido. Portanto, certamente, em algum tempo $t = \theta > 0$ a partícula estará em $X(\theta) = -\lambda/2$. O tempo θ é o tempo que uma partícula gasta para passar pela mesma fase da onda, como por exemplo o cavado. Observe que como u é par e v é ímpar segue $Y(\theta) = Y_0$.

O *drift* de uma partícula é definido como a distância horizontal entre as suas posições inicial e final, depois que ela passa duas vezes por baixo da mesma fase da onda. Logo, de acordo com a definição de θ acima

$$\textit{drift} = x(\theta) - x(0) = X(\theta) + c\theta - X(0) = \theta c - \lambda = x(t + \theta) - x(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Portanto sem perda de generalidade o *drift* pode ser tomado como

$$\textit{drift} = \theta c - \lambda, \tag{2.4}$$

onde θ é o tempo que a partícula gasta para passar por baixo de dois cavados.

O seguinte lema, extraído de ([9], p. 530), ajuda a entender a ligação entre *drift* e órbitas fechadas no refencial físico.

Lema 2.2.1. *Dado $Y_0 \in [-d, \eta(\lambda/2)]$, seja $\theta = \theta(Y_0) > 0$ o tempo necessário para a solução $(X(t), Y(t))$ de $(\bar{P})$ com dado inicial $(\lambda/2, Y_0)$ intersectar a curva $X = -\lambda/2$. Então esta solução corresponde via transformação (2.3) a uma trajetória fechada de (P) se, e somente se, $\theta = \tau$, onde $\tau = \lambda/c$ é o período da onda.*

Prova: ($\Rightarrow$) Seja $(X(t), Y(t))$ solução de $(\bar{P})$ com dado inicial $(\lambda/2, Y_0)$ e seja $(x(t), y(t))$ definida via transformação (2.3) solução fechada de (P) de período $\tilde{\tau} > 0$.

Note que

$$y(0) = y(\tilde{\tau}) \Rightarrow Y(\tilde{\tau}) = Y(0).$$

Afirmamos que no tempo $\tilde{\tau}$ a posição $X(\tilde{\tau})$ da partícula é abaixo de um cavado. Com efeito, a superfície livre que é λ-periódica, é parametrizada no intervalo $\alpha \in [-\lambda/2, \lambda/2]$. Em $X(0) = \lambda/2$ a partícula está abaixo do cavado, o qual equivale a fase da onda $\alpha = \lambda/2$. Como $\tilde{\tau} > 0$ e $u(X, Y) < c$ segue de $(\bar{P})$ que em $X(\tilde{\tau})$ a partícula está localizada abaixo de alguma fase da onda $\alpha^* \in [-\lambda/2, \lambda/2)$. Suponhamos por absurdo que α^* é diferente de $-\lambda/2$ (cavado). Primeiro consideramos o caso $\alpha^* \in [0, \lambda/2)$. Observe que como u é par e v é ímpar a trajetória $(X(t), Y(t))$ solução de $(\bar{P})$ passa pelo cavado da onda sempre na profundidade Y_0, pois $Y(0) = Y_0$. Denote por s o maior tempo satisfazendo a condição

$$s = \max\{0 \leq t < \tilde{\tau}; X(t) \text{ está abaixo da fase } \lambda/2 \text{ (cavado)}\}.$$

Deste modo temos que $Y(\tilde{\tau}) = Y_0 = Y(s)$ com $s < \tilde{\tau}$ e $X(\tilde{\tau})$ abaixo de uma fase $\alpha^* \in [0, \lambda/2)$ e $X(s)$ abaixo da fase $\lambda/2$. Absurdo, pois $v(X, Y) > 0$ no conjunto (Veja ([9], p. 527)

$$\{(X, Y) \in \mathbb{R} : 0 \leq X \leq \lambda/2 \text{ e } -d \leq Y \leq \eta(X)\},$$

o que implica que $Y(\tilde{\tau}) > Y(s)$. Se $\alpha^* \in (-\lambda/2, 0)$ como u é par e v é ímpar então para algum tempo $r < \tilde{\tau}$ é válido que $Y(\tilde{\tau}) = Y_0 = Y(r)$ com $X(r)$ em uma fase $\alpha^* \in [0, \lambda/2)$. Desta maneira pelos mesmos argumentos acima chega-se a um absurdo.

Portanto, visto que θ é o tempo que a solução $(X(t), Y(t))$ leva para ir de um cavado a outro, segue que $\tilde{\tau} = n\theta$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$0 = x(\tilde{\tau}) - x(0) = X(\tilde{\tau}) + c\tilde{\tau} - X(0) = X(n\theta) - X(0) + cn\theta = -n\lambda + cn\theta$$

Logo $\theta = \lambda/c$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, seja $(X(t), Y(t))$ solução de $(\bar{P})$ com dado inicial $(\lambda/2, Y_0)$. Suponha que $\theta = \lambda/c$.

Da definição de θ segue que $Y(\theta) = Y_0$. Logo, de (2.3) é imediato $y(\theta) = y(0)$. Note que

$$x(\theta) - x(0) = X(\theta) + c\theta - \frac{\lambda}{2} = -\frac{\lambda}{2} + c\frac{\lambda}{c} - \frac{\lambda}{2} = 0.$$

Logo a órbita $(x(t), y(t))$ é fechada.

□

Do lema e da definição de *drift* (2.4) conclui-se que um *drift* positivo (negativo) está relacionado a θ ser maior (menor) que o período da onda. Para uma órbita fechada θ é igual ao período da onda. Este lema apesar de simples é muito forte. Constantin [9] provou que não existem órbitas fechadas em fluxos irrotacionais sem correnteza mostrando que $\theta > \tau$, onde τ é o período da onda.

As simulações realizadas deixaram claro que quanto mais perto uma partícula estiver da superfície livre, mais fortemente ela sente o efeito da onda, levando a um *drift* positivo. Quando as partículas adentram mais no canal, o efeito da onda diminui, e consequentemente o efeito da correnteza torna-se dominante. Baseado nisto, encontramos uma órbita fechada com grande precisão, que será mais detalhada a seguir, exatamente entre os padrões de *drift* positivo e negativo.

Foi considerada uma correnteza adversa de intensidade $\kappa = -0.07$. Os três padrões de órbitas encontrados são exibidos na figura 2.3. A órbita do meio, na profundidade $y_0 = -0.59232183358352$, fornece evidências de ser uma **órbita fechada**. O tempo que esta partícula gastou para passar por baixo de dois cavados $\theta = 2.2094$ é próximo ao período da onda que é $\tau = 2.216$. Além disso, a partícula retornou à sua posição inicial com uma diferença de ordem 10^{-16}, o que é de grande precisão. Uma órbita fechada mais detalhada é mostrada na figura 2.4. Nesta figura a órbita correspondente ao campo de vetores fornecido pelas aproximações de Fenton é também retratada. A linha tracejada mostra que uma órbita fechada não foi obtida, o *drift* encontrado foi de -3.2×10^{-2}.

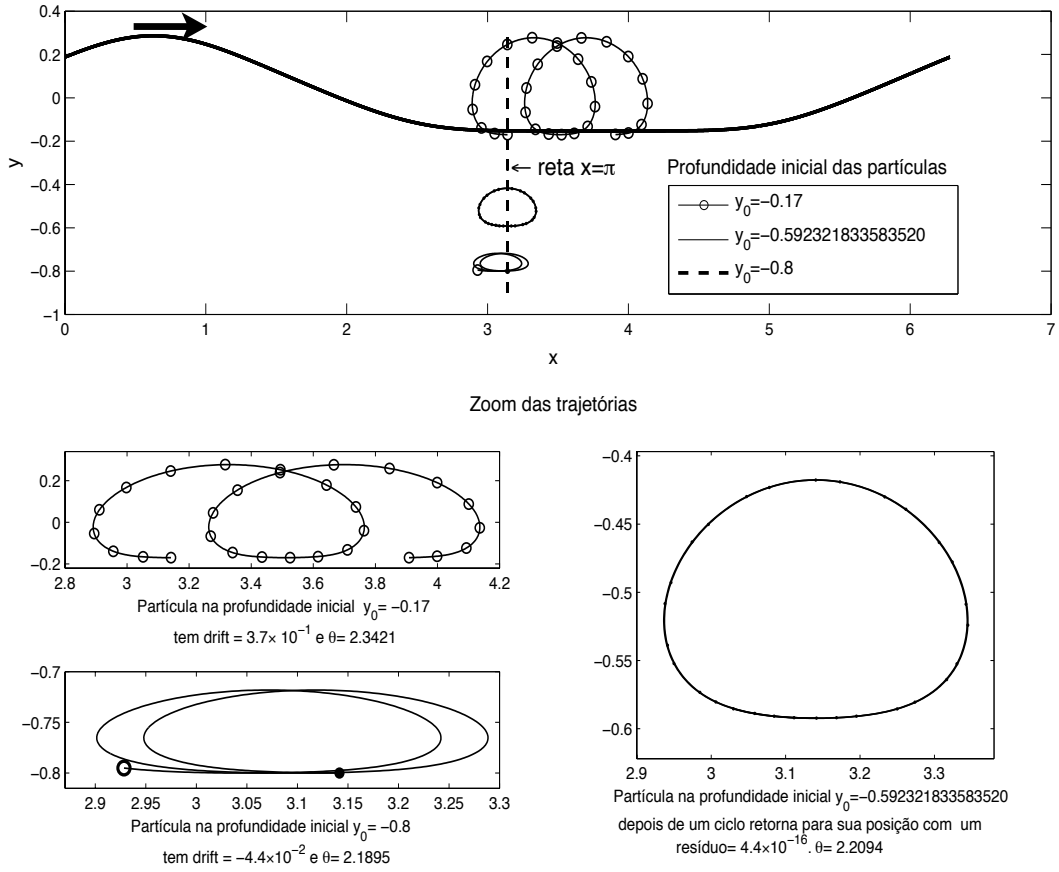

Figura 2.3: Trajetórias das partículas para uma correnteza adversa de intensidade $\kappa = -0.07$. No tempo $t = 0$ todas as partículas estavam localizadas em $x_0 = \pi$ a uma profundidade y_0 como indicado. O tempo que uma partícula gastou para passar pelo mesma fase da onda, como por exemplo o cavado, é denotado por θ. Um *drift* positivo (negativo) está relacionado a θ ser maior (menor) que o período da onda. Para uma órbita fechada θ é igual ao período da onda τ. A onda de Stokes tem uma altura $H = 0.44$ e período $\tau = 2.2116$. O perfil não linear tem um cavado chapado. Os paramêtros usados foram: $\lambda = 2\pi$, $d = 1$, $J = 2^{14}$ and $N = 10^3$.

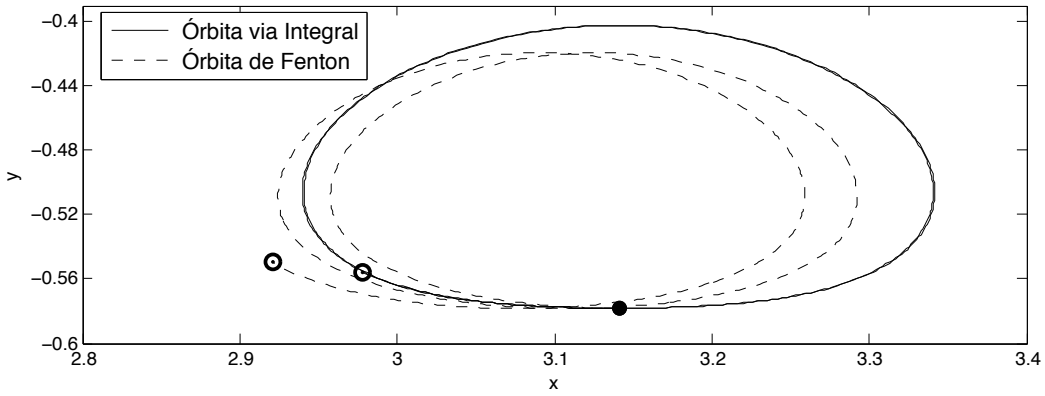

Figura 2.4: *Onda enfrentando uma correnteza adversa:* A órbita calculada através do método integral proposto na Seção 1.4 (Órbita via Integral) é fechada, enquanto a obtida através das aproximações de Fenton (Órbita de Fenton) não é. As localizações inicial e final da partícula são indicadas, respectivamente, pelos pontos pretos e brancos. A órbita via Integral é tal que as posições inicial e final diferem por 4.4×10^{-16} depois de um ciclo. A órbita obtida das aproximações de Fenton tem um *drift* de -3.2×10^{-02}. Parâmetros usados: $H = 0.44$, $\lambda = 2\pi$, $d = 1$, $\kappa = -0.07$, $J = 2^{14}$ e $N = 10^3$.

Na abordagem do caso com correnteza favorável foi considerado o valor $\kappa = 0.43$. Neste caso foi observada uma **trajetória não suave** – veja a figura 2.5. Em uma específica profundidade existe uma órbita onde aparecem pontos de cúspide. Isto acontece quando a partícula move-se para baixo e está prestes a iniciar a parte de baixo do laço. Contudo, neste exato momento, a onda está em uma posição que puxa a partícula para cima novamente e forma o pico. Esta observação não se encontra registrada em referências sobre este tópico. Para outras profundidades as trajetórias encontradas são suaves e com *drift* positivo. Próximo à superfície as trajetórias realizam laços, enquanto próximos ao fundo elas tem um perfiil ondulado. Se a correnteza é forte o suficiente as trajetórias são todas ondulatórias visto que o movimento oscilatório da onda não é forte o suficiente (comparado à correnteza) para gerar órbitas com laços.

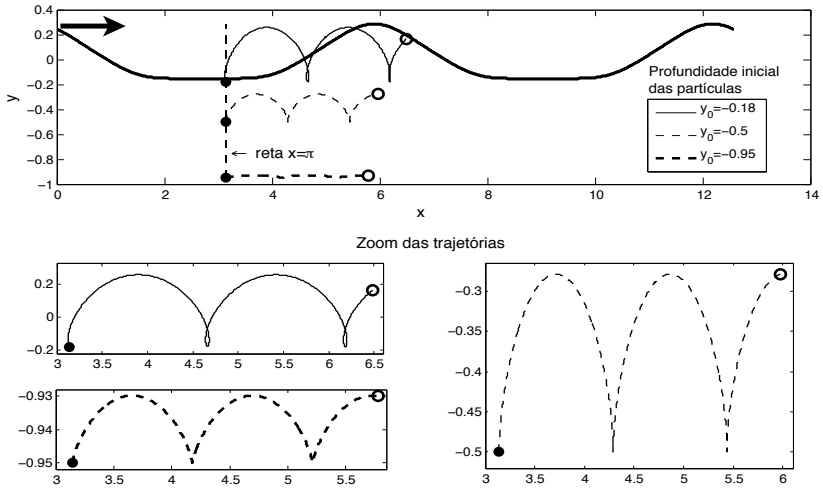

Figura 2.5: Existência de uma órbita não suave na presença de uma correnteza favorável de intensidade $\kappa = 0.43$. Todas as partículas estão inicialmente em $x_0 = \pi$ e profundidade y_0 como indicado na legenda. Parâmetros usados: $H = 0.44$, $\lambda = 2\pi$, $d = 1$, $J = 2^{14}$ e $N = 10^3$.

Para correntezas negativas também foram encontradas trajetórias não suaves. Na figura 2.6, um destes casos é mostrado para $\kappa = -0.7$. Note que a transição da órbita laço para um perfil ondulatório indica que uma trajetória não suave será observada.

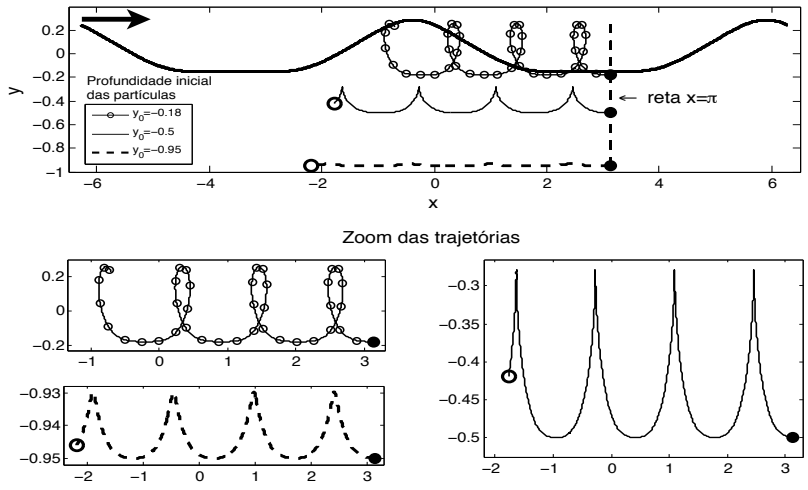

Figura 2.6: Existência de uma órbita não suave na presença de uma correnta adversa de intensidade $\kappa = -0.7$. Todas as partículas estavam inicialmente em $x_0 = \pi$ e profundidade y_0 como indicado na legenda. Parâmetros usados: $H = 0.44$, $\lambda = 2\pi$, $d = 1$, $J = 2^{14}$ e $N = 10^3$.

2.3 A relação entre o formato das órbitas e seus parâmetros de depêndencia

Finalmente analisamos como o formato de uma órbita muda, em termos de suas razões e aspectos, com alteração de algumas variáveis. Os parâmetros geométricos abordados, relativos à forma das órbitas, são definidos como indicado na figura 2.7. Inicialmente não existe nenhuma correnteza.

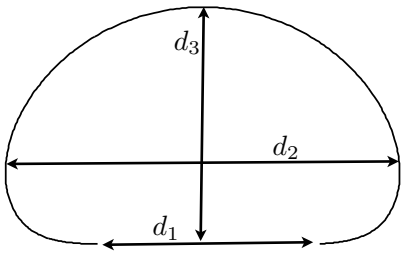

Figura 2.7: Parâmetros geométricos indicando a aparência de uma órbita. O *drift* é denotado por d_1.

Dada uma partícula localizada na posição incial $(x_0, y_0) = (\pi, y_0)$ estudamos como as distâncias horizontal (d_2) e vertical (d_3) de um laço e o *drift* (d_1) variam com a mudança da profundidade da partícula (y_0). Os resultados obtidos são mostrados na figura 2.8. É conhecido analiticamente que as quantidades d_1 e d_3 aumentam à medida que as partículas ficam mais próximas da superfície livre ([8], p. 148; [16], p. 549). As simulações realizadas verificaram este comportamento inclusive para d_2, mostrando que todos os comportamentos são monótonos crescente.

Foi examinado também o comportamento dos parâmetros $d_j, j = 1, 2$ e 3, quando a altura da onda varia. Nestas simulações as partículas estavam inicialmente sempre na posição $(x_0, y_0) = (\pi, -0.2)$. A figura 2.9 mostra como a aparência do laço mudou com a altura da onda. O crescimento de todos os parâmetros com altura da onda foi monótono.

Para finalizar permitimos à correnteza interferir na dinâmica. Consideramos uma correnteza adversa e procuramos pela presença de uma órbita periódica, ou seja, fechada. Na figura 2.10 (no gráfico de baixo) é mostrado como a posição da órbita periódica muda com a intensidade da correnteza. Define-se por *a posição da órbita fechada* a posição inicial da partícula, denotada por $(x_0, y_0) = (\pi, y_0)$. Quando a força da correnteza aumenta, a órbita fechada move-se em direção à superfície livre, porque lá a ação da onda é mais forte. Portanto, é onde o balanço de ambos os efeitos (*drift* para frente e correnteza para trás) podem cancelar-se. Também foi observado que o tamanho da órbita fechada aumenta quando ela se move em direção à superfície livre, a saber quando a intensidade da correnteza aumenta.

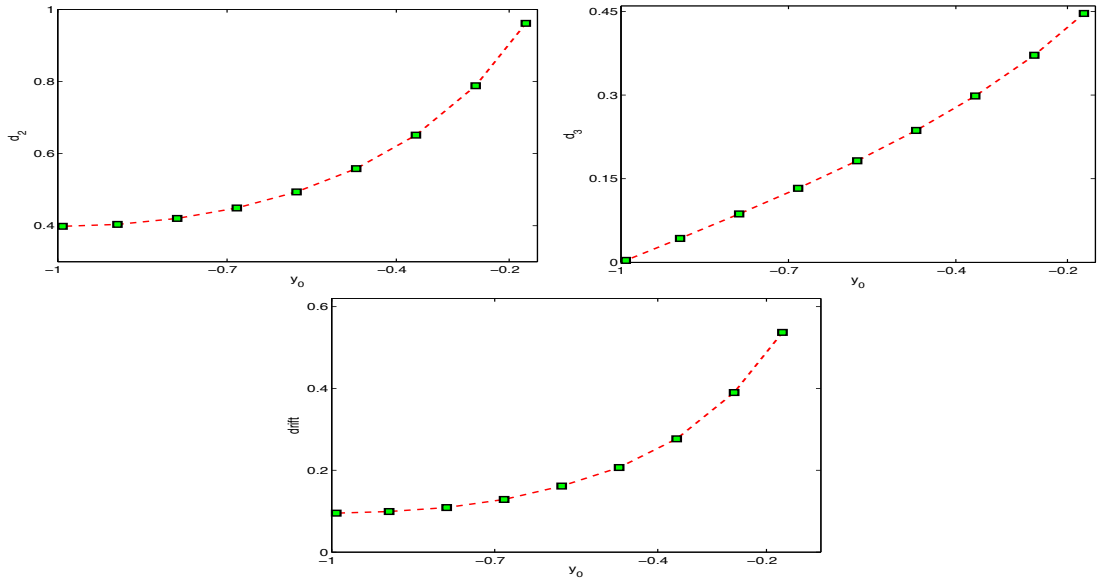

Figura 2.8: *Dependência da profundidade*: gráficos das escalas horizontal (d_2) e vertical (d_3) em função da profundidade inicial da partícula (y_0). Veja as figuras do topo à esquerda e à direita respectivamente. Quando o parâmetro y_0 aproxima-se da superfície livre os laços das órbitas ficam maiores. No gráfico da parte de baixo da figura é exibido o *drift* em função de y_0. Parâmetros usados: $H = 0.44$, nenhuma correnteza.

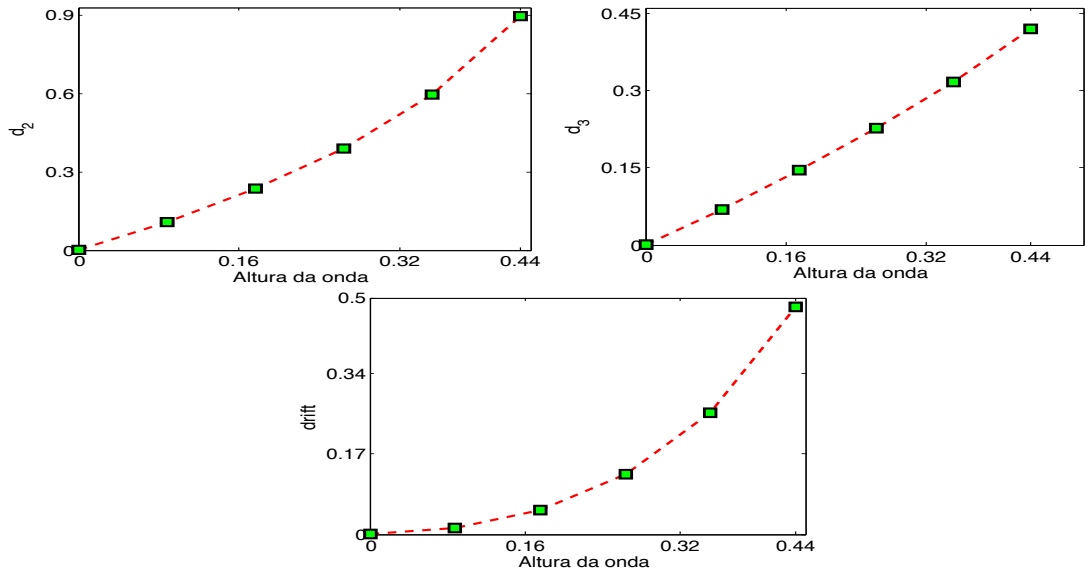

Figura 2.9: *Dependência da altura da onda*: em todos os casos a partícula foi colocada na posição inicial $(x_0, y_0) = (\pi, -0.2)$. São exibidos os gráficos das escalas horizontal d_2 e vertical d_3 em função da altura da onda H. Veja as figuras do topo à esquerda e à direita, respectivamente. Quando a altura da onda aumenta, o laço da órbita torna-se maior. No gráfico da parte de baixo da figura é exibido o *drift* em função de H. Nestas simulações não há a presença de correnteza.

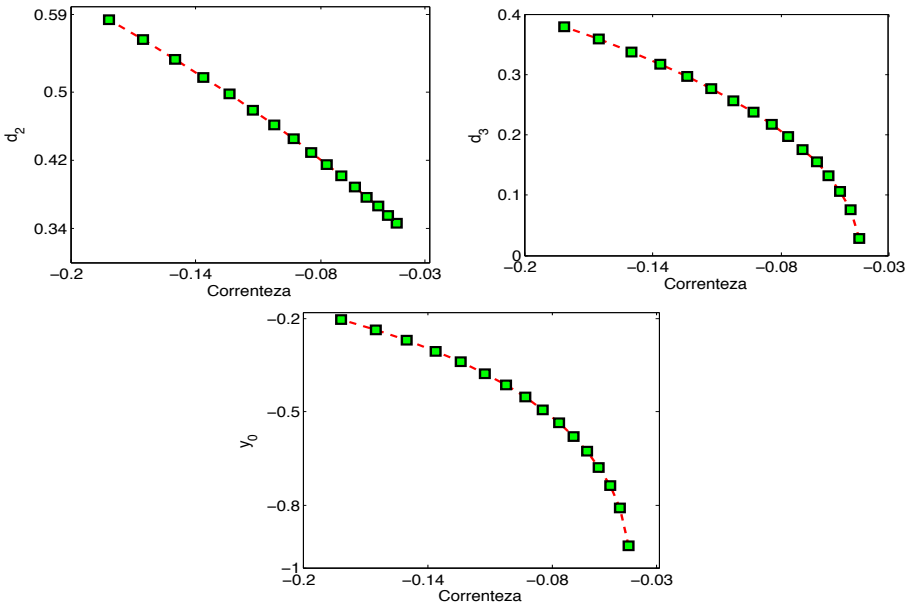

Figura 2.10: *A órbita fechada e sua sua dependência da intensidade da correnteza* κ. São mostrados os gráfico das escalas horizontal (d_2) e vertical (d_3), figura 2.7, em função da intensidade da correnteza adversa κ. Note que devido ao sinal negativo a intensidade da correnteza aumenta da direita para a esquerda. No gráfico da parte de baixo da figura é mostrada a profundidade inicial das órbitas fechadas em função de κ. Para que a onda equilibre o efeito da correnteza, e assim gere uma órbita fechada, a posição inicial da partícula para uma configuração fechada deve mover-se em direção à superfície livre quando a intensidade da correnteza aumenta. Parâmetros usados: $H = 0.44$.

Capítulo 3

Trajetórias em fluxos com vorticidade constante

Nos capítulos anteriores mostramos um método numérico para capturar órbitas de partículas abaixo de uma onda de Stokes em fluxos irrotacionais com ou sem correnteza uniforme.

Agora abordaremos ondas periódicas viajantes com correnteza variando linearmente com a profundidade. Como consequência desta variação, nesta configuração da interação onda-correnteza o fluxo é rotacional, com vorticidade constante.

Vorticidade constante é apropriada quando as ondas de superfície livre são longas, comparadas à profundidade do canal. Nestes casos a existência de uma vorticidade média não nula é mais importante que sua distribuição específica ([50], p. 282).

Neste capítulo mostraremos como reformular as equações governantes do sistema, baseando-se em uma aplicação conforme do domínio físico em uma faixa com coordenadas horizontal e vertical dadas por ξ, ζ respectivamente. Através desta aplicação conforme, a onda de superfície livre é mapeada na superfície $\zeta = 0$, sendo este procedimento utilizado por [6, 40].

Este mapeamento conforme mostrou-se adequado para construir métodos numéricos para extrair informações precisas sobre os efeitos da vorticidade constante no interior do fluido. Por exemplo, como surgem os pontos de estagnação. Pontos de estagnação são pontos onde a velocidade vertical do fluido é zero e a velocidade horizontal é a velocidade da onda. Matematicamente, os pontos de estagnação são pontos de equilíbrio da EDO das trajetórias no referencial da onda.

Apresentaremos os seguintes métodos numéricos:

(i) Método para encontrar pontos de estagnação.

(ii) Método para encontrar as linhas de corrente.

(iii) Método para calcular a pressão no interior.

(iv) Método para traçar trajetórias de partículas.

A maioria dos estudos numéricos para ondas em fluxos com vorticidade constante restringe-se a mostrar os efeitos provocados pela vorticidade no perfil da onda de superfície livre [6, 56, 57]. A principal contribuição deste trabalho é analisar os efeitos causados pela vorticidade no interior do fluido.

Outros trabalhos numéricos, que abordam ondas periódicas viajantes em fluxos rotacionais, voltados para os efeitos da vorticidade no interior do fluido são devidos a Teles da Silva e Peregrine [50], Vasan e Oliveras [59] e Ko e Strauss [33, 34].

Em 1988, Teles da Silva e Peregrine [50] desenvolveram um método numérico para construir ondas de superfície livre em fluxos com vorticidade constante. Eles utilizaram o potencial complexo de velocidade $f(x,y) = \tilde{\phi}(x,y) + i\tilde{\psi}(x,y)$, onde $\tilde{\phi}$ é potencial de velocidade da parte irrotacional do fluxo laminar e $\tilde{\psi}$ é conjugada harmônica de $\tilde{\phi}$. Mais detalhes sobre estas funções são dados na Seção 3.1. O domínio físico foi mapeado pela transformação

$$Z(z) = \exp(-iz).$$

A partir disto, as equações governantes da fronteira livre foram reformuladas no plano complexo $z = \xi + i\zeta$ através de uma equação integro-diferencial, em função do perfil da onda da superfície livre, onde tal equação envolve uma integral de Valor Principal de Cauchy. Esta equação integro-diferencial é discretizada tendo sua integração realizada pela regra do trapézio. Isto resulta em um sistema de equações não lineares que foi resolvido pelo método de Newton. Teles da Silva e Peregrine [50] exibem uma figura com gráficos de linhas de corrente e curvas de nível da pressão no interior do fluido. A partir destes gráficos vê-se que há pelo menos um ponto de estagnação e a perda de monotocidade da pressão. Porém não é deixado claro no trabalho como tais gráficos foram construídos. Os autores justificam-nos a partir de uma comparação entre ondas periódicas viajantes e ondas cisalhantes de superfície construídas pelo modelo de Peregrine [41]. Ondas cisalhantes de superfície são ondas caracterizadas por possuírem na superfície livre uma camada de alta velocidade que flui sobre o restante do fluido que tem menor velocidade. A partir desta comparação também é concluída a existência de pontos dentro do fluido com pressão menor que atmosférica.

Em 2014, Vasan e Oliveras [59] abordaram fluxos com vorticidade constante. Eles escreveram as equações governantes via uma formulação não local recente [20] e construíram um método numérico preciso para traçar as linhas de corrente e encontrar a pressão no interior do fluido. A principal contribuição do trabalho de Vasan e Oliveras é deduzir uma relação entre a elevação da onda de superfície e a pressão no fundo do

canal. A partir desta relação, Vasan e Oliveras mostram que para determinados valores de vorticidade o ponto de máximo da pressão no fluido, por comprimento de onda, ocorre em dois pontos no fundo do canal. Quanto ao estudo de pontos de estagnação os resultados de Vasan e Oliveras são os mesmos de Teles da Silva e Peregrine [50]. Assim como no trabalho de Teles da Silva e Peregrine [50], a metodologia utilizada por Vasan e Oliveras para encontrar pontos de estagnação foi observar os gráficos das linhas de corrente ([59], p. 3235). Desta forma, a depender do caso, é possível identificar a existência de um ponto de estagnação, porém não se consegue encontrar com precisão sua localização. Traçar as linhas de corrente não é o método adequado para encontrar com precisão pontos de estagnação. Deste modo é possível identificar apenas pontos de centro que estejam suficientemente longe do fundo, pois neste caso as linhas de corrente fechadas podem ser notadas. Apenas traçando as linhas de corrente, pontos de estagnação que possam ocorrer perto do fundo ficam despercebidos. Sem conhecer a localização precisa dos pontos de estagnação é impossível fazer um estudo rigoroso dos mecanismo responsáveis pelo surgimento dos mesmos. Mais ainda, é impossível fazer um estudo detalhado da influência destes pontos sobre outras características do fluxo, como por exemplo o efeito da presença deles na localização dos pontos de máximo da pressão. Por isto, Vasan e Oliveras, ao analisar a correlação existente entre a presença de pontos de estagnação e a localização dos pontos de máximo da pressão, restringem-se a fluxos nos quais as ondas de superfície possuem amplitudes arbitrariamente pequena, pois neste regime é conhecida uma condição para o surgimento de pontos de estagnação.

Em trabalhos anteriores de Ko e Strauss [33, 34], em 2008, foram abordados os casos de vorticidade constante e descontínua [34] e fluxos com camadas de vorticidade [33]. Em seus estudos eles aplicaram a transformação de Dubreil-Jacotin, a qual achata a superfície livre e o domínio físico é mapeado em um quadrado. As equações governantes no novo sistema de coordenadas foram resolvidas usando o pacote TRILINOS. Os resultados de Ko e Strauss apontam para existência de pontos de estagnação, mas não são precisos quanto à localização dos mesmos. Cabe ressaltar o pioneirismo de Ko e Strauss ao abordar vorticidade não constante.

Os métodos numéricos apresentados neste capítulo foram implementados em Matlab e os resultados das simulações são discutidos no Capítulo 4. Como será mostrado, através dos procedimentos numéricos propostos neste trabalho é possível encontrar com precisão a localização dos pontos de estagnação e traçar trajetórias de partículas no referencial de laboratório. A possibilidade de encontrar os pontos de estagnação com precisão permite realizar um estudo detalhado sobre como variações da vorticidade e da onda de superfície influenciam o surgimento destes pontos. Além disso, permite-nos analisar como pontos de estagnação influenciam a pressão no fluido. O procedimento numérico mostrado

neste trabalho também permite analisar o interior do fluido abaixo de perfis exóticos de ondas – perfis que não são gráficos de uma função – como por exemplo as ondas mostradas por Vanden-Broeck ([56], p. 214; [57], p. 346). Todos estes resultados sobre pontos de estagnação são novos.

3.1 As equações governantes para fluxos com vorticidade constante

Sejam as equações governantes escritas em coordenadas cartesianas (x, y), onde y é a coordenada vertical e o eixo x é a direção de propagação da onda, com o nível de repouso da água estando em $y = 0$. Seja $\mathbf{U} = (u(x, y, t), v(x, y, t))$ o campo de velocidades do fluxo sobre o fundo plano em $y = -d$ com $d > 0$, e seja $y = \eta(x, t)$ a superfície livre de água. Visto que $y = 0$ é o nível de repouso da água, para garantir a conservação do volume tem-se que para todo tempo t

$$\int_0^\lambda \eta(x, t)\, dx = 0,$$

onde $\lambda > 0$ é o comprimento da onda. As equações de conservação de massa e Euler são respectivamente

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \qquad \text{em} \qquad -d < y < \eta(x, t), \\ &\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\mathbf{j} \qquad \text{em} \qquad -d < y < \eta(x, t), \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $p(x, y, t)$ é a pressão, ρ é a densidade constante, g é a aceleração da gravidade e $\mathbf{j} = (0, 1)$. Além disso, as condições de fronteira são

$$v = \eta_t + u\eta_x \qquad \text{sobre} \qquad y = \eta(x, t), \tag{3.2}$$

$$p = p_{atm} \qquad \text{sobre} \qquad y = \eta(x, t), \tag{3.3}$$

$$v = 0 \qquad \text{sobre} \qquad y = -d, \tag{3.4}$$

onde p_{atm} é a pressão atmosférica. A vorticidade do fluxo é definida por

$$\gamma := v_x - u_y. \tag{3.5}$$

O caso irrotacional corresponde a $\gamma \equiv 0$.

Neste estudo as funções η, u, v e p são λ-periódicas na variável x, e podem ser escritas em termos da variável viajante $(x - ct)$, onde c é a velocidade de propagação da onda. Além disso, é suposto que u e η são simétricas e v é antissimétrica em torno da reta $x = 0$ [14]. Sendo $\eta \equiv 0$, o fluxo

$$\mathbf{U_0} = (-\gamma(y + b), 0), \qquad \text{para } -d < y < 0,\ b \in \mathbb{R}, \tag{3.6}$$

é uma solução de (3.1), satisfaz as condições de fronteira (3.2)-(3.4) e a condição (3.5). Este fluxo $\mathbf{U_0}$ é chamado de fluxo cisalhante trivial .

Pelo Teorema de decomposição de Helmholtz-Hodge ([7], p. 36) todo campo de vetores pode ser escrito unicamente como a soma de um campo irrotacional com um campo incompressível. Neste trabalho será estudado o caso em que o campo de velocidade $\mathbf{U}$ é da forma

$$\mathbf{U} = \mathbf{U_0} + \nabla\tilde{\phi},$$

onde $\tilde{\phi}$ é o potencial de velocidade da parte irrotacional do fluxo. Consequentemente

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \tilde{\phi}_x(x-ct,y) - \gamma(y+b), \\ v(x,y,t) &= \tilde{\phi}_y(x-ct,y). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Fisicamente isto significa que os fluxos abordados são provenientes da interação entre a superfície livre e uma correnteza que varia linearmente com a profundidade. Na figura 3.1 são ilustrados alguns perfis de correnteza possíveis a depender da escolha de b em (3.7).

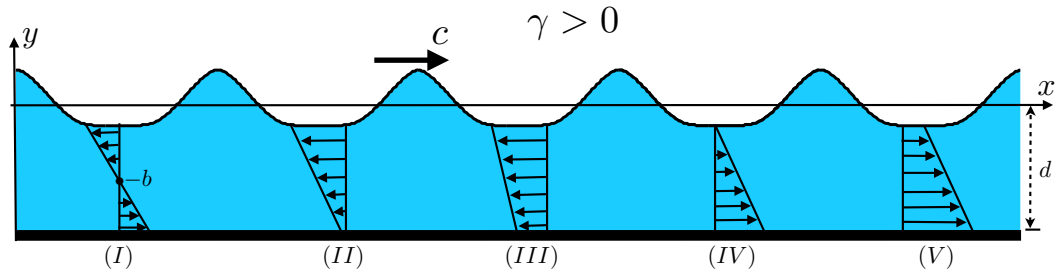

Figura 3.1: Onda propagando para a direita na presença de vorticidade constante positiva. Alguns perfis de correnteza possíveis dependendo da escolha de b em (3.7).

A trajetória de uma partícula do fluido localizada inicialmente na posição (x_0, y_0) é descrita pela EDO

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \tilde{\phi}_x(x-ct,y) - \gamma(y+b), \\ \dfrac{dy}{dt} = \tilde{\phi}_y(x-ct,y), \\ (x(0),y(0)) = (x_0,y_0). \end{cases} \tag{3.8}$$

Conhecendo $\tilde{\phi}$ as trajetórias são encontradas. Por tal motivo as equações de Euler são reescritas em termos de $\tilde{\phi}$. A incompressibilidade de $\mathbf{U}$ implica que

$$\Delta\tilde{\phi} = 0 \qquad \text{em} \qquad -d < y < \eta(x,t). \tag{3.9}$$

As equações do campo de velocidades (3.7) são substituídas na condição de cinemática (3.2). Disto obtém-se

$$\eta_t + (-\gamma(y+b) + \tilde{\phi}_x)\eta_x = \tilde{\phi}_y. \tag{3.10}$$

Em um fluxo bidimensional a vorticidade é uma quantidade vetorial da forma $\boldsymbol{\gamma} = (v_x - u_y)\mathbf{k}$, onde $\mathbf{k}$ representa o vetor unitário apontando para fora do plano. Assim a equação de conservação do momento

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\mathbf{j},$$

junto com a identidade vetorial

$$\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{U}\cdot\mathbf{U}) = -\mathrm{curl}\mathbf{U}\times\mathbf{U} + (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{U},$$

implicam que

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{U}\cdot\mathbf{U}) + \boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\mathbf{j}. \tag{3.11}$$

Cada componente de (3.11) é escrita como:

(i) A derivada temporal do campo de velocidades

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{U_0} + \nabla\tilde{\phi}) = \nabla\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial t}.$$

(ii) Calculando-se a norma do campo de velocidades (3.8) resulta que

$$\begin{aligned}\mathbf{U}\cdot\mathbf{U} = u^2 + v^2 &= (\tilde{\phi}_x - \gamma(y+b))^2 + \tilde{\phi}_y^2\\ &= \tilde{\phi}_x^2 + \tilde{\phi}_y^2 - 2\gamma(y+b)\tilde{\phi}_x + \gamma^2(y+b)^2.\end{aligned}$$

(iii) Definindo $\tilde{\psi}$ como a função conjugada harmônica de $\tilde{\phi}$ segue que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{U} &= \gamma(-v,u) = \gamma(-\tilde{\phi}_y,\tilde{\phi}_x) + \gamma(0,-\gamma(y+b))\\ &= \gamma(\tilde{\psi}_x,\tilde{\psi}_y) + \gamma\nabla\underbrace{\left[-\gamma\left(\frac{y^2}{2}+by\right)\right]}_{\psi_0}\\ &= \gamma\nabla\tilde{\psi} + \gamma\nabla\psi_0.\end{aligned}$$

Substituindo **(i)** – **(iii)** em (3.11) obtém-se que

$$\nabla\left[\tilde{\phi}_t + \frac{1}{2}(\tilde{\phi}_x^2+\tilde{\phi}_y^2) - \gamma(y+b)\tilde{\phi}_x + \frac{\gamma^2}{2}(y+b)^2 + \gamma\tilde{\psi} + \gamma\psi_0\right] = \nabla\left[-\frac{p}{\rho} - gy\right].$$

Visto que $\frac{\gamma^2}{2}(y+b)^2 + \gamma\psi_0 = \frac{\gamma^2 b^2}{2}$, e γ e b são constantes chega-se à equação de Bernoulli para fluxos com vorticidade constante:

$$\tilde{\phi}_t + \frac{1}{2}(\tilde{\phi}_x^2+\tilde{\phi}_y^2) - \gamma(y+b)\tilde{\phi}_x + \gamma\tilde{\psi} = -\frac{p-p_{atm}}{\rho} - gy + B(t). \tag{3.12}$$

Portanto ao longo da fronteira livre $y = \eta(x,t)$ é válida a seguinte condição:

$$\tilde{\phi}_t + \frac{1}{2}(\tilde{\phi}_x^2+\tilde{\phi}_y^2) + gy - \gamma(y+b)\tilde{\phi}_x + \gamma\tilde{\psi} = B(t). \tag{3.13}$$

Em resumo, de (3.9), (3.10) e (3.13), as equações governantes para um fluxo com correnteza variando linearmente com a profundidade, escritas em termos do potencial de velocidade da pertubação irrotacional do fluxo $\tilde{\phi}$, são:

$$\begin{cases} \Delta\tilde{\phi} = 0 \qquad \text{em} \qquad -d < y < \eta(x,t), \\ \eta_t + (\tilde{\phi}_x - \gamma(\eta+b))\eta_x = \tilde{\phi}_y \qquad \text{em} \qquad y = \eta(x,t), \\ \tilde{\phi}_t + \frac{1}{2}(\tilde{\phi}_x^2 + \tilde{\phi}_y^2) + g\eta - \gamma(\eta+b)\tilde{\phi}_x + \gamma\tilde{\psi} = B(t) \qquad \text{em} \qquad y = \eta(x,t), \\ \tilde{\phi}_y = 0 \qquad \text{em} \qquad y = -d. \end{cases} \tag{3.14}$$

3.1.1 As equações governantes adimensionalizadas

As equações são adimensionalizadas por: d, $\sqrt{gd}$ e $\sqrt{\frac{d}{g}}$ como unidades de comprimento, velocidade e tempo respectivamente:

$$\begin{aligned} x &= dx', \qquad & \eta &= d\eta', \qquad & \gamma &= \frac{1}{\sqrt{d/g}}\gamma', \\ y &= dy', \qquad & \tilde{\phi} &= d\sqrt{gd}\phi', & & \\ t &= \sqrt{\frac{d}{g}}t', \qquad & \tilde{\psi} &= d\sqrt{gd}\psi'. & & \end{aligned} \tag{3.15}$$

A pressão em variáveis adimensionais é

$$p = p_{atm} + \rho g d p'.$$

Substituindo (3.15) no sistema (3.14) e abandonando as linhas na notação, o novo sistema escalonado fica:

$$\begin{cases} \Delta\tilde{\phi} = 0 \qquad \text{em} \qquad -1 < y < \eta(x,t), \\ \eta_t + (\tilde{\phi}_x - \gamma(\eta+b))\eta_x = \tilde{\phi}_y \qquad \text{em} \qquad y = \eta(x,t), \\ \tilde{\phi}_t + \frac{1}{2}(\tilde{\phi}_x^2 + \tilde{\phi}_y^2) + \eta - \gamma(\eta+b)\tilde{\phi}_x + \gamma\tilde{\psi} = B(t) \qquad \text{em} \qquad y = \eta(x,t), \\ \tilde{\phi}_y = 0 \qquad \text{em} \qquad y = -1. \end{cases} \tag{3.16}$$

A partir da equação de Bernoulli (3.12) a pressão adimensional no interior do fluido pode ser recuperada através de

$$\tilde{\phi}_t + \frac{1}{2}(\tilde{\phi}_x^2 + \tilde{\phi}_y^2) + y - \gamma(y+b)\tilde{\phi}_x + \gamma\tilde{\psi} = -p + B(t). \tag{3.17}$$

Agora procuramos por soluções das equações governantes (3.16) que representam ondas viajantes com uma velocidade c. É conveniente reescrever as equações no referencial móvel

$$X = x - ct, \qquad Y = y.$$

Assim as equações governantes escalonadas no referencial móvel são dadas por:

$$\begin{cases} \Delta\tilde{\phi} = 0 \qquad \text{em} \qquad -1 < y < \eta(X), \\ -c\eta_X + (\tilde{\phi}_X - \gamma(\eta + b))\eta_X = \tilde{\phi}_Y \quad \text{em} \quad y = \eta(X), \\ -c\tilde{\phi}_X + \frac{1}{2}(\tilde{\phi}_X^2 + \tilde{\phi}_Y^2) + \eta - \gamma(\eta + b)\tilde{\phi}_X + \gamma\tilde{\psi} = B \quad \text{em} \quad Y = \eta(X). \\ \tilde{\phi}_Y = 0 \qquad \text{em} \qquad Y = -1. \end{cases} \tag{3.18}$$

E a equação de Bernoulli no referencial móvel passa a ser

$$-c\tilde{\phi}_X + \frac{1}{2}(\tilde{\phi}_X^2 + \tilde{\phi}_Y^2) + Y - \gamma(Y + b)\tilde{\phi}_X + \gamma\tilde{\psi} = -p + B. \tag{3.19}$$

Observação 3.1.1. *Se para $b = b_1$ o sistema (3.18) tem solução $\tilde{\phi}_1, \eta_1$ e c_1 então para $b = b_2$ a solução correspondente é $\tilde{\phi}_2 = \tilde{\phi}_1, \eta_2 = \eta_1$ e $c_2 = c_1 - \gamma(b_2 - b_1)$. De fato, basta escrever $b_2 = b_1 + (b_2 - b_1)$ e verificar que estes valores de $\tilde{\phi}_2, \eta_2$ e c_2 satisfazem (3.18).*

3.2 Mapeamento Conforme

Para extrair informações do interior do fluido resolve-se o sistema (3.18). Para tal finalidade é feito um mapeamento conforme onde o domínio físico é imagem de uma faixa como descrito na figura 3.2. Nesta seção mostraremos detalhes deste mapeamento.

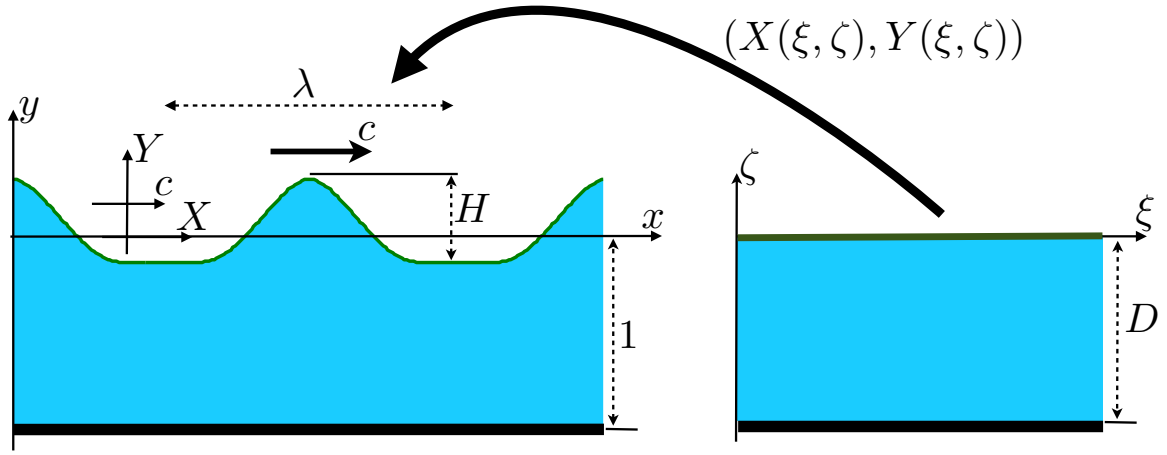

Figura 3.2: Descrição dos parâmetros que definem a onda e do mapeamento conforme.

3.2.1 As equações do mapeamento

A transformação $Z = X + iY$ do mapeamento conforme (veja figura 3.2) será definida de modo que o domínio

$$\Omega = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq Y \leq \eta(X)\},$$

seja a imagem conforme do domínio canônico

$$\widetilde{\Omega} = \{(\xi, \zeta) \in \mathbb{R}^2 : -D \leq \zeta \leq 0\},$$

onde $D > 0$ será definido a posteriori.

A componente $Y(\xi, \zeta)$ do mapeamento é definida por

$$\begin{cases} \Delta Y = 0 \qquad \text{em} \qquad -D < \zeta < 0, \\ Y(\xi, 0) = \mathbf{Y}(\xi), \\ Y(\xi, -D) = -1, \end{cases} \tag{3.20}$$

onde $X(\xi, \zeta)$ é sua conjugada harmônica e $\mathbf{Y}(\xi) := \eta(X(\xi, 0))$.

Não é difícil resolver o problema de contorno (3.20) se for admitido que a função $\mathbf{Y}(\xi)$ é conhecida. A solução de (3.20) é

$$Y(\xi, \zeta) = \mathbf{F^{-1}} \left[\frac{\sinh(k(\zeta + D))}{\sinh(kD)} \right] \mathbf{F}_k[\mathbf{Y}] + \frac{\zeta}{D}, \tag{3.21}$$

onde

$$\mathbf{F}_k[g] = \hat{g}(k) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} g(\xi) e^{-2\pi i k \xi / \lambda} d\xi,$$

$$\mathbf{F}^{-1}[\hat{g}(k)] = g(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) e^{2\pi i k \xi / \lambda}.$$

Detalhes de como obter esta solução estão disponíveis no Apêndice C.1.

Pela relação de Cauchy-Riemann $X_\xi(\xi, \zeta) = Y_\zeta(\xi, \zeta)$ logo

$$X_\xi(\xi, \zeta) = \mathbf{F^{-1}} \left[\frac{k \cosh(k(\zeta + D))}{\sinh(kD)} \right] \mathbf{F}_k[\mathbf{Y}] + \frac{1}{D}. \tag{3.22}$$

Definindo $\mathbf{X}(\xi) := X(\xi, 0)$, segue da expressão acima que

$$\mathbf{X}_\xi(\xi) = \mathbf{F^{-1}} \left[k \coth(kD) \right] \mathbf{F}_k[\mathbf{Y}] + \frac{1}{D}. \tag{3.23}$$

Uma condição bastante útil para a implementação numérica é impor que a onda de superfície livre possua o mesmo comprimento nos sistemas de coordenadas (X, Y) e (ξ, ζ). Esta condição é deduzida como segue.

Sejam L e λ, respectivamente, os comprimentos de onda no sistema de coordenadas (ξ, ζ) e (X, Y). Isto significa que

$$\mathbf{X}(\xi = L) - \mathbf{X}(\xi = 0) = \lambda.$$

Daí

$$\int_0^L \mathbf{X}_\xi(\xi) d\xi = \lambda \Leftrightarrow < \mathbf{X}_\xi > = \frac{\lambda}{L}.$$

Visto que $<\mathbf{X}_\xi>=\hat{\mathbf{X}}_\xi(0)$ segue de (3.23) que

$$\frac{\lambda}{L}=\frac{\hat{\mathbf{Y}}(0)}{D}+\frac{1}{D}=\frac{<\mathbf{Y}>+1}{D}.$$

Portanto para que os períodos no domínio físico e canônico sejam os mesmos deve-se impor que

$$D=<\mathbf{Y}>+1. \tag{3.24}$$

Este valor de D será utilizado em todo o trabalho a partir de agora.

Conhecidas as equações $(X(\xi,\zeta),Y(\xi,\zeta))$ do mapeamento conforme, o objetivo agora é escrever $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\psi}$ no novo sistema de coordenadas. Seja $\tilde{\phi}(\xi,\zeta):=\tilde{\phi}(X(\xi,\zeta),Y(\xi,\zeta))$. As derivadas nos dois sistemas de coordenadas estão relacionadas por

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_\xi&=\tilde{\phi}_X X_\xi+\tilde{\phi}_Y Y_\xi,\\ \tilde{\phi}_\zeta&=\tilde{\phi}_X X_\zeta+\tilde{\phi}_Y Y_\zeta.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Invertendo as relações e considerando as condições de Cauchy-Riemann

$$X_\xi(\xi,\zeta)=Y_\zeta(\xi,\zeta),\qquad\qquad X_\zeta(\xi,\zeta)=-Y_\xi(\xi,\zeta),$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_X&=\frac{1}{|J|}(\tilde{\phi}_\xi Y_\zeta-\tilde{\phi}_\zeta Y_\xi),\\ \tilde{\phi}_Y&=\frac{1}{|J|}(-\tilde{\phi}_\xi X_\zeta+\tilde{\phi}_\zeta X_\xi).\end{aligned} \tag{3.26}$$

Desta forma define-se o Jacobiano $|J|$ como

$$J(\xi,\zeta):=\begin{pmatrix}X_\xi & X_\zeta\\ Y_\xi & Y_\zeta\end{pmatrix},\qquad\qquad |J|(\xi,\zeta):=X_\xi^2+Y_\xi^2.$$

As relações (3.25) implicam que $\tilde{\phi}(\xi,\zeta)$ satisfaz o problema de Laplace

$$\begin{cases}\Delta\tilde{\phi}=0 \qquad \text{em} \qquad -D<\zeta<0,\\ \tilde{\phi}(\xi,0)=\tilde{\mathbf{\Phi}}(\xi),\\ \tilde{\phi}_\zeta(\xi,-D)=0.\end{cases}$$

Supondo que a função $\tilde{\mathbf{\Phi}}(\xi)$ é conhecida a solução deste problema é

$$\tilde{\phi}(\xi,\zeta)=\mathbf{F^{-1}}\left[\frac{\cosh(k(\zeta+D))}{\cosh(kD)}\right]\mathbf{F}_k[\tilde{\mathbf{\Phi}}].$$

No Apêndice C.3 é mostrado em detalhes como obter esta solução.

Seja $\tilde{\psi}(\xi,\zeta) := \tilde{\psi}(X(\xi,\zeta), Y(\xi,\zeta))$ a harmônica conjugada de $\tilde{\phi}(\xi,\zeta)$. Definindo $\tilde{\mathbf{\Psi}}(\xi) := \tilde{\psi}(\xi, 0)$, tem-se que $\tilde{\psi}(\xi,\zeta)$ satisfaz o problema de Laplace

$$\begin{cases} \Delta\tilde{\psi} = 0 \qquad \text{em} \qquad -D < \zeta < 0, \\ \tilde{\psi}(\xi, 0) = \tilde{\mathbf{\Psi}}(\xi), \\ \tilde{\psi}(\xi, -D) = 0. \end{cases} \tag{3.27}$$

A solução deste problema é dada por (veja Apêndice C.3)

$$\tilde{\psi}(\xi,\zeta) = \mathbf{F^{-1}}\left[\frac{\sinh(k(\zeta+D))}{\sinh(kD)}\right]\mathbf{F}_k[\tilde{\mathbf{\Psi}}]. \tag{3.28}$$

Usando a relação de Cauchy-Riemann $\phi_\xi = \psi_\zeta$ segue que

$$\mathbf{F^{-1}}\left[ik\frac{\cosh(k(\zeta+D))}{\cosh(kD)}\right]\mathbf{F}_k[\tilde{\mathbf{\Phi}}] = \mathbf{F^{-1}}\left[\frac{k\cosh(k(\zeta+D))}{\sinh(kD)}\right]\mathbf{F}_k[\tilde{\mathbf{\Psi}}].$$

Avaliando em $\zeta = 0$ encontra-se que

$$ik\mathbf{F}_k[\tilde{\mathbf{\Phi}}] = k\coth(kD)\mathbf{F}_k[\tilde{\mathbf{\Psi}}].$$

Assim,

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}(\xi) = \mathbf{F^{-1}}[i\coth(kD)]\mathbf{F}_k[\tilde{\mathbf{\Psi}}] = -\mathcal{C}[\tilde{\mathbf{\Psi}}],$$

onde $\mathcal{C}[\cdot] := \mathbf{F^{-1}}[i\coth(kD)]\mathbf{F}_k[\cdot]$.

Escrevendo (3.23) em termos do operador $\mathcal{C}[\cdot]$ encontra-se que são válidas as relações

$$\mathbf{X}_\xi = \frac{1}{D} - \mathcal{C}[\mathbf{Y}_\xi], \tag{3.29}$$

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}_\xi = -\mathcal{C}[\tilde{\mathbf{\Psi}}_\xi]. \tag{3.30}$$

As equações da **energia potencial** (E_p) e **cinética** (E_c) do fluxo escritas no sistema de coordenadas canônico são

$$E_p = \frac{1}{2}\int_0^\lambda \mathbf{Y}^2\mathbf{X}_\xi\, d\xi, \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned} E_c =& \frac{1}{2}\int_0^\lambda \left(-\tilde{\mathbf{\Phi}}\tilde{\mathbf{\Psi}}_\xi + \frac{\gamma^2(\mathbf{Y}+b)^3}{3}\mathbf{X}_\xi + \frac{\gamma^2(1-b)^3}{3D} - \gamma(\mathbf{Y}+b)^2\tilde{\mathbf{\Phi}}_\xi\right) d\xi \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^\lambda \frac{\gamma^2(1-b)^3}{3} g(\xi)\, d\xi, \end{aligned} \tag{3.32}$$

onde $g(\xi) := \mathbf{F^{-1}}\left[k/\sinh(kD)\right]\mathbf{F}_k\mathbf{Y}$. Para detalhes de como obter estas fórmulas deve-se consultar o Apêndice E.

Outra energia relevante a ser calculada é a **energia cinética exclusiva do fluxo cisalhante trivial** (E_l) no canal, a qual é dada por

$$\begin{aligned} E_l &= \frac{1}{2}\int_\Omega \gamma^2(Y+b)^2\, dX\, dY = \frac{1}{2}\int_0^\lambda\int_{-1}^0 \gamma^2(Y+b)^2\, dY\, dX \\ &= \frac{\lambda\gamma^2}{6}\left(b^3 + (1-b)^3\right). \end{aligned} \tag{3.33}$$

3.2.2 Definindo o perfil da onda na superfície livre

As condições de fronteira livre do sistema (3.18) nas coordenadas canônicas são respectivamente

$$\tilde{\mathbf{\Psi}}_\xi = c\mathbf{Y}_\xi + \gamma(\mathbf{Y}+b)\mathbf{Y}_\xi, \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned} -\frac{c}{|J|}(\tilde{\mathbf{\Phi}}_\xi\mathbf{X}_\xi + \tilde{\mathbf{\Psi}}_\xi\mathbf{Y}_\xi) + \frac{1}{2|J|}(\tilde{\mathbf{\Phi}}_\xi^2 + \tilde{\mathbf{\Psi}}_\xi^2) + \mathbf{Y} + \\ + \gamma\tilde{\mathbf{\Psi}} - \gamma(\mathbf{Y}+b)\frac{1}{|J|}(\tilde{\mathbf{\Phi}}_\xi\mathbf{X}_\xi + \tilde{\mathbf{\Psi}}_\xi\mathbf{Y}_\xi) = B. \end{aligned} \tag{3.35}$$

A partir das equações do mapeamento conforme, estas duas condições são arranjadas de forma que **o perfil da superfície livre, Y, satisfaça uma única equação:**

$$\begin{aligned} -\frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2|J|D^2} + \mathbf{Y} + \frac{\gamma^2(\mathcal{C}[(\mathbf{Y}+b)\mathbf{Y}_\xi])^2}{2|J|} + \gamma\mathcal{C}[(\mathbf{Y}+b)\mathbf{Y}_\xi]\left(\frac{c}{|J|D} + \frac{\gamma\mathbf{X}_\xi(\mathbf{Y}+b)}{|J|}\right) \\ - \frac{\gamma^2(\mathbf{Y}+b)^2\mathbf{Y}_\xi^2}{2|J|} + \frac{c\gamma(\mathbf{Y}+b)\mathbf{X}_\xi}{|J|D} - \gamma cb + \gamma^2\mathbf{Y}\left(\frac{\mathbf{Y}}{2}+b\right) = B. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Detalhes das operações realizadas para obter esta condição estão no Apêndice D.

3.3 Caracterização da estrutura dinâmica no fluido

Nesta seção mostraremos como usufruir das equações do mapeamento conforme para construir um método numérico para encontrar pontos de estagnação no interior do fluido. Além disso, serão mostrados um método numérico para traçar as linhas de corrente (espaço de fase) e um método para encontrar a pressão no interior do fluido.

Método para encontrar pontos de estagnação

Conforme visto em (3.8), a trajetória de uma partícula localizada inicialmente em (x_0, y_0) satisfaz a equação diferencial

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \tilde{\phi}_x(x-ct, y) - \gamma(y+b), \\ \dfrac{dy}{dt} = \tilde{\phi}_y(x-ct, y), \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0). \end{cases} \tag{3.37}$$

Por conveniência, o tempo é eliminado do campo de velocidade passando ao referencial móvel $X = x - ct$, $Y = y$. Assim, o sistema (3.37) é re-escrito como

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = \tilde{\phi}_X(X,Y) - \gamma(Y+b) - c, \\ \dfrac{dY}{dt} = \tilde{\phi}_Y(X,Y), \\ (X(0),Y(0)) = (X_0,Y_0). \end{cases} \tag{3.38}$$

Os pontos de estagnação do fluxo são os pontos de equilíbrio da EDO acima. Uma vez que $\tilde{\phi}$ e a onda de superfície livre η são funções periódicas de período λ na variável X, é suficiente restringir a busca por pontos de estagnação ao domínio

$$(X_0,Y_0) \in \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 : -\lambda/2 \leq X \leq \lambda/2 \text{ e } -1 \leq Y \leq \eta(X)\}.$$

A melhor maneira de encontrar os pontos de estagnação é primeiro localizar os zeros da velocidade vertical do fluido $\tilde{\phi}_Y$. Sem perda de generalidade, neste trabalho será suposto que a crista da onda está no ponto $(0,\eta(0))$. Observe que $\tilde{\phi}_Y$ é a velocidade vertical do fluido, a qual por hipótese é uma função antissimétrica [14], λ-periódica na variável X, que se anula no fundo do canal. Por conseguinte

$$\begin{aligned} &\tilde{\phi}_Y(X=0,Y) = 0, \quad \forall\, Y \in [-1,\eta(0)], \\ &\tilde{\phi}_Y(X=\lambda/2,Y) = 0, \quad \forall\, Y \in [-1,\eta(\lambda/2)], \\ &\tilde{\phi}_Y(X=-\lambda/2,Y) = 0, \quad \forall\, Y \in [-1,\eta(-\lambda/2)], \\ &\tilde{\phi}_Y(X,Y=-1) = 0, \quad \forall\, X \in [-\lambda/2,\lambda/2]. \end{aligned}$$

Observe que $\tilde{\phi}_Y$ é induzido apenas pela onda, esta função não se anula em outros pontos além destes acima ([9], p. 527). Para encontrar a localização dos pontos de estagnação basta apenas verificar se a velocidade horizontal do fluido no referencial móvel

$$U(X,Y) := \tilde{\phi}_X(X,Y) - \gamma(Y+b) - c,$$

também se anula em algum ponto do conjunto dos zeros de $\tilde{\phi}_Y$.

Por hipótese a velocidade horizontal do fluido é simétrica em relação a reta $X=0$ e a velocidade vertical é antissimétrica [14]. Consequentemente a busca pelos pontos de estagnação pode restringir-se apenas aos conjuntos

$$\begin{aligned} A &:= \{(X=0,Y) : Y \in [-1,\eta(0)]\}, \\ B &:= \{(X=\lambda/2,Y) : Y \in [-1,\eta(\lambda/2)]\}, \\ C &:= \{(X,Y=-1) : X \in [0,\lambda/2]\}. \end{aligned}$$

A união destes conjuntos é chamada de *conjunto viável*. Cada um destes conjuntos é, respectivamente, a imagem da aplicação conforme $(X(\xi,\zeta),Y(\xi,\zeta))$ aplicada aos conjuntos

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &:= \{(\xi=0,\zeta) : \zeta \in [-1,0]\}, \\ \widetilde{B} &:= \{(\xi=\lambda/2,\zeta) : \zeta \in [-1,0]\}, \\ \widetilde{C} &:= \{(\xi,\zeta=-1) : \xi \in [0,\lambda/2]\}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

O conjunto $\widetilde{C}$ é obtido diretamente da definição do problema de Laplace para $Y(\xi,\zeta)$ (3.20). Mais detalhes sobre como encontrar os outros conjuntos estão disponíveis no Apêndice C.2.

Identificada a pré-imagem do conjunto viável no sistema de coordenadas canônico, o valor de $U(X,Y)$ para pontos no conjunto viável é obtido das equações (3.26) do mapeamento conforme e do fato que $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\psi}$ são harmônicas conjugadas, assim

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_X(X(\xi,\zeta),Y(\xi,\zeta)) &= \frac{1}{|J|}(\tilde{\psi}_\zeta X_\xi + \tilde{\psi}_\xi Y_\xi),\\ \tilde{\phi}_Y(X(\xi,\zeta),Y(\xi,\zeta)) &= \frac{1}{|J|}(\tilde{\psi}_\zeta Y_\xi - \tilde{\psi}_\xi X_\xi),\end{aligned} \tag{3.40}$$

onde a mudança do sistema de coordenadas (ξ,ζ) para o sistema (X,Y) é obtida a partir das equações (3.21) e (3.22) do mapeamento conforme:

$$\begin{aligned}X(\xi,\zeta) &= \frac{\xi}{D} - \mathbf{F^{-1}}\left[i\frac{\cosh(k(\zeta+D))}{\sinh(kD)}\right]\mathbf{F}_k\mathbf{Y},\\ Y(\xi,\zeta) &= \mathbf{F^{-1}}\left[\frac{\sinh(k(\zeta+D))}{\sinh(kD)}\right]\mathbf{F}_k\mathbf{Y} + \frac{\zeta}{D},\end{aligned} \tag{3.41}$$

e o Jacobiano $|J|$ é dado por

$$|J|(\xi,\zeta) = X_\xi^2 + Y_\xi^2.$$

E a partir de (3.28) e (3.34) temos que

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_\xi(\xi,\zeta) &= \mathbf{F^{-1}}\left[\frac{\sinh(k(\zeta+D))}{\sinh(kD)}\right]\mathbf{F}_k[\tilde{\mathbf{\Psi}}_\xi],\\ \tilde{\psi}_\zeta(\xi,\zeta) &= \mathbf{F^{-1}}\left[\frac{k\cosh(k(\zeta+D))}{\sinh(kD)}\right]\mathbf{F}_k[\tilde{\mathbf{\Psi}}],\\ \tilde{\mathbf{\Psi}} &= c\mathbf{Y} + \gamma\mathbf{Y}(\mathbf{Y}/2+b).\end{aligned} \tag{3.42}$$

Algoritmo para encontrar pontos de estagnação

1. *Construir a onda de superfície livre:* escolhe-se o comprimento de onda(λ), o parâmetro $\varepsilon = H/\lambda$ e a vorticidade do fluxo γ. O perfil da superfície livre ($\mathbf{Y}$) e sua velocidade de propagação (c) são encontrados a partir da equação (3.36). Observe que a equação (3.36) tem 3 incógnitas: o perfil da onda de superfície, a velocidade de propagação da onda e a constante de Bernoulli. A forma utilizada para lidar com este problema será mostrada na Seção 4.1.

2. *Obter os pontos de estagnação:* a partir do perfil da superfície livre e velocidade de propagação obtidos no passo 1, utilizam-se as equações (3.40) para procurar pelo zero de $U(X(\xi,\zeta),Y(\xi,\zeta))$ com (ξ,ζ) restrito aos conjuntos (3.39). Descoberta a localização do zero de $U(X(\xi,\zeta),Y(\xi,\zeta))$ no sistema de coordenadas canônico, aplicam-se as equações do mapeamento conforme $(X(\xi,\zeta),Y(\xi,\zeta))$ para obter as coordenadas deste ponto no referencial móvel (X,Y).

Método para encontrar as linhas de corrente

Observe que sendo $\tilde{\psi}(x,y)$ a função harmônica conjugada de $\tilde{\phi}(x,y)$ a EDO (3.38) pode ser escrita como

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = \tilde{\phi}_X - \gamma(Y+b) - c = \tilde{\psi}_Y - \gamma(Y+b) - c = \psi_Y(X,Y), \\ \dfrac{dY}{dt} = \tilde{\phi}_Y = -\tilde{\psi}_X = -\psi_X(X,Y), \\ (X(0),Y(0)) = (X_0,Y_0), \end{cases} \tag{3.43}$$

onde a menos de uma constante, ψ definida por

$$\psi(X,Y) := \tilde{\psi}(X,Y) - \gamma Y\left(\frac{Y}{2}+b\right) - cY \tag{3.44}$$

é a função de corrente do fluxo. É fácil ver que as linhas de corrente (que são as curvas $\psi(X,Y) = \text{constante}$) são as trajetórias das partículas no referencial móvel e vice-versa.

Da fórmula (3.28) temos que

$$\tilde{\psi}(X(\xi,\zeta),Y(\xi,\zeta)) = \mathbf{F^{-1}}\left[\frac{\sinh(k(\zeta+D))}{\sinh(kD)}\right]\mathbf{F}_k[\tilde{\mathbf{\Psi}}], \tag{3.45}$$

onde a partir de (3.34) segue que

$$\tilde{\mathbf{\Psi}} = c\mathbf{Y} + \gamma\mathbf{Y}(\mathbf{Y}/2+b).$$

A mudança do sistema de coordenadas (ξ,ζ) para o sistema (X,Y) é obtida a partir de (3.41).

Algoritmo para encontrar as linhas de corrente (3.46)

1. *Construir a onda de superfície livre:* escolhe-se o comprimento de onda(λ), o parâmetro $\varepsilon = H/\lambda$ e a vorticidade do fluxo γ. O perfil da superfície livre ($\mathbf{Y}$) e sua velocidade de propagação (c) são encontrados a partir da equação (3.36). Observe que a equação (3.36) tem 3 incógnitas: o perfil da onda de superfície, a velocidade de propagação da onda e a constante de Bernoulli. A forma utilizada para lidar com este problema será mostrada na Seção 4.1.

2. *Traçar as linhas de corrente:* discretiza-se o domínio canônico (ξ,ζ). A partir do perfil da superfície livre e da velocidade de propagação obtidos no passo 1, utilizam-se as equações (3.44), (3.45) e (3.41) para encontrar os valores de $\psi(X,Y)$ no sistema de coordenadas (X,Y). Em seguida, encontram-se as curvas de nível de $\psi(X,Y)$, as quais são as linhas de corrente.

Método para calcular a pressão

Da equação de Bernoulli no referencial móvel (3.19) tem-se que

$$p = B + c\tilde{\phi}_X - \frac{1}{2}(\tilde{\phi}_X^2 + \tilde{\phi}_Y^2) - Y + \gamma(Y+b)\tilde{\phi}_X - \gamma\tilde{\psi}. \tag{3.47}$$

A partir de (3.26), (3.21) e (3.28) conclui-se que o cálculo da pressão pode ser feito utilizando as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\phi}_X(X(\xi,\zeta),Y(\xi,\zeta)) = \frac{1}{|J|}(\tilde{\psi}_\zeta X_\xi + \tilde{\psi}_\xi Y_\xi),\\
&\tilde{\phi}_Y(X(\xi,\zeta),Y(\xi,\zeta)) = \frac{1}{|J|}(\tilde{\psi}_\zeta Y_\xi - \tilde{\psi}_\xi X_\xi),\\
&Y(\xi,\zeta) = \mathbf{F^{-1}}\left[\frac{\sinh(k(\zeta+D))}{\sinh(kD)}\right]\mathbf{F}_k\mathbf{Y} + \frac{\zeta}{D},\\
&\tilde{\psi}(X(\xi,\zeta),Y(\xi,\zeta)) = \mathbf{F^{-1}}\left[\frac{\sinh(k(\zeta+D))}{\sinh(kD)}\right]\mathbf{F}_k[\tilde{\mathbf{\Psi}}],
\end{aligned} \tag{3.48}$$

onde a mudança do sistema de coordenadas (ξ,ζ) para o sistema (X,Y) é dada por (3.41), e o Jacobiano $|J|$ é dado por

$$|J|(\xi,\zeta) = X_\xi^2 + Y_\xi^2.$$

De (3.34) segue que

$$\tilde{\mathbf{\Psi}} = c\mathbf{Y} + \gamma\mathbf{Y}(\mathbf{Y}/2 + b),$$

assim pode-se calcular $\tilde{\psi}(X(\xi,\zeta),Y(\xi,\zeta))$ via fórmula (3.48) e

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_\xi(\xi,\zeta) &= \mathbf{F^{-1}}\left[\frac{\sinh(k(\zeta+D))}{\sinh(kD)}\right]\mathbf{F}_k[\tilde{\mathbf{\Psi}}_\xi],\\
\tilde{\psi}_\zeta(\xi,\zeta) &= \mathbf{F^{-1}}\left[\frac{k\cosh(k(\zeta+D))}{\sinh(kD)}\right]\mathbf{F}_k[\tilde{\mathbf{\Psi}}].
\end{aligned}$$

Deste modo a pressão no interior do fluido é calculada como segue:

Algoritmo para calcular a pressão (3.49)

1. *Construir a onda de superfície livre:* escolhe-se o comprimento de onda, o parâmetro $\varepsilon = H/\lambda$ e a vorticidade do fluxo γ. O perfil da superfície livre ($\mathbf{Y}$) e sua velocidade de propagação (c) são encontrados a partir da equação (3.36). Observe que a equação (3.36) tem 3 incógnitas: o perfil da onda de superfície, a velocidade de propagação da onda e a constante de Bernoulli. A forma utilizada para lidar com este problema será mostrada na Seção 4.1.

2. *Calcular a pressão:* com o perfil da superfície livre e velocidade de propagação dados no passo 1 utilizam-se as equações (3.47) e (3.48) para obter a pressão.

3.4 Método para traçar as trajetórias

Nesta seção mostraremos um método para traçar as trajetórias das partículas no referencial de laboratório em fluxos com vorticidade constante. Este método é construído a partir das equações do mapeamento conforme e de uma adaptação do algoritmo para encontrar trajetórias de partículas em fluxos irrotacionais que foi mostrado na Seção 1.4.

A trajetória de uma partícula no interior do fluido localizada inicialmente em (x_0, y_0) satisfaz a EDO

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \tilde{\phi}_x(x - ct, y) - \gamma(y + b), \\ \dfrac{dy}{dt} = \tilde{\phi}_y(x - ct, y), \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0). \end{cases} \tag{3.50}$$

Passando ao referencial móvel

$$X = x - ct, \qquad Y = y$$

vê-se que esta equação diferencial é equivalente a

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = \tilde{\phi}_X(X, Y) - \gamma(Y + b) - c, \\ \dfrac{dY}{dt} = \tilde{\phi}_Y(X, Y), \\ (X(0), Y(0)) = (X_0, Y_0). \end{cases} \tag{3.51}$$

Uma curva $(X(t), Y(t))$ é solução de (3.51) se, somente se, a curva $(x(t), y(t))$ definida por

$$x(t) = X(t) + ct, \qquad y(t) = Y(t), \tag{3.52}$$

satisfaz (3.50) com condição inicial $(x(0), y(0)) = (X_0, Y_0)$.

O algoritmo (3.54) mostra como encontrar trajetórias no referencial de laboratório (x, y). Apresentaremos agora como utilizar as equações do mapeamento conforme para encontrar $\tilde{\phi}_X(X, \eta(X))$, $\tilde{\phi}_Y(X, \eta(X))$ e $\tilde{\phi}(X, \eta(X))$ necessários para a execução deste algoritmo. Com efeito, as equações (3.26) avaliadas ao longo da superfície e usando que $\phi_\zeta = -\psi_\xi$ implicam que

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_X(X, \eta(X)) &= \frac{1}{|J|}(\tilde{\mathbf{\Phi}}_\xi \mathbf{X}_\xi + \tilde{\mathbf{\Psi}}_\xi \mathbf{Y}_\xi), \\ \tilde{\phi}_Y(X, \eta(X)) &= \frac{1}{|J|}(\tilde{\mathbf{\Phi}}_\xi \mathbf{Y}_\xi - \tilde{\mathbf{\Psi}}_\xi \mathbf{X}_\xi), \end{aligned} \tag{3.53}$$

onde o Jacobiano $|J|$ da mudança de coordenada (ξ, ζ) para (X, Y) ao longo da superfície livre é dada por

$$\begin{aligned} |J|(\xi) &= \mathbf{X}_\xi^2 + \mathbf{Y}_\xi^2, \\ \mathbf{X}_\xi &= \frac{1}{D} - \mathcal{C}[\mathbf{Y}_\xi], \end{aligned}$$

onde $\mathcal{C}[\cdot] := \mathbf{F^{-1}}[i\coth(kD)]\mathbf{F}_k[\cdot]$. Os demais termos necessários nas fórmulas em (3.53) são obtidos a partir de (3.34) e (3.30) e são dados por

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{\Psi}}_\xi &= c\mathbf{Y}_\xi + \gamma(\mathbf{Y}+b)\mathbf{Y}_\xi,\\
\tilde{\mathbf{\Phi}}_\xi &= -\mathcal{C}[\tilde{\mathbf{\Psi}}_\xi],\\
\tilde{\mathbf{\Psi}} &= c\mathbf{Y} + \gamma\mathbf{Y}(\mathbf{Y}/2+b),\\
\tilde{\mathbf{\Phi}} &= -\mathcal{C}[\tilde{\mathbf{\Psi}}].
\end{aligned}$$

Algoritmo para encontrar trajetórias no referencial de laboratório (3.54)

As equações do mapeamento (3.53) e a formulação integral de fronteira mostrada na Seção 1.4 permitem construir um método para encontrar as trajetórias das partículas no referencial de laboratório em fluxos com vorticidade constante.

A diferença do método apresentado aqui para o proposto na Seção 1.4 é que agora a onda de superfície livre e os dados de fronteira livre são encontrados através das equações do mapeamento conforme. O passo a passo do método é dado abaixo:

1. *Construir a onda de superficie livre:* escolhe-se o comprimento de onda (λ), o parâmetro $\varepsilon = H/\lambda$ e a vorticidade do fluxo γ. O perfil da superfície livre($\mathbf{Y}$) e sua velocidade de propagação (c) são encontrados a partir da equação (3.36).

2. *Obter os dados ao longo da superfície livre:* com o perfil da superfície livre e sua velocidade de propagação dados no passo 1, utilizam-se as equações (3.53) para calcular $\tilde{\phi}_X(X,\eta(X))$, $\tilde{\phi}_Y(X,\eta(X))$ e $\tilde{\phi}(X,\eta(X))$. O dado de Neumann segue imediatamente.

3. *Encontrar o campo de vetores:* parametrizando-se o perfil da onda de superfície livre pela curva $(\mathbf{X}(\xi),\mathbf{Y}(\xi))$ o campo de vetores de (3.51) é obtido a partir de

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_X(X,Y) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\lambda \Bigg\{ &\tilde{\phi}(\mathbf{X}(\xi),\mathbf{Y}(\xi))\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{\partial K}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{X}(\xi),\mathbf{Y}(\xi),X,Y)\right]\\
&-\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{X}(\xi),\mathbf{Y}(\xi))\frac{\partial K}{\partial X}(\mathbf{X}(\xi),\mathbf{Y}(\xi),X,Y)\Bigg\}\,\|(\mathbf{X}_\xi(\xi),\mathbf{Y}_\xi(\xi))\|d\xi.
\end{aligned}$$

Para a integração é usada a regra do trapézio. Analogamente encontra-se $\tilde{\phi}_Y(X,Y)$.

4. *Traçar as trajetórias no referencial móvel:* a trajetória no referencial móvel $(X(t),Y(t))$ é encontrada numericamente integrando a EDO (3.51) via Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) ([47], p.438). Depois para cada passo no tempo de RK4 repete-se os passos 3 e 4. Note que a curva $(X(t),Y(t))$ também é uma linha de corrente.

5. *Traçar as trajetórias no referencial de laboratório:* de posse de $(X(t),Y(t))$ utilizam-se as transformações (3.52) para escrever a órbita no referencial de laboratório.

Capítulo 4

Simulações numéricas para trajetórias em fluxos com vorticidade constante

Apresentaremos neste capítulo os resultados das simulações numéricas que são frutos da implementação em Matlab dos algoritmos mostrados nas Seções 3.3 e 3.4. Estes algoritmos foram propostos como uma ferramenta para estudar os efeitos provocados pela vorticidade no interior do fluido.

Devido à adimensionalização utilizada, a profundidade do canal é 1. Fixado o comprimento de onda em 2π, estes valores de profundidade e comprimento de onda implicam em ondas no regime de profundidade intermediária. Para esta configuração foram realizadas uma série de simulações, as quais são mostradas na Seção 4.2.

Na Subseção 4.2.1 mostramos as primeiras simulações para ondas de amplitude pequena. Estes resultados numéricos serão comparados às aproximações de Ehrnström e Villari [23] considerando o perfil da onda de superfície livre e a velocidade de propagação válidos na teoria linear. Como será mostrado (nas figuras 4.2 e 4.3) os experimentos numéricos produziram resultados que estão de acordo com a teoria. Apenas na Subseção 4.2.1 as ondas de superfície são lineares. Em todo restante do capítulo as ondas são não lineares.

Os resultados originais desta tese versam sobre os efeitos da vorticidade no interior do fluido e suas diversas facetas. Só que antes de buscarmos informações no interior do fluido é necessário que se tenha um bom conhecimento dos efeitos da vorticidade constante no perfil da onda de superfície. Reproduzimos muitos resultados que já existem nesta direção [34, 59, 50, 57, 56]. Falamos em detalhes sobre isto na Subseção 4.2.2.

Os principais resultados de nosso trabalho estão na Subseção 4.2.3. Um deles é achar com precisão a localização de pontos de estagnação, sendo este fato inédito na

literatura. Isto é feito a partir partir do algoritmo (3.42). Nem Estudos teóricos nem numéricos realizados anteriormente, conseguiram encontrar com precisão a localização de pontos de estagnação. (Pontos de estagnação são pontos onde a velocidade vertical do fluido é zero e a velocidade horizontal é igual a velocidade da onda.) Matematicamente, são definidos como pontos de equilíbrio da EDO das trajetórias das partículas no referencial móvel.

Usufruindo da capacidade de encontrar pontos de estagnação com precisão, faremos um estudo numérico sobre como pontos de estagnação aparecem, ou desaparecem, no interior do fluido de acordo com variações em γ e em η. Para uma melhor compreensão dos mecanismos que provocam o surgimento de pontos de estagnação aplicamos a seguinte metodologia:

(i) A classe da onda de superfície livre é fixada, e consideramos apenas os efeitos causados por variações de γ. A classe da onda de superfície é fixada através do parâmetro $\varepsilon = H/\lambda$, onde H é altura da onda e λ é o comprimento de onda. Cabe observar que exceto para perfis exóticos, o parâmetro $\varepsilon = H/\lambda$ é a declividade da onda.

(ii) A vorticidade é fixada, e consideramos efeitos causados por variações do parâmetro ε.

Os resultados encontrados indicam que tanto no caso **(i)** quanto em **(ii)** ocorre uma bifurcação do tipo sela-centro no surgimento dos pontos de estagnação. Nestes casos, existem dois pontos de sela e um de centro por comprimento de onda λ. À medida que estes parâmetros diminuem, os pontos se aproximam, colidem no fundo do canal abaixo da crista e depois deixam de existir. Para ilustrar várias questões desta dinâmica, será apresentada uma curva de bifurcação no espaço dos parâmetros (γ, ε) (veja figura 4.12). Nenhum estudo teórico ou numérico realizado anteriormente analisou a bifurcação sofrida pelo sistema das trajetórias das partículas no referencial móvel.

O resultado mais próximo relacionado ao nosso estudo de pontos de estagnação é devido a Ehrnström e Villari [23]. Contudo o trabalho destes autores é restrito à teoria de ondas lineares. Ehrnström e Villari linearizaram as equações governantes e obtiveram fórmulas para a velocidade horizontal e vertical do fluido. A partir destas fórmulas eles mostraram que existem três pontos de estagnação por comprimento de onda, dois pontos de sela e um de centro. Porém, estes autores não estudaram a bifurcação sofrida pelo sistema das trajetórias no referencial móvel.

Assim como no trabalho de Ehrnström e Villari, os resultados teóricos existentes [18] para ondas periódicas viajantes em fluxos com vorticidade constante, com pontos de estagnação, são válidos apenas para ondas de amplitude arbitrariamente pequena. Eles

provam a existência de pontos de estagnação mas não conseguem calcular com precisão a localização deles, nem quantos são.

Outros trabalhos numéricos que abordaram o efeito da vorticidade constante no interior do fluido foram os de Teles da Silva e Peregrine [50] e Vasan e Oliveras [59]. Nestes trabalhos a metodologia utilizada para encontrar pontos de estagnação foi observar os gráficos das linhas de corrente. Desta forma, a depender do caso, é possível identificar a existência de um ponto de estagnação, porém não se consegue encontrar com precisão sua localização.

Dentre os trabalhos numéricos cabe ressaltar o pioneirismo de Ko e Strauss [33, 34] em abordarem os casos de vorticidade constante e descontínua [34] e fluxos com camadas de vorticidade [33]. Seus resultados para fluxos com vorticidade constante dão indícios para a existência de pontos de estagnação. Contudo não conseguem informar a localização dos mesmos.

Outro resultado importante do nosso trabalho é que calculamos a pressão no interior do fluido e encontramos a localização dos pontos de máximo e mínimo da pressão, inclusive quando o ponto de mínimo ocorre no interior. Como será visto, para determinados valores de vorticidade podem existir pontos no interior com pressão menor que a atmosférica. Além disso, mostramos que a presença de pontos de estagnação no interior do fluido implica na existência de dois pontos de máximo da pressão, localizados no fundo do canal e simétricos em relação a crista da onda. Algo surpreendente, pois para fluxos irrotacionais o ponto de máximo da pressão está no fundo e diretamente abaixo da crista [16]. Estes resultados são obtidos a partir do algoritmo 3.49.

Estudos anteriores sobre a pressão traçam as curvas de nível, encontram pontos no interior do fluido com pressão menor que atmosférica [50, 59], identificam o ponto de máximo da pressão, mas não localizam o ponto mínimo da pressão quando este ocorria no interior[59]. Além disso, fizeram a correlação entre dois pontos de máximo da pressão e a presença de pontos de estagnação apenas para ondas de amplitudes arbitrariamente pequena [59].

Pela primeira vez o domínio do fluido abaixo das ondas exóticas foi estudado. Mostraremos as linhas de corrente e as curvas de nível da pressão abaixo de tais ondas (veja figura 4.14). Os trabalhos numéricos anteriores limitavam-se a perfis de ondas de superfície livre que eram gráficos [50, 59].

Na Subseção 4.2.4 mostramos órbitas de partículas no referencial de laboratório em fluxos com vorticidade constante capturadas numericamente (veja figura 4.15), fato que é inédito. Até onde se sabe os únicos resultados existentes sobre trajetórias de partículas (trajetórias e não linhas de corrente) são feitos através de linearizações ou aproximações das equações governantes [22, 23, 61] e são válidos apenas para ondas de amplitude arbi-

trariamente pequena. Nesta tese as órbitas são calculadas a partir do método numérico mostrado na Seção 3.4.

Por último, na Seção 4.3 outros regimes de onda serão abordados variando o valor de λ. Veremos que encurtar as ondas é um bom mecanismo para fazer os pontos de estagnação se aproximarem da superfície livre.

4.1 Dados iniciais discretos e perfil de correnteza adotado

Observe nos algoritmos das Seções 3.3 e 3.4 que todas as grandezas são obtidas em função da elevação da onda de superfície, a qual escrita em coordenadas canônicas é denotada por $\mathbf{Y}(\xi)$. O objetivo desta seção é apresentar uma discretização da elevação da onda de superfície que permita o uso da transformada rápida de Fourier em todos estes algoritmos.

No nosso estudo a onda de superfície é λ-periódica no domínio físico. Conforme mostrado em (3.24), a restrição

$$D =< \mathbf{Y} > +1, \tag{4.1}$$

na largura da faixa do domínio conforme assegura que o período da onda de superfície livre seja o mesmo nos sistemas de coordenadas canônico e físico. Adotaremos esta condição no nosso trabalho.

Pela periodicidade de $\mathbf{Y}(\xi)$ podemos restringir a discretização a $\xi \in [-L, L)$, onde $\lambda = 2L$. A discretização é feita em pontos equidistantes.

$$\xi_j = -L + (j-1)\Delta\xi, \qquad j = 1, \cdots, J = 2^p, \qquad \text{onde} \quad \Delta\xi = \lambda/J, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Cada função avaliada em um ponto $\xi_j, j = 1, \cdots, J$, da grade acima é sinalizada com um sub-índice j, por exemplo $\mathbf{Y}_j := \mathbf{Y}(\xi_j)$ e $\mathbf{X}_{\xi j} := \mathbf{X}_\xi(\xi_j)$. Como será necessário calcular transformadas discretas de Fourier (TDF), para aumentar a velocidade das operações aritméticas da TDF do Matlab, as discretizações são feitas com $J = 2^p$ pontos ([53], p. 24).

Buscando ondas de superfície livre que sejam simétricas em relação ao eixo $\xi = 0$ é necessário conhecer apenas os pontos $\mathbf{Y}_j, j = 1, \cdots, J/2 + 1$. Para os demais, usa-se a simetria da onda, ou seja,

$$\mathbf{Y}_j := \mathbf{Y}_{J-j+2}, \qquad j = J/2 + 2, \cdots, J.$$

Apresentaremos agora um método de Newton para construir o perfil da onda de superfície livre, o qual permitirá construir todos os dados necessários para extrairmos informações do interior do fluido.

A discretização da equação governante da superfície livre, equação (3.36), gera um sistema de $J/2+3$ incógnitas, $(\mathbf{Y}_1, \cdots, \mathbf{Y}_{J/2+1}, c, B)$, e $J/2+1$ equações definidas por

$$G_j(\mathbf{Y}_1, \cdots, \mathbf{Y}_{J/2+1}, c, B) = 0, \qquad j = 1, \cdots, J/2+1. \tag{4.2}$$

Para mais detalhes veja Apêndice F.1.

Este sistema pode ser completado pelas equações

$$\mathbf{Y}(0) - \mathbf{Y}(-L) = H, \qquad \int_{-L}^{0} \mathbf{Y}\mathbf{X}_\xi \, d\xi = 0, \tag{4.3}$$

as quais significam que a onda tem uma altura H e média zero no sistema de coordenadas físico. A condição de média zero implica que em (4.1) o valor tomado é $D = 1$. Discretizando as equações (4.3) define-se

$$G_{J/2+2}(\mathbf{Y}_1, \cdots, \mathbf{Y}_{J/2+1}, c, B) := \mathbf{Y}_{J/2+1} - \mathbf{Y}_1 - H,$$

$$G_{J/2+3}(\mathbf{Y}_1, \cdots, \mathbf{Y}_{J/2+1}, c, B) := \frac{\Delta\xi(\mathbf{Y}_1\mathbf{X}_{\xi 1} + \mathbf{Y}_{J/2+1}\mathbf{X}_{\xi(J/2+1)})}{2} + \Delta\xi \sum_{j=2}^{J/2} \mathbf{Y}_j\mathbf{X}_{\xi j}.$$

O sistema

$$G_j(\mathbf{Y}_1, \cdots, \mathbf{Y}_{J/2+1}, c, B) = 0, \qquad j = 1, \cdots, J/2+3$$

foi resolvido pelo método de Newton com critério de parada

$$\frac{\sum_{j=1}^{J/2+1} |G_j(\mathbf{Y}_1, \cdots, \mathbf{Y}_{J/2+1}, c, B)|}{J/2+3} < 10^{-10}.$$

Este critério de parada automaticamente fornece a informação do quanto a solução que estamos construindo $(\mathbf{Y}, c, b)$ satisfaz as condições de fronteira livre (as quais no sistema de coordenadas canônico foram arranjadas em uma única condição, que quando discretizada gerou as equações $G_j(\mathbf{Y}_1, \cdots, \mathbf{Y}_{J/2+1}, c, B) = 0, j = 1, \cdots, J/2+1$). Assim este critério de parada é uma boa escolha em vez da norma da diferença entre as duas últimas aproximações.

Para construirmos ondas não lineares em fluxos com vorticidade aplicamos o método de continuação. Ou seja, primeiro construímos uma onda com altura H pequena em um fluxo com intensidade da vorticidade pequena usando o método de Newton com aproximação inicial dada pela teoria linear

$$\mathbf{Y}(X) = (H/2)\cos(kX), \qquad c = \sqrt{\frac{\tanh(k)}{k}}, \qquad B = 0,$$

com $0 < H \ll 1$. A solução $(\mathbf{Y}, c, b)$ construída para $0 < H \ll 1$ é em seguida utilizada como aproximação inicial para o método de Newton construir uma onda maior em um fluxo com vorticidade maior. Prosseguindo deste modo construímos ondas fortemente não lineares em fluxos com vorticidade. Mais detalhes sobre o método de Newton podem ser vistos no Apêndice F.1.

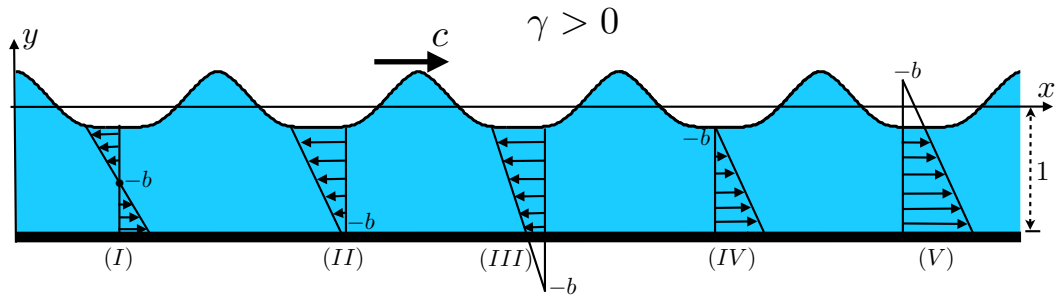

Figura 4.1: Onda propagando para a direita na presença de vorticidade constante positiva. Alguns perfis de correnteza possíveis dependendo da escolha de b em (4.4). Neste trabalho o perfil adotado é o perfil (I) com $b = 0.5$.

Perfil de correnteza adotado

Conforme (3.7), o campo de velocidade do fluido (u, v) é

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \tilde{\phi}_x(x,y,t) - \gamma(y+b), \text{ para } -1 < y < \eta(x,t),\ b \in \mathbb{R}, \\ v(x,y,t) &= \tilde{\phi}_y(x,y,t). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Recordemos que $\nabla\tilde{\phi}$ é o campo de velocidade proveniente da onda apenas e $(-\gamma(y+b), 0)$ é o campo chamado de fluxo cisalhante trivial gerado pela correnteza com a superfície livre em repouso.

Na figura 4.1 são mostrados os diferentes perfis de correnteza que podem ocorrer dependendo da escolha de b em (4.4). Mostraremos que o perfil da onda de superfície livre e a existência de pontos de estagnação independem da escolha de b. Variações de b causam apenas uma mudança na velocidade de propagação da onda.

Com efeito, fixe a vorticidade γ. Variações de b não influenciam o perfil da superfície livre (veja Observação 3.1.1). Elas causam apenas uma mudança na velocidade de propagação da onda. Se em um fluxo com $b = b_1$ a velocidade da onda é c_1, então para um fluxo com $b = b_1 + b_2$ a velocidade da onda é $c_1 - \gamma b_2$.

Se neste fluxo com $b = b_1$ existir um ponto de estagnação localizado no sistema de coordenadas móvel na posição (X_0, Y_0), então no fluxo com $b = b_1 + b_2$ também existe um ponto de estagnação no ponto (X_0, Y_0). De fato, é fácil ver que a velocidade vertical permanece nula (veja Observação 3.1.1). Quanto à velocidade horizontal, note que

$$\tilde{\phi}_X(X_0,Y_0) - \gamma(Y_0+b_1) - c_1 = 0 \Rightarrow \tilde{\phi}_X(X_0,Y_0) - \gamma(Y_0+b_1+b_2) - (c_1 - \gamma b_2) = 0.$$

Portanto, a velocidade horizontal do fluxo com $b = b_1 + b_2$ é zero. Consequentemente (X_0, Y_0) é um ponto de estagnação deste fluxo.

Para ilustrar os comentários acima foi executado o seguinte experimento: calculou-se as ondas de superfície para os valores de vorticidade $\gamma = 1, 0$, e -1 usando $b = 0.5$ e

$b = 1$. Os resultados são mostrados na figura 4.5, a qual será discutida com mais detalhes na Seção 4.2.2. Os perfis das ondas para os dois valores de b são idênticos. O efeito de b é sentido apenas na velocidade da onda.

Observe em (4.4) que se a contribuição da onda ao campo de velocidade do fluido for desprezível então

$$u(x, y, t) \approx -\gamma(y + b), \text{ para } -1 < y < 0, \, b \in \mathbb{R},$$
$$v(x, y, t) \approx 0.$$

Consequentemente existe um ponto de estagnação na profundidade $y = -b$. Por tal motivo é natural imaginar que seja mais fácil descobrir pontos de estagnação nos casos em que $b \in (-1, 0)$.

Portanto, sem perda de generalidade, a menos que seja dito do contrário, em todas simulações realizadas neste trabalho foi considerado o valor $b = 0.5$ no campo de velocidade do fluido.

4.2 Ondas em profundidade intermediária

Nesta seção apresentaremos o resultado das simulações realizadas considerando ondas de superfície livre com comprimento $\lambda = 2\pi$. Além disso, relembremos que de acordo com a adimensionalização realizada (veja (3.15)) a profundidade do canal é 1 e que as ondas são identificadas pelo parâmetro $\varepsilon = H/\lambda$.

4.2.1 Ilustrando as aproximações da teoria linear

As primeiras simulações foram realizadas para ondas de amplitudes pequena. Perfis de ondas e velocidades de propagação construídos numericamente são comparados às aproximações de Ehrnström e Villari [23] para a teoria linear.

Estas aproximações foram obtidas a partir de uma linearização das equações governantes em torno do fluxo cisalhante trivial com $b = 1$. Reescritas na notação usada neste trabalho, temos que [23]

$$\eta(X) = a\cos(kx - ct),$$

$$c = -\gamma d + \frac{1}{2k}\left(\gamma\tanh(kd) \pm \sqrt{4gk\tanh(kd) + \gamma^2\tanh^2(kd)}\right).$$

Adimensionalizando de acordo com as unidades dadas em (3.15), abandonando a notação de linhas e passando ao referencial móvel as expressões acima tornam-se

$$\eta(X) = \alpha\cos(X), \tag{4.5}$$

$$c = -\gamma + \frac{1}{2k}\left(\gamma \tanh(k) \pm \sqrt{4k \tanh(k) + \gamma^2 \tanh^2(k)}\right), \tag{4.6}$$

onde $\alpha = a/d$ e $X = kx - ct$.

Conforme mencionado anteriormente, em todas as simulações realizadas foi utilizado o valor $b = 0.5$ no perfil da correnteza. Por esse motivo a fórmula da velocidade da onda (4.6) deve ser adaptada para $b = 0.5$, a qual torna-se

$$c = -0.5\gamma + \frac{1}{2k}\left(\gamma \tanh(k) \pm \sqrt{4k \tanh(k) + \gamma^2 \tanh^2(k)}\right). \tag{4.7}$$

Escolhendo $\varepsilon = 10^{-3}$ foram construídas ondas para os valores de vorticidade $-2, -1, 0, 1$ e 5. Este valor de ε corresponde a $\alpha = 10^{-3}\pi$ na expressão (4.5). Na fórmula (4.7) foi considerado o valor $k = 1$. Uma comparação entre os resultados do método numérico e as aproximações de Ehrnström e Villari é feita nas figuras 4.2 e 4.3. Como pode ser observado na figura 4.2, mesmo que a aproximação linear não incorpore a vorticidade em sua fórmula, seus resultados são bons. Apenas para $\gamma = -5$ ocorre uma discrepância entre o perfil capturado pelo método numérico e a aproximação linear. Na verdade, é um tanto esperado que a vorticidade influencie na forma da onda. Este será o tema da próxima seção. O que é possível ver na figura 4.2 é que ondas de superfície de pequena amplitude são menos suscetíveis aos efeitos da vorticidade, fato que justifica a validade das aproximações. Na figura 4.3 mostramos a velocidade da onda em função da vorticidade, para ondas com $\varepsilon = 10^{-3}$, $\varepsilon = 0.09$ e para a aproximação (4.7) dada por Ehrnström e Villari. Como pode ser visto, para $\varepsilon = 10^{-3}$ praticamente não há diferença entre os resultados numéricos e a aproximação (4.7), apenas para a onda com $\varepsilon = 0.09$ existe alguma diferença.

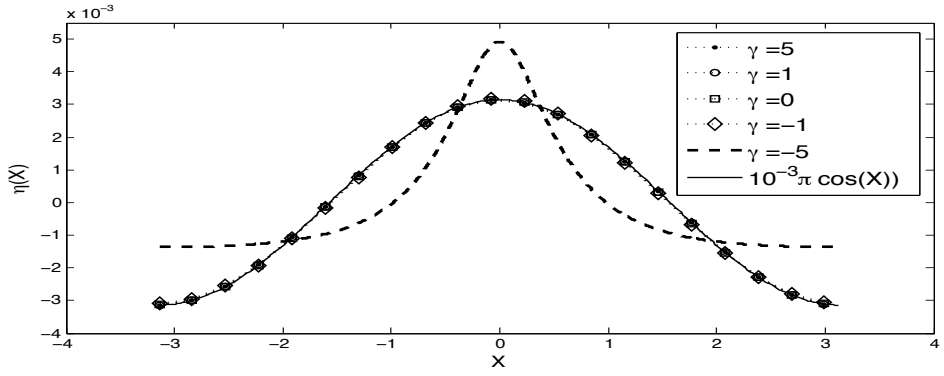

Figura 4.2: **Perfis de superfície para ondas lineares.** Perfis de ondas com $\varepsilon = 10^{-3}$ para os valores de vorticidade $\gamma = 5, 1, 0, -1$ e -5. A curva $10^{-3}\pi\cos(X)$ é a aproximação (4.5) para o perfil da onda em fluxos com vorticidade constante. A menos do fluxo com vorticidade $\gamma = -5$, os perfis são indistinguiveis.

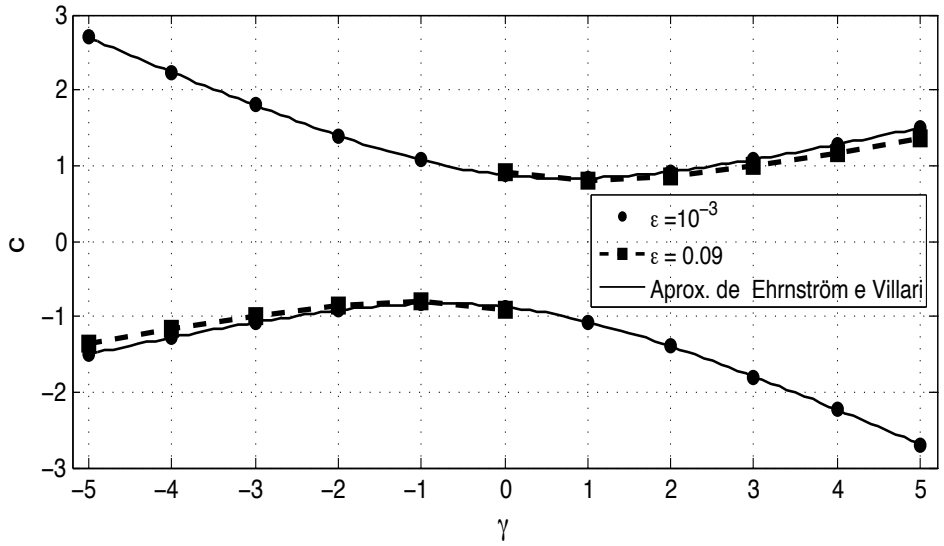

Figura 4.3: Velocidade da onda em função da vorticidade para ondas com $\varepsilon = 0.001$, 0.09 e para a aproximação (4.7). Para $\varepsilon = 10^{-3}$ os resultados numéricos se confundem com a aproximação (4.7).

4.2.2 Descobrir os dados iniciais ao longo da superfície livre sob o efeito de vorticidade

Na Seção 4.1 apresentamos o método de Newton que utilizado para construir o perfil da superfície livre, e consequentemente os dados de Dirichlet e Neumann ao longo da fronteira. Estes dados são necessárias nos algoritmos mostrados nas Seções 3.3 e 3.4 para extrair informações do interior do fluido.

Nesta seção analisaremos quais são os efeitos provocados pela vorticidade no perfil da onda de superfície livre. Conforme sinalizado no fim da última seção, a vorticidade causa mudanças na forma da onda de superfície. Só que a agora o estudo não está restrito a ondas lineares.

Para uma melhor compreensão deste tema as simulações foram realizadas obedecendo a dois padrões de escolha:

1. Procuramos pelo valor máximo do parâmetro $\varepsilon = H/\lambda$, denotado por ε_{max}, para o qual o método consegue construir uma onda de superfície para um determinado valor de vorticidade γ;

2. Fixado o parâmetro ε, construímos perfis para diferentes valores de vorticidade.

Os resultados encontrados são discutidos nos próximos parágrafos.

Para diferentes valores de vorticidade buscou-se o valor máximo do parâmetro ε, denotado por ε_{max}, para o qual o código numérico suporta construir uma onda de

superfície. Um gráfico com os valores encontrados é mostrado na figura 4.4. Quanto maior a vorticidade, maior o ε_{max}. Considerando vorticidade igual a $1,0$ e -1 os perfis das ondas para o parâmetro ε_{max} são exibidos na figura 4.5. Esta figura exibe os resultados das simulações com os valores $b = 0.5$ e $b = 1$; isto foi feito para deixar bem claro o efeito que a escolha do valor de b (no perfil da correnteza) provoca na superfície. Os diferentes valores de b não provocaram nenhum efeito no perfil das ondas. Como pode ser observado na figura 4.5, a única diferença está na velocidade de propagação da onda. O efeito observado é exatamente como mencionado no final da Seção 4.1.

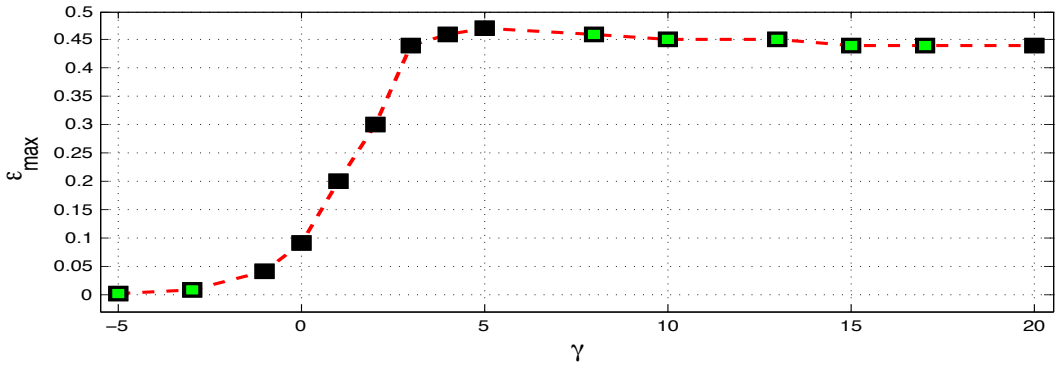

Figura 4.4: No gráfico é mostrado o valor máximo de ε (ε_{max}) para o qual foi possível construir uma onda para um determinado valor de vorticidade (γ). Os perfis das ondas correspondentes aos pontos pretos no gráfico são mostrados nas figuras 4.5 e 4.6.

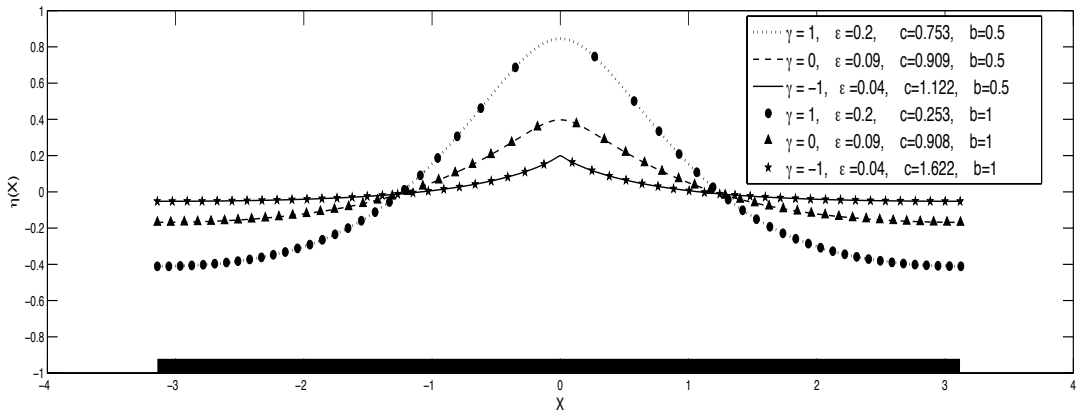

Figura 4.5: Perfis das ondas para vorticidade igual a $1,0$, e -1, com parâmetro ε máximo. As velocidades de propagação das ondas são mostradas na legenda do gráfico. Os perfis foram calculados considerando os valores $b = 0.5$ e $b = 1$. Como pode ser visto o valor assumido por b não influencia o perfil da onda, afeta apenas sua velocidade de propagação.

Na figura 4.6 são exibidos mais perfis de ondas com o parâmetro ε máximo. Agora os valores de vorticidade mostrados são $2, 3, 4, 5$ e 20. Como pode ser notado, à medida que a vorticidade aumenta, o perfil torna-se mais arredondado e o cavado se aproxima mais do fundo $y = -1$.

Além disso, quanto mais arredondado é o perfil, mais os pontos da discretização da onda se afastam da região da crista e concentram-se no cavado. Isto é uma consequência já conhecida ao tentar-se construir ondas para o parâmetro ε máximo via mapeamento conforme. Para sanar este problema é necessário utilizar uma discretização bastante fina. No entanto, estudar estes perfis mais exóticos não é objetivo principal deste trabalho.

Estudos específicos voltados para a construção de ondas de superfície com vorticidade foram realizados por Vanden-Broeck [56, 57]. Em [56] foi desenvolvido um método numérico para ondas periódicas e em [57] para ondas solitárias. Contudo, apesar das limitações do mapeamento conforme, os perfis das ondas mostrados na figura 4.6 e na figura 4.18 (sobre a qual serão feitos mais comentários adiante) são bastante semelhantes aos perfis de ondas exóticos mostrados por Vanden-Broeck, respectivamente, em ([57], p. 346, figura 6) e em ([56], p. 214, figura 4).

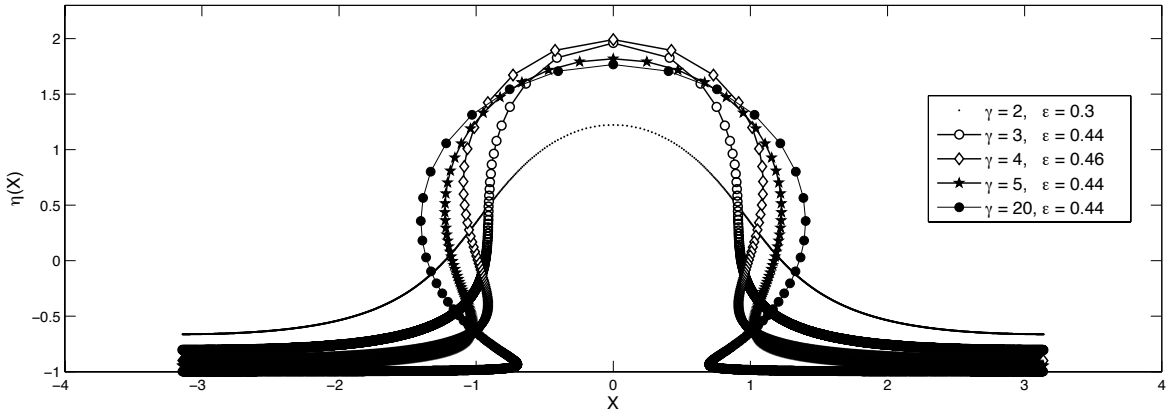

Figura 4.6: Perfis das ondas para vorticidade igual a $2, 3, 4, 5$ e 20, e o respectivo valor máximo de ε.

Perfis atípicos de ondas, como o encontrado para $\gamma = 20$ na figura 4.6, são intrigantes. Variando o parâmetro ε e fixado $\gamma = 20$, a figura 4.7 dá indicação de que tais ondas surgem em fluxos com vorticidade grande e no limite ε_{max}.

A figura 4.8 exibe o efeito de diferentes intensidades de vorticidade em uma onda com $\varepsilon = 0.01$. Os valores utilizados para a vorticidade foram $\gamma = 5, 1, 0, -1$ e -1.7. Como pode ser visto, a vorticidade negativa deixa o perfil da onda mais pontiagudo e o cavado mais raso.

Além de analisar o efeito da vorticidade na forma da onda de superfície livre

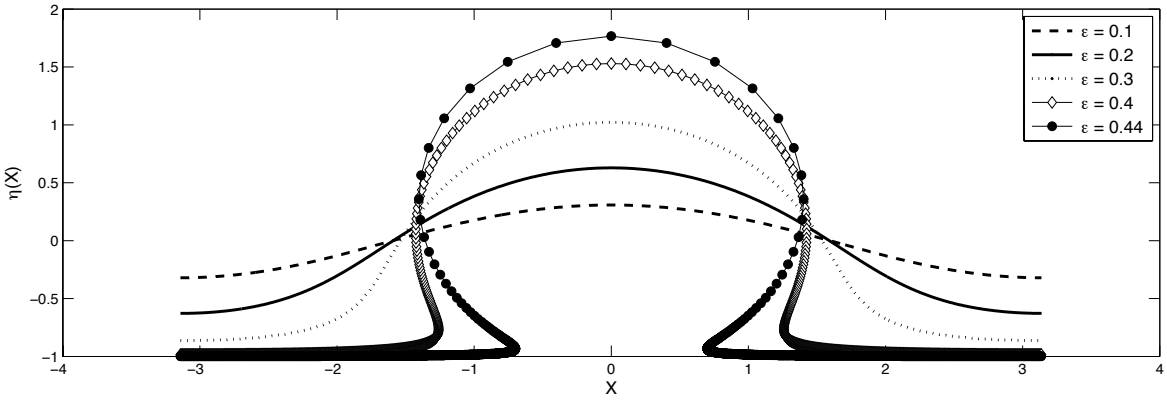

Figura 4.7: Perfis das ondas em um fluxo com vorticidade $\gamma = 20$ para diferentes valores de ε.

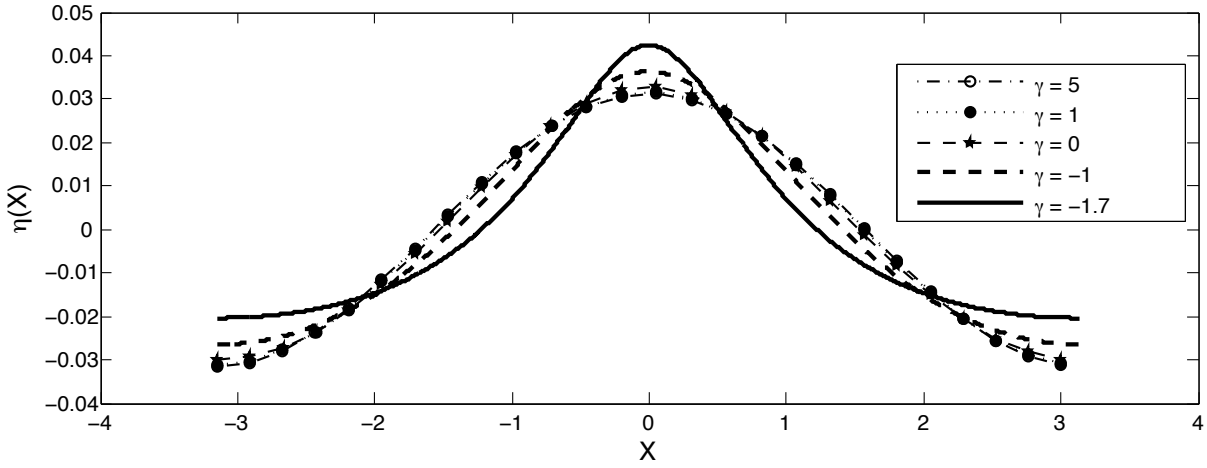

Figura 4.8: **Perfis de ondas para ε fixo e diferentes valores de vorticidade:** $\varepsilon = 0.01$ fixo e vorticidade $5, 1, 0, -1$ e -1.5.

estudou-se o efeito da vorticidade na velocidade de propagação. Na figura 4.3 é exibido o gráfico da velocidade da onda c em função da vorticidade γ para as ondas com $\varepsilon = 0.001$ e $\varepsilon = 0.09$. Na figura 4.9 são mostrados os gráficos da velocidade da onda c como função do parâmetro ε, para diferentes valores de vorticidade.

Em suma os efeitos da vorticidade sobre a onda de superfície livre observados foram:

- Com o aumento da vorticidade o valor máximo do parâmetro $\varepsilon = H/\lambda$, ε_{max}, aumenta até alcançar um determinado limite;

- As ondas em fluxos com vorticidade negativa possuem um perfil com picos mais pontiagudos. Ao aumentar a vorticidade positiva do fluxo os perfis das ondas ficam

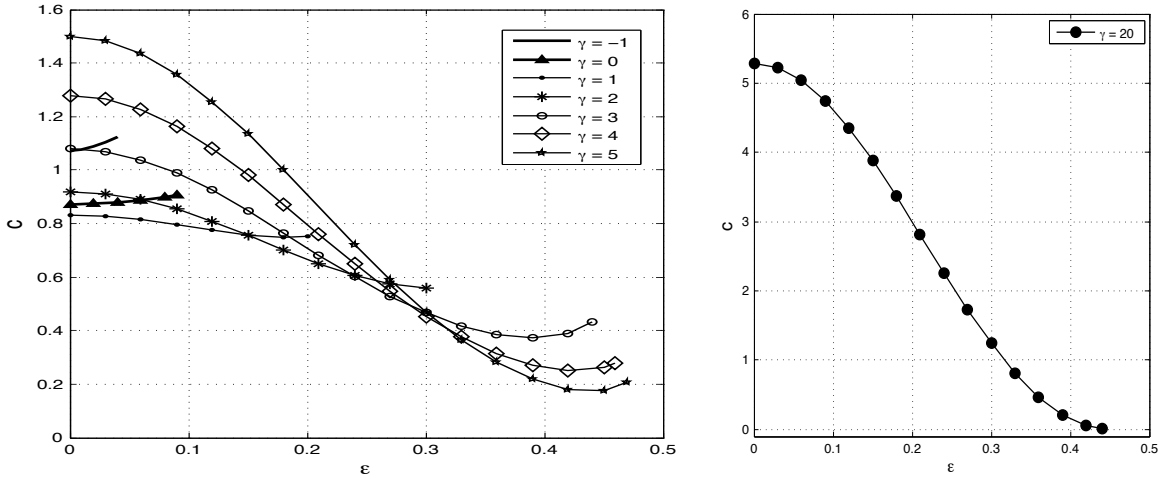

Figura 4.9: Velocidade da onda c em função da inclinação ε para diferentes valores de vorticidade. Para cada vorticidade γ foi calculada a velocidade da onda para a inclinação ε variando de 0.001 até a inclinação máxima que o método suportou.

mais arrendodados e chegam a formar perfis parecidos com uma bolha;

- Com o aumento da vorticidade positiva o cavado torna-se mais fundo. Este efeito é mais drástico nas ondas associadas aos valores máximos do parâmetro ε. Para estas ondas o cavado chega ao fundo do canal com o aumento da vorticidade;
- À medida que a vorticidade torna-se mais negativa o cavado fica mais raso.

Estes resultados sobre perfis da superfície livre já são conhecidos [34, 59, 50, 57, 56]. O diferencial deste trabalho está na capacidade de explorar o efeito da vorticidade não apenas na superfície livre, mas também no interior do fluido para uma gama de perfis de ondas. A metodologia aplicada a esta tarefa também é o diferencial deste trabalho. Através das equações do mapeamento conforme de uma faixa no domínio físico encontrar-se-ão pontos de estagnação no interior do fluido com alta precisão. Este é o tema da próxima seção.

4.2.3 Pontos de estagnação e o efeito da vorticidade no interior do fluido

A maioria dos estudos numéricos para ondas em fluxos com vorticidade constante restringe-se a mostrar os efeitos causados pela vorticidade na forma da onda de superfície livre. A principal contribuição deste trabalho é analisar os efeitos da vorticidade no interior do fluido. Nesta subseção apresentamos alguns dos nossos resultados principais: o estudo da bifurcação ocorrida na EDO das trajetórias no referencial móvel e a análise de como pontos de estagnação interferem na localização dos pontos de máximo da pressão.

Bifurcação do sistema das trajetórias no referencial móvel

Conforme visto em (3.38), a EDO das trajetórias das partículas no referencial móvel em fluxos com vorticidade constante, γ, é dada por

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = \tilde{\phi}_X - \gamma(Y+b) - c, \\ \dfrac{dY}{dt} = \tilde{\phi}_Y, \\ (X(0), Y(0)) = (X_0, Y_0), \end{cases} \tag{4.8}$$

onde

$$(X_0, Y_0) \in \{(X,Y) \in \mathbb{R} : -\lambda/2 \leq X \leq \lambda/2 \text{ e } -1 \leq Y \leq \eta(X)\}.$$

Os pontos de equilíbrio da EDO acima são os pontos de estagnação do fluxo. Para buscar os pontos de estagnação de (4.8) é necessário observar que existem dois mecanismos que provocam o surgimento ou desaparecimento de tais pontos: a variação da vorticidade γ e a escolha da onda de superfície. Chega-se a esta conclusão a partir de dois fatos: para $\gamma = 0$, a única possibilidade de ponto de estagnação é na crista e só ocorre na onda mais íngreme, a qual forma no pico um ângulo de 120^0 [42]; para γ não nulo existem pontos de estagnação no interior do fluido, para determinados valores de γ [34, 50, 59].

Para uma melhor compreensão das consequências ao sistema (4.8) decorrentes das escolhas de γ e de η aplicamos a seguinte metodologia de estudo:

(i) A classe das ondas de superfície livre foi fixada, e consideramos apenas os efeitos causados apenas por variações de γ. As classes das ondas de superfícies foram fixadas através do parâmentro $\varepsilon = H/\lambda$, H altura da onda.

(ii) A vorticidade foi fixada, e consideramos os efeitos causados por variações de ε.

Um dos principais resultados deste trabalho é descobrir qual tipo de bifurcação ocorrre na EDO (4.8) para os casos **(i)** e **(ii)**. Além disso, calcular a curva de bifurcação

no espaço dos parâmetros (γ, ε). Estes fatos até onde sabemos, não foram abordados em nenhum outro trabalho.

As simulações para encontrar o retrato de fase e os pontos de estagnação de (4.8) foram realizadas a partir da implementação em Matlab dos algoritmos (3.46) e (3.42). Isto proporciona resultados altamente precisos.

Para colocar em prática a estratégia metodológica **(i)**, a escolha da classe da onda de superfície livre foi tomada a partir da seguinte observação. Para $\gamma = 0$ é sabido que não há pontos de estagnação no interior. Deste modo, pretende-se variar γ de zero até um valor para o qual surjam pontos de estagnação. Como para $\gamma = 0$ a maior onda construída pelo método foi para $\varepsilon = 0.09$, segue que este foi o valor escolhido para o parâmetro ε.

Para aplicar a estratégia metodológica **(ii)**, fixamos o valor da vorticidade em $\gamma = 1$ e variamos o parâmetro ε de 10^{-3} até o maior valor para o qual o método numérico converge, com vorticidade $\gamma = 1$, que é $\varepsilon = 0.2$.

Os resultados das simulações realizadas são discutidos abaixo.

Os retratos de fase para fluxos com vorticidade $\gamma = 5, 3, 1.2, 1.07, 1$ e 0 e onda de superfície com $\varepsilon = 0.09$ são mostrados na figura 4.10. Os pontos pretos no gráfico mostram a localização dos pontos de estagnação. Como pode ser visto surgem pontos de sela e de centro. À medida que a vorticidade diminui estes pontos se aproximam, colidem no fundo do canal abaixo da crista e desaparecem. Este comportamento indica que para ε fixo o sistema (4.8) sofre uma **bifurcação do tipo sela-centro** com a variação da vorticidade.

É importante ressaltar que a bifurcação sela-centro canônica encontrada na literatura é descrita de um modo diferente da apresentada aqui ([28], p.427): um ponto crítico tipo sela e um ponto crítico tipo centro aproximam-se um do outro quando um parâmetro varia em direção ao valor de bifurcação, colidem quando o parâmetro atinge o valor de bifurcação criando um ponto tipo cúspide e depois desaparecem para novos valores do parâmetro.

Com relação a esta descrição, o modelo de bifurcação sela-centro da figura 4.10 é um pouco diferente. Não há a criação do ponto de cúspide e existem dois pontos de sela e um de centro por comprimento de onda. Este tipo de bifurcação sela-centro que encontramos numericamente é não usual e deve ser analisada teoricamente.

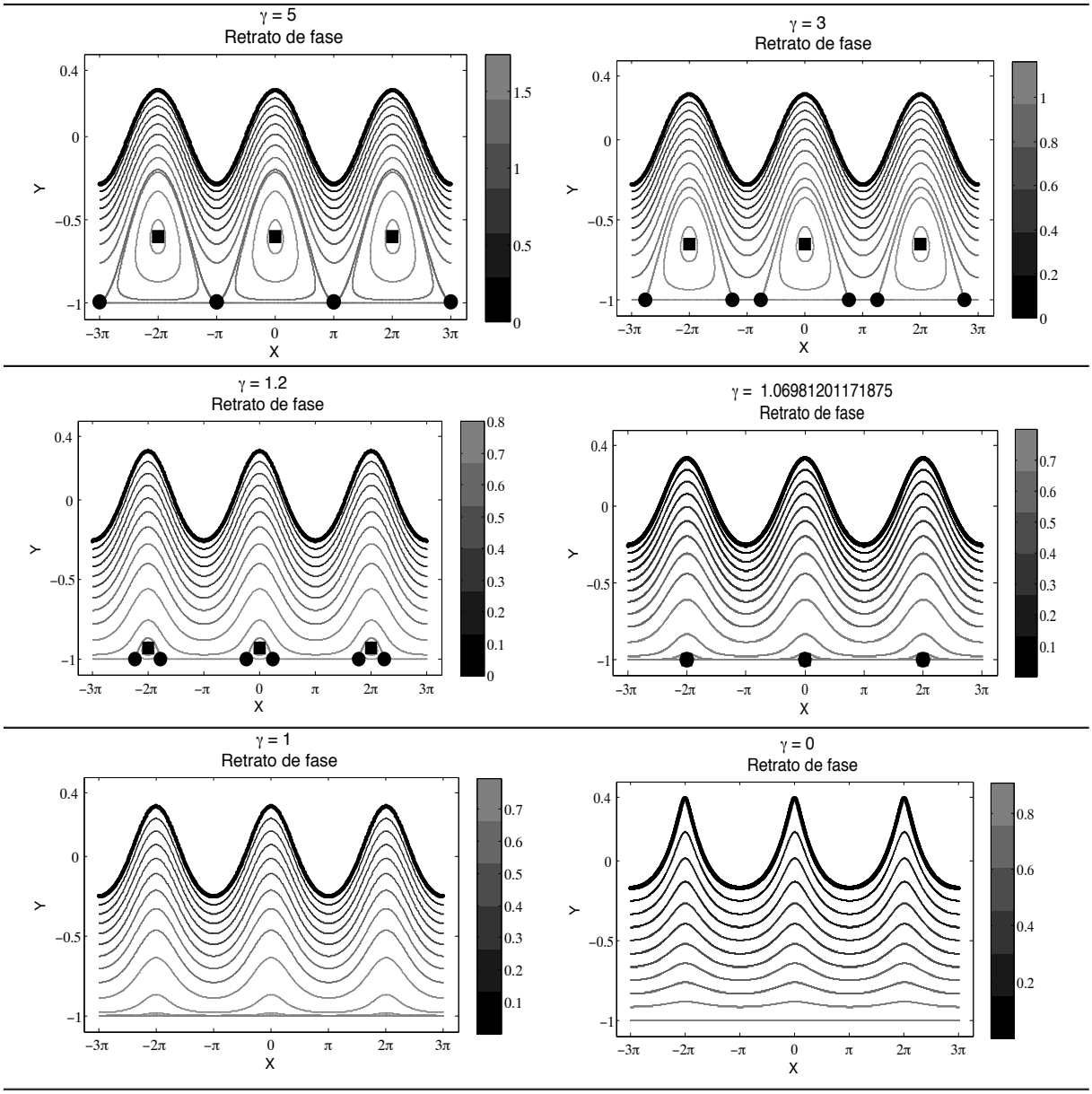

Figura 4.10: **Retratos de fase para ondas com $\varepsilon = 0.09$ para diferentes valores de vorticidade**. Os pontos pretos marcam a localização dos pontos de estagnação e a curva preta mais grossa é a curva $\psi(X, Y) = 0$.

Para fluxos com vorticidade fixada em $\gamma = 1$ e ondas de superfície livre com o parâmetro $\varepsilon = 0.2, 0.13, 0.107$ e 0.1 o sistema (4.8) também sofre uma bifurcação do tipo sela-centro – isto é mostrado na figura 4.11.

Como pode ser percebido, certas escolhas de γ e ε no sistema (4.8) levam à existência de pontos de estagnação. Uma maneira de sistematizar o surgimento, ou não, de pontos de estagnação é encontrar a curva de bifurcação no espaço dos parâmetros (γ, ε). A curva de bifurcação divide o espaço dos parâmetros em duas regiões: para (γ, ε) de um lado da curva surgem pontos de estagnação, enquanto para (γ, ε) do outro lado da

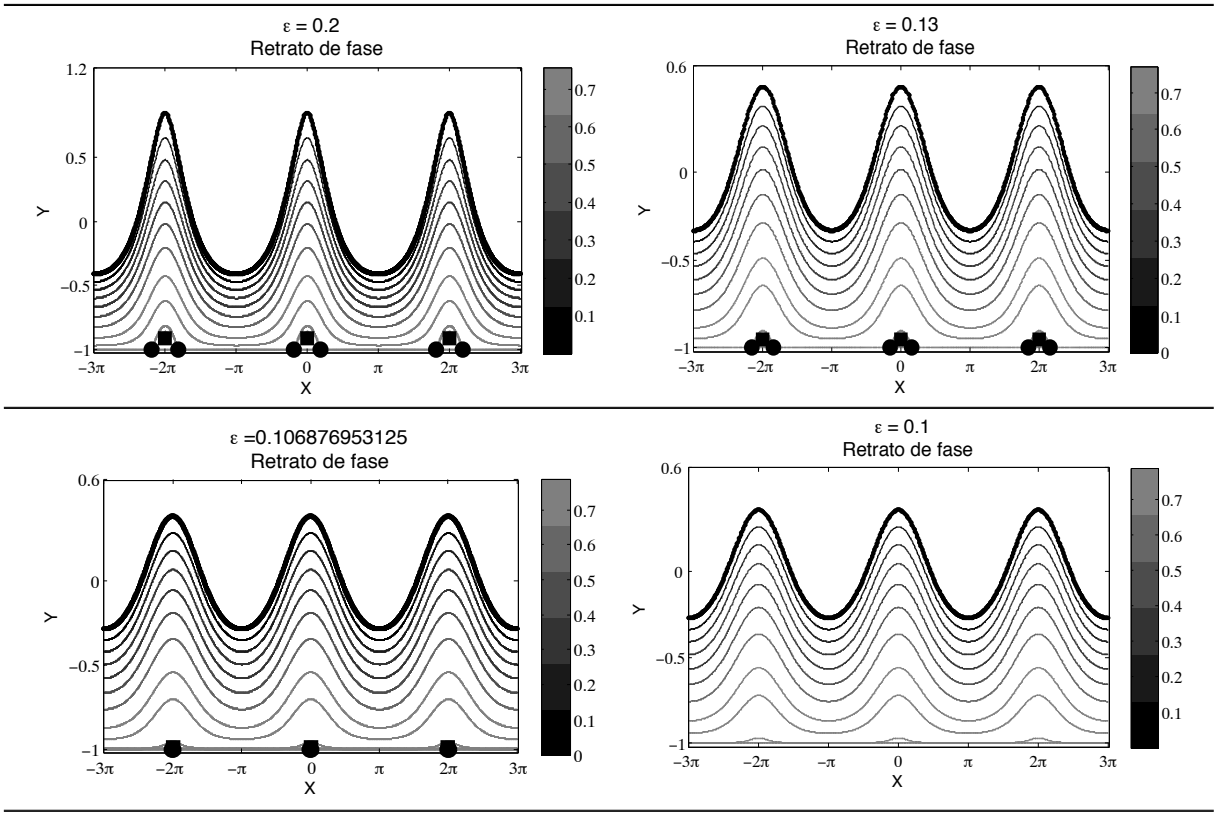

Figura 4.11: **Retratos de fase para fluxos com vorticidade $\gamma = 1$ com diferentes ondas de superfície livre.** Os pontos pretos marcam a localização dos pontos de estagnação e a curva preta mais grossa é a curva $\psi(X, Y) = 0$.

curva não surgem pontos de estagnação.

Na figura 4.12 é feita uma análise detalhada do espaço dos parâmetros (γ, ε). A linha tracejada localiza os pontos $(\gamma, \varepsilon_{max})$, onde ε_{max} é o valor máximo de ε para os quais o método numérico consegue construir uma onda de superfície livre para um determinado valor de vorticidade γ. Para ficar mais claro, esta linha tracejada é a mesma da figura 4.4. A área cinza abaixo da linha tracejada representa a região no espaço dos parâmetros (γ, ε) para a qual o método consegue capturar ondas de superfície livre, e consequentemente encontrar pontos de estagnação. Os quadrados pretos e os asteriscos na figura 4.12 localizam escolhas de (γ, ε) para as quais o sistema (4.8) possui três pontos de estagnação no interior, respectivamente, não possui pontos de estagnação. Estes pontos foram calculados para os valores de vorticidade $\gamma = -5, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 13, 15, 17$ e 20, com para cada um destes valores γ o parâmetro ε variando no intervalo $[10^{-3}, \varepsilon_{max}]$. A curva contínua preta na figura 4.12 é a curva de bifurcação, para valores de (γ, ε) nesta curva o sistema (4.8) possui um ponto de estagnação no fundo do canal. Ao passar da região à direita da curva de bifurcação (quadrados pretos) para a esquerda (asteriscos) ocorre o seguinte fenômeno: o sistema (4.8) possui três pontos críticos, e à medida que os

parâmetros (γ, ε) se aproximam da curva os pontos críticos se aproximam um do outro, quando (γ, ε) passa sobre a curva os pontos críticos colidem no fundo do canal abaixo da crista e desaparecem. Numericamente não há dúvidas deste fenômeno. Do ponto de vista teórico esta bifurcação é não usual e requer estudos detalhados. A curva de bifurcação corta o eixo $\varepsilon = 10^{-3}$ em $\gamma_c = 1.774988198280334$. Observe na figura 4.12 que para $\gamma \geq \gamma_c$ existem pontos de estagnação independente de ε. Para ondas lineares é possível obter uma fórmula para γ_c. Isto será discutido na Seção 4.3.

A curva de bifurcação foi obtida através de inspeção para encontrar onde o sistema (4.8) bifurca. Exemplos de retratos de fase para pontos na curva de bifurcação são mostrados nas figuras 4.10 e 4.11 para os pontos $(\gamma = 1.0698, \varepsilon = 0.09)$ e $(\gamma = 1, \varepsilon = 0.10687)$ respectivamente. Escolhas de (γ, ε) ao longo da curva de bifurcação originam pontos de estagnação (X^*, Y^*) do sistema (4.8) que satisfazem $\|(X^*, Y^*) - (0, -1)\| < 10^{-5}$, onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana. Esta precisão é que suporta a conclusão de que ao longo desta curva só existe um ponto de estagnação do sistema (4.8) localizado no fundo abaixo da crista, ou seja, no ponto $(0, -1)$.

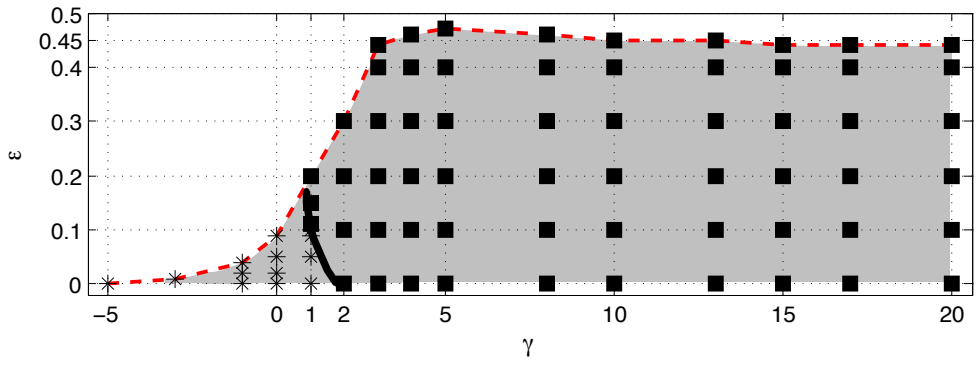

Figura 4.12: Os quadrados pretos e os asteriscos localizam escolhas de (γ, ε) para as quais o sistema (4.8) possui três pontos de estagnação no interior, respectivamente, não possui pontos de estagnação. Para (γ, ε) ao longo da curva contínua preta o sistema (4.8) possui um ponto de estagnação no fundo do canal. Esta é a curva de bifurcação. A curva de bifurcação corta o eixo $\varepsilon = 10^{-3}$ em $\gamma_c = 1.774988198280334$. Os resultados numéricos indicam que para $\gamma \geq \gamma_c$ existem pontos de estagnação independente de ε. Para ondas lineares é possível obter uma fórmula para γ_c. Isto será discutido na Seção 4.3.

Efeitos da vorticidade na pressão

Para fluxos irrotacionais, são conhecidas as seguintes propriedades da pressão [16]:

- O máximo da pressão é atingido no fundo do canal, no ponto diretamente abaixo

da crista;

- O mínimo da pressão é atingindo ao longo da superfície livre;
- A pressão é estritamente decrescente horizontalmente ao longo do segmento de reta que parte da crista em direção ao cavado;
- A pressão é estritamente crescente com a profundidade.

Para fluxos com vorticidade constante estas propriedades mudam completamente. Uma análise detalhada da pressão em fluxos com vorticidades $\gamma = 0, 1, 1.069812011718750$, $1.2, 3$ e 5 e onda de superfície $\varepsilon = 0.09$ é feita na figura 4.13. Nesta figura, são mostrados os gráficos das curvas de nível da pressão, da pressão no fundo do canal e da pressão ao longo do segmento de reta partindo da crista ao fundo do canal. Os pontos pretos e asteriscos no gráfico das curvas de nível marcam, respectivamente, a localização dos pontos de mínimo e máximo da pressão. As curvas pretas contínuas mais grossas representam a curva de nível $p(X, Y) = 0$. De acordo com a adimensionalização adotada, a pressão sobre a superfície livre é zero. Diferentemente do caso irrotacional, à medida em que a vorticidade aumenta surgem pontos no interior do fluido com pressão menor que a atmosférica e dois pontos de máximo da pressão. Além disso, para determinados valores de vorticidade, fixada a profundidade, a pressão perde monotonicidade ao ir horizontalmente da crista ao cavado. Estes fenômenos já eram conhecidos em outros trabalhos [50, 59], mas sem nenhuma informação sobre seu motivo.

O que o nosso estudo traz de novo é a localização precisa do ponto de mínimo da pressão (com valor menor que a atmosférica) no interior do fluido e mostramos que a existência de dois pontos de máximo da pressão está diretamente ligada aos pontos estagnação tipo sela. Mais precisamente, os dois pontos de máximo da pressão estão exatamente abaixo dos pontos de sela. Observe que os fluxos estudados na figura 4.13 são os mesmos da figura 4.10. Comparando a posição dos pontos de sela e dos pontos de máximo da pressão, vemos que quando existem pontos de sela ($\gamma > 1.069812011718750$) os pontos de máximo da pressão estão localizados no fundo do canal e exatamente abaixo deles. Estes resultados podem ser compreendidos como segue. Para ajudar o entendimento, observemos o retrato de fase do fluxo com vorticidade $\gamma = 5$ na figura 4.10. Existe um ponto de sela em $(-\pi, -0.9964)$ e outro em $(\pi, -0.9964)$. Como a vorticidade é positiva, as partículas circulam no sentido anti-horário em torno do ponto de centro. Considere a variedade estável do ponto de sela $(\pi, -0.9964)$, que "chega"de $(-\pi, -0.9964)$. A velocidade de uma partícula ao longo desta curva diminui quando ela se aproxima do ponto $(\pi, -0.9964)$, de modo que ela não alcanca o ponto $(\pi, -0.9964)$ em tempo finito. Consequentemente, a pressão aumenta, o que segue do teorema de Bernoulli ([7], p. 16). Isto justifica a alta pressão em torno dos pontos de sela.

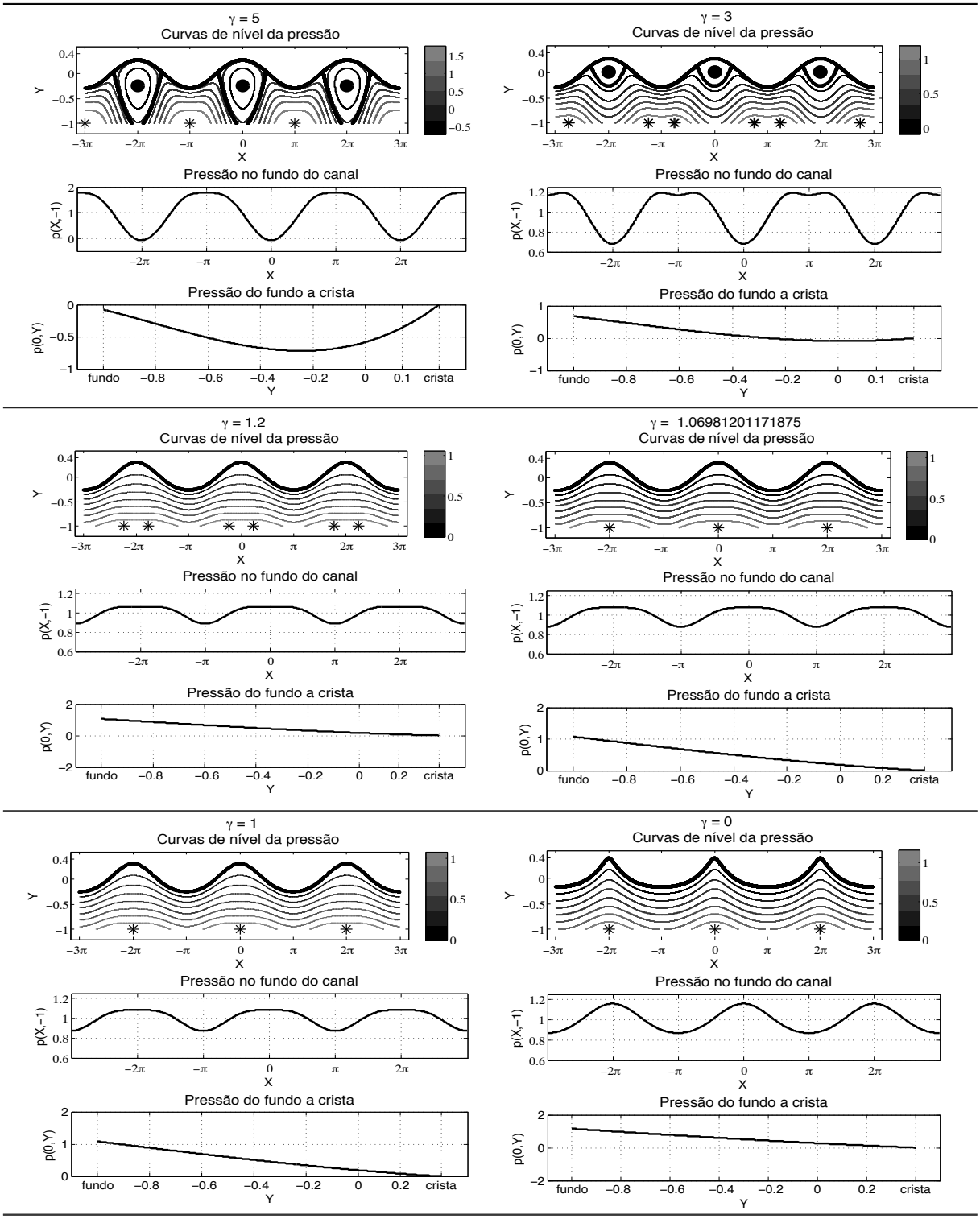

Figura 4.13: **Pressão abaixo da onda com inclinação** $\varepsilon = 0.09$. Nos gráficos das curvas de nível, os pontos pretos e asteriscos são, respectivamente, os pontos de mínimo e máximo da pressão. As curvas pretas contínuas mais grossas representam a curva de nível $p(X, Y) = 0$.

O interior do fluido abaixo da onda exótica

O interior do fluido abaixo de um perfil exótico de onda é analisado, pela primeira vez na literatura. São mostrados o retrato de fase e as curvas de nível da pressão da onda mais exótica mostrada na figura 4.6, a qual ocorre para $\gamma = 20$ e $\varepsilon = 0.44$. Os resultados são mostrados na figura figura 4.14. Os pontos pretos no retrato de fase mostram a localização dos pontos de estagnação. Os pontos pretos e asteriscos no gráfico das curvas de nível da pressão sinalizam, respectivamente, a localização dos pontos de mínimo e máximo. Vendo o retrato de fase, o perfil extremamente arredondado de tais ondas pode ser explicado pelo fato delas estarem sobre um vórtice muito forte. Esse vórtice é forte o suficiente para transformar todo movimento no interior do fluido em circular. Fisicamente a existência destes perfis exóticos são questionáveis. Não há experimentos laboratoriais que comprovem sua existência. A princípio o fluxo da figura 4.14, o qual ocorre para valor de vorticidade grande, pode ser entendido como uma tentativa de analisar o limite do modelo das equações inviscidas. A forma arrendondada da onda e o fato do movimento no interior do fluido ser completamente circular sugerem que neste escoamento a vorticidade é mais importante que a gravidade.

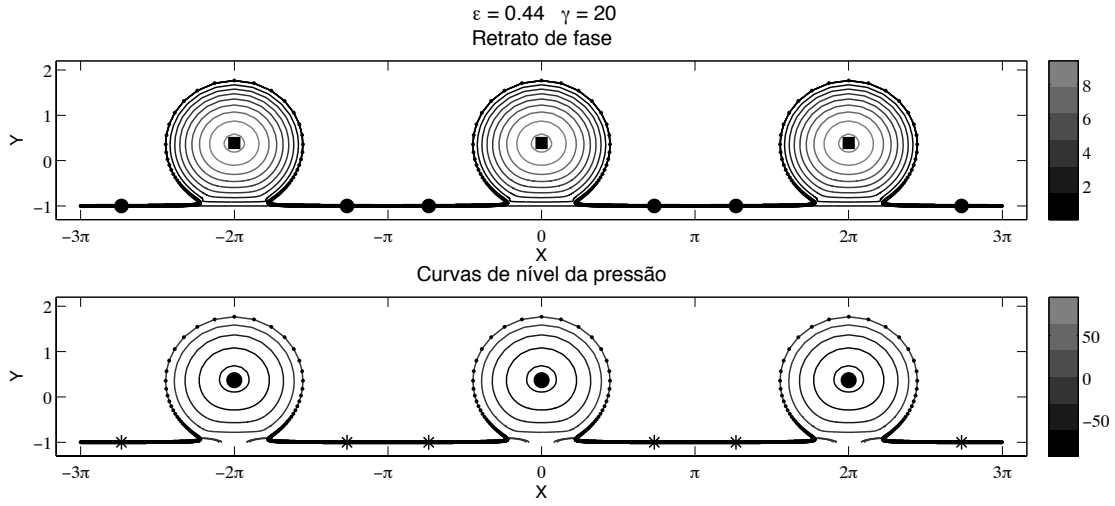

Figura 4.14: **Retrato de fase e pressão para perfil exótico de onda** O perfil da figura corresponde a uma onda com $\varepsilon = 0.44$ no fluxo com vorticidade $\gamma = 20$. No retrato de fase, os pontos pretos marcam a localização dos pontos de estagnação e a curva preta mais grossa é a curva $\psi(X, Y) = 0$. No gráfico das curvas de nível da pressão, os pontos pretos e asteriscos marcam a localização dos pontos de mínimo e máximo da pressão, respectivamente. A curva preta mais grossa representa a curva de nível $p(X, Y) = 0$.

4.2.4 Trajetórias em fluxos com vorticidade constante

Os resultados existentes na literatura sobre padrões de trajetórias de partículas em fluxos com vorticidade constante são obtidos a partir da perturbação do fluxo cisalhante trivial [61] ou da linearização das equações governantes em torno do fluxo cisalhante trivial [23]. Estes procedimentos são realizados com o propósito de extrair informações sobre o campo de velocidade do fluido e, por conseguinte, das trajetórias. Estes procedimentos têm em comum que seus resultados são válidos apenas para ondas de amplitudes extremamente pequenas.

Nesta seção mostraremos trajetórias de partículas no referencial de laboratório em fluxos com vorticidade constante capturadas numericamente, novidade na literatura. Para tal procedimento utilizamos o método numérico mostrado na Seção 3.4.

Conforme mostrado na Seção 3.3, as linhas de corrente são as trajetórias no referencial móvel. Deste modo, em um primeiro instante é razoável pensar em obter as trajetórias a partir das linhas de corrente. Porém esta ideia conduz a uma dificuldade simples, mas não trivial. Para obter as trajetórias das partículas conhecendo as linhas de corrente é necessário conhecer o tempo físico. Sem conhecê-lo a tarefa fácil de, conhecida uma uma linha de corrente $(X(t), Y(t))$, encontrar a trajetória associada $(x(t), y(t))$ através das equações

$$x(t) = X(t) + ct, \qquad y(t) = Y(t)$$

não é possível.

Ao traçar as linhas de corrente as escalas de tempo das partículas ficam desconhecidas, perde-se a indicação da velocidade das partículas, como por exemplo seu sentido.

Para traçar as órbitas das partículas utilizaremos o algoritmo 3.54. O mapeamento conforme fornece os dados de Dirichlet e Neumann ao longo da superfície livre e uma formulação integral de fronteira é usada para obter o campo de velocidade no interior do fluido. Este procedimento tem limitações. Conforme mostrado nas figuras 4.6 e 4.7, nas ondas cujo parâmetro ε é maior, os pontos da discretização na região da crista ficam mais afastados. Como consequência disso, a integração da formulação integral de fronteira do método, realizada via regra do trapézio, perde precisão. Observe que o algoritmo 3.54 também pode ser usado para encontrar pontos de estagnação. No passo 3 deste algoritmo a integração pode ser feita para encontrar o zero da velocidade horizontal do fluido no referencial móvel.

Para ilustrar a eficiência da formulação integral de fronteira, calculamos a localização de pontos de estagnação através dos métodos: formulação integral de fronteira algoritmo 3.54 e algoritmo 3.42, constuído exclusivamente a partir das equações do mapeamento conforme. Fixamos a vorticidade do fluxo em $\gamma = 5$ e as ondas de superfície utilizadas foram para $\varepsilon = 0.04$ e $\varepsilon = 0.09$.

O resultado obtido foi o seguinte: ambos os métodos capturaram um ponto de estagnação localizado abaixo da crista e outros dois simétricos localizados abaixo dos cavados. Contudo para um mesmo ponto existe uma pequena diferença na profundidade fornecida por cada método. Observe que por construção o algoritmo 3.42 é bem preciso, pois consiste de avaliar a fórmula da velocidade horizontal obtida via equações do mapeamento conforme. Já o algoritmo 3.54 necessita calcular uma integral onde os pontos não são igualmente espaçados, o que pode provocar menos precisão nos resultados. Uma comparação das profundidades dos pontos de estagnação capturados por cada método é feita na tabela 4.1, onde consideramos como referência os valores dados pelo algoritmo (3.42). Como pode ser visto na onda com o parâmetro ε maior o método integral de fronteira é menos preciso.

	Método	ε**= 0.09**	ε**= 0.04**
Profundidade do ponto de estagnação abaixo da crista	Mapeamento Conforme	-0.603277068555542	-0.712458827813976
	Integral de fronteira	-0.590585178082370	-0.708997599063157
	Erro relativo	0.021	0.0049
Profundidade do ponto de estagnação abaixo do cavado	Mapeamento Conforme	-0.996378723235583	-0.886946856275271
	Integral de fronteira	-0.960510064907067	-0.881563586098411
	Erro relativo	0.036	0.0061

Tabela 4.1: Para testar a precisão do algortimo 3.54 (formulação integral de fronteira) a profundidade dos pontos de estagnação foi capturada pelo algoritmo 3.42 (mapeamento conforme) e pelo algortimo 3.54. Fixada a vorticidade do fluxo em $\gamma = 5$ foram colocadas na superfície livre ondas com inclinação $\varepsilon = 0.09$ e $\varepsilon = 0.04$. Na tabela, o campo "Erro relativo"refere-se ao erro relativo da profundidade dada pela formulação integral de fronteira em relação a gerada pelo mapeamento conforme.

Portanto mediante as dificuldades expostas acima, para calcular as trajetórias das partículas no referencial de laboratório, utilizamos o algortimo 3.54 restrito a ondas com o parâmetro $\varepsilon = H/\lambda$ pequeno.

Mostramos na figura 4.15 as linhas de corrente e suas respectivas trajetórias induzidas pela propagação da onda com $\varepsilon = 0.04$ no fluxo com vorticidade $\gamma = 5$. Os

pontos pretos e brancos nos gráficos sinalizam, respectivamente, a posição inicial e final das partículas; e os quadrados pretos mostram a localização dos pontos de estagnação. A EDO das trajetórias (3.51) foi resolvida até o tempo 3τ, onde $\tau = 4.2748$ é o período da onda. Diversos padrões de trajetória foram encontrados. Por exemplo, órbitas onduladas para a direita e para a esquerda, órbitas periódicas, bem como linhas retas que correspondem aos pontos de estagnação. Observe a precisão das trajetórias referentes aos pontos de estagnação, não possuem nenhuma ondulação. Além disso, visto que o sistema das trajetórias foi resolvido até o tempo 3τ, no tempo final cada ponto de estagnação percorreu 3 vezes o comprimento de onda.

Observação 4.2.1. *Ratificando, o algoritmo 3.42 para encontrar pontos de estagnação é bem preciso, pois consiste de encontrar o zero da velocidade horizontal para a qual temos uma fórmula. A precisão deste algoritmo pode ser verificada através dos gráficos do retrato de fase nas Figuras 4.10, 4.11 e 4.14. Nestas figuras as linhas de corrente (curvas de nível de $\psi(X, Y)$) foram construídas seguindo o algoritmo 3.46 com o auxílio da função contour*[1] *do Matlab. Observe nestas figuras que os pontos de centro e de sela (os quais foram calculados através do algoritmo 3.42) estão perfeitamente localizados nos retratos de fase, ou seja, a aproximação da localização dos pontos de estagnação dada geometricamente pela função contour do Matlab está em conformidade com a localização dada pelo o algoritmo 3.42.*

Já a formulação integral de fronteira (algoritmo 3.54) pode não ser muito precisa no cálculo da localização dos pontos de estagnação, nos casos de ondas de superfície com o parâmetro ε grande. Isto ocorre porque este algoritmo precisa calcular uma integral ao longo da superfície livre a qual os pontos da discretização não são igualmente espaçados. Como destacamos na seção 4.2.2, a não uniformidade no espaçamento dos pontos da superfície livre é uma consequência já conhecida ao tentar-se contruir ondas para o parâmetro ε máximo via mapeamento conforme. Contudo para ondas com o parâmetro ε moderado o espaçamento entre os pontos da discretização da superfície livre fica mais uniforme (veja figura 4.7), consequentemente a formulação integral de fronteira torna-se precisa no cálculo do ponto de estagnação, isto é mostrado na tabela 4.1.

Em suma a localização do ponto de estagnação pode ser feita de três formas: algoritmo 3.42, geometricamente através das curvas de nível e através do algoritmo 3.54. Contudo, o método mais eficaz é o algoritmo 3.42. Ele não tem nenhuma restrição para aplicação, é preciso e está em comum acordo com o algoritmo 3.54 para ondas com ε moderado.

[1] A função contour desenha as cuvas de nível de uma função dada.

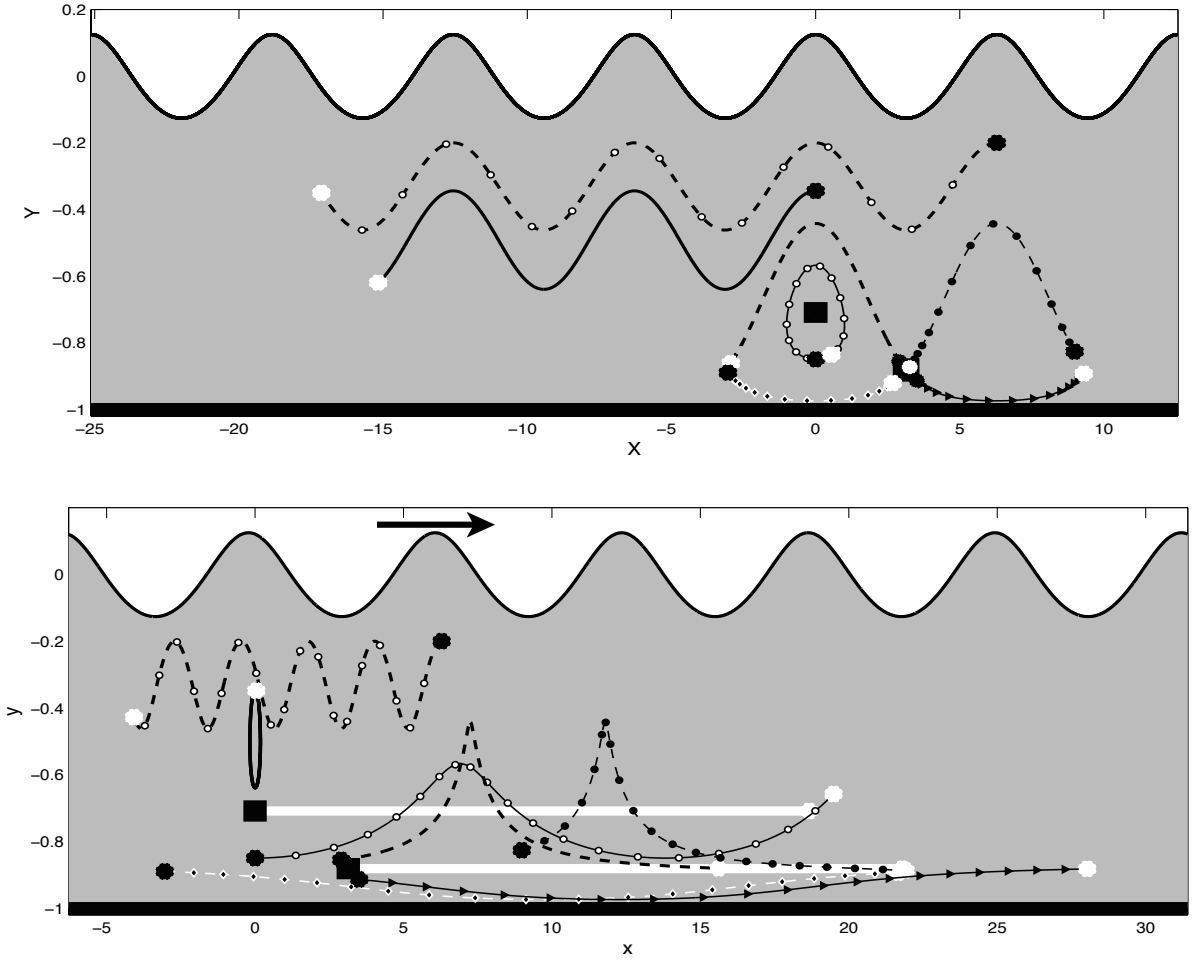

Figura 4.15: **Trajetórias das partículas nos referenciais móvel e físico**. No primeiro gráfico são mostradas as linhas de corrente (trajetórias no referencial móvel) e no segundo suas respectivas trajetórias no referencial de laboratório. Os pontos pretos e brancos nos gráficos sinalizam a posição inicial e final das partículas. Os quadrados pretos mostram a localização dos ponto de estagnação. As retas brancas no gráfico das trajetórias são as órbitas referentes aos pontos de estagnação. Parâmetros que foram utilizados: $\varepsilon = 0.04$ e $\gamma = 5$.

4.2.5 A energia do sistema

Para experimentos laboratoriais é relevante mensurar separadamente qual é a parcela de contribuição da onda de superfície livre e da correnteza ao fluxo do sistema. Uma grandeza física adequada para isto é a energia.

A energia da correnteza é a energia referente ao fluxo cisalhante trivial (E_l). Ela é calculada para a superfície livre em repouso. Sua fórmula é dada na equação (3.33).

Por energia do sistema (E) entenda a energia do fluido proveniente da associação da onda de superfície livre com a correnteza que varia verticalmente. A energia do sistema

é a soma da energia cinética (E_c) e potencial (E_p), cujas fórmulas são conhecidas das equações (3.32) e (3.31). Logo

$$E := E_c + E_p.$$

A energia da onda é obtida retirando-se a contribuição da correnteza; a energia do sistema, portanto é definida por

$$E_{onda} := E - E_l.$$

Fixado os valores de vorticidade $\gamma = 1, 0$ e -1 calculamos para ondas com diferentes inclinações (ε) a energia do sistema (E) e a proporção da energia da onda em relação a energia do sistema (E_{onda}/E). Os resultados são mostrados nos gráficos da figura 4.16. Para ondas sem vorticidade, é óbvio que a razão E_{onda}/E deve ser 1 para todo ε, pois se não há vorticidade não existe correnteza. Por conseguinte a energia do sistema deve ser a energia da onda. Já na presença de vorticidade, os valores $\gamma = 1$ e $\gamma = -1$ são suficientes para induzirem fluxos onde a vorticidade é a grandeza dominante do sistema. Para ondas com ε menor que 0.04 a energia da onda corresponde a menos de 20% da energia total do sistema.

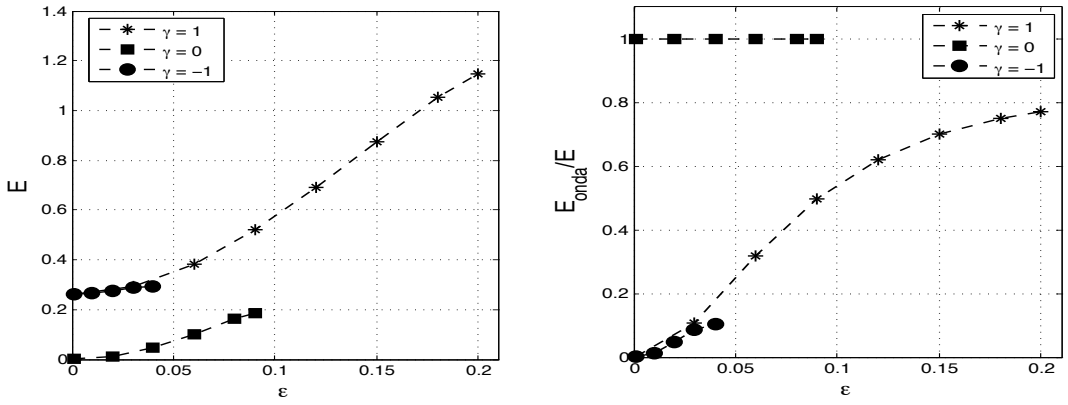

Figura 4.16: À esquerda, gráfico da energia do fluxo E em função de ε, nos fluxos com vorticidade igual a $1, 0$ e -1. À direita, gráfico da razão entre a energia exclusiva da onda ($E_{\text{onda}} := E - E_l$) e a energia do fluxo($E$) em função de ε.

Outra simulação realizada foi analisar a energia em função da vorticidade para ε fixo. O valor escolhido para ε foi 0.09, o mesmo utilizado para analisar a vorticidade como mecanismo criador de pontos de estagnação e para analisar a influência da vorticidade na pressão no interior do fluido. Os resultados são mostrados na figura 4.17. Para valores de vorticidade maior que 3 a energia da onda equivale a menos de 25% da energia do sistema.

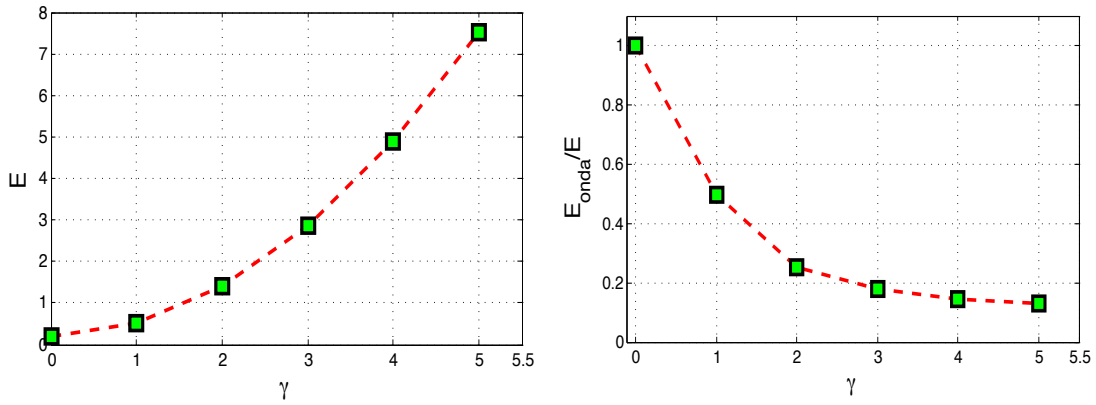

Figura 4.17: À esquerda, gráfico da energia do fluxo E em função da intensidade da vorticidade ε, para ondas de superfície com $\varepsilon = 0.09$. À direita, gráfico da razão entre a energia da onda e a energia do fluxo (E_{onda}/E) em função de γ.

4.3 Simulações para diferentes regimes de onda

Conforme visto em (3.38), a EDO das trajetórias das partículas em fluxos com vorticidade constante, γ, escrita no referencial móvel é dada por

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = \tilde{\phi}_X - \gamma(Y+b) - c, \\ \dfrac{dY}{dt} = \tilde{\phi}_Y, \\ (X(0), Y(0)) = (X_0, Y_0), \end{cases} \tag{4.9}$$

onde

$$(X_0, Y_0) \in \{(X,Y) \in \mathbb{R} : -\lambda/2 \leq X \leq \lambda/2 \text{ e } -1 \leq Y \leq \eta(X)\}.$$

Na seção anterior este sistema foi discutido para ondas com comprimento $\lambda = 2\pi$. Nesta seção abordaremos este sistema em diferentes regimes de onda. Para este propósito são introduzidos dois novos parâmetros:

$$\alpha = \frac{H}{2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Visto que nas variáveis adimensionais o fundo do canal está em $y = -1$ (veja (3.16)), os parâmetros α e β caracterizam respectivamente, a não linearidade da onda e a dispersividade do sistema.

Como mostraremos nesta seção, aumentar ou diminuir o comprimento de onda é uma boa maneira de fazer o ponto de estagnação se aproximar da superfície livre. Além disso, para ondas lineares é possível responder perguntas como: qual condição deve-se impor sobre γ para haver pontos de estagnação? Em quais regiões do fluido pode haver pontos de estagnação? Pontos de estagnação surgem próximos à superfície livre?

Sob a hipótese de que a onda de superfície livre é linear, o sistema (4.9) pode ser aproximado por

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} \approx -\gamma(Y+b) - c, \\ \dfrac{dY}{dt} \approx 0, \\ (X(0), Y(0)) = (X_0, Y_0). \end{cases} \tag{4.10}$$

Suponhamos que exista um ponto de estagnação localizado no ponto (X^*, Y^*). Isto significa que:

$$-\gamma(Y^*+b) - c = 0 \Rightarrow \operatorname{sign}(-\gamma(Y^*+b)) = \operatorname{sign}(c). \tag{4.11}$$

Desta igualdade conclui-se que um ponto de estagnação, quando existe, está localizado na região do fluido onde a correnteza é propagada na mesma direção que a onda.

Utilizando a aproximação para a velocidade da onda proposta por Ehrnstrom e Villari (veja equação (4.7)) é possível ir mais além e exibir uma aproximação para Y^*. De fato, a aproximação da velocidade de Ehrnström e Villari foi escrita em (4.7) para $b = 0.5$. Para um b genérico, ela passa a ser

$$c = -b\gamma + \frac{1}{2k}\left(\gamma \tanh(k) \pm \sqrt{4k\tanh(k) + \gamma^2 \tanh^2(k)}\right).$$

De posse desta fórmula para a velocidade e de (4.11), segue que

$$Y^* = -\frac{\tanh(k)}{2k} \mp \sqrt{\frac{\tanh(k)}{k\gamma^2} + \left(\frac{\tanh(k)}{2k}\right)^2}.$$

Procurando apenas por pontos de estagnação no domínio físico (no fluido) impõe-se que $Y^* \in [-1, 0]$. Esta condição é válida se, somente se,

$$\begin{aligned} Y^* &= -\frac{\tanh(k)}{2k} - \sqrt{\frac{\tanh(k)}{k\gamma^2} + \left(\frac{\tanh(k)}{2k}\right)^2}, \\ |\gamma| &\geq \sqrt{\frac{\tanh(k)}{k - \tanh(k)}}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Observação 4.3.1. *No cálculo da curva de bifurcação no espaço dos parâmetros (γ, ε) na figura 4.12, mostrou-se que para $\gamma \geq \gamma_c = 1.774988198280334$ surgem pontos de estagnação independente do valor de ε. A condição para a existência de pontos de estagnação obtida para ondas lineares (4.12) aplicada a ondas de comprimento 2π implica que para*

$$|\gamma| \geq \sqrt{\frac{\tanh(1)}{1 - \tanh(1)}} \approx 1.7873$$

existem pontos de estagnação.

Logo pode-se concluir que a condição de existência (4.12) obtida para ondas lineares aparenta ser válida para ondas não lineares.

Das equações acima conclui-se que:

(i) Fixado k, não importa o quanto aumente γ, se existir um ponto de estagnação então sua profundidade satisfaz

$$Y^* \leq -\frac{\tanh(k)}{k}.$$

(ii) Fixado γ, se $\lambda \to \infty$ (regime de ondas longas) então

$$Y^* = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{4}} \leq -1.$$

Isto significa que, sob a luz da teoria linear no regime de ondas longas, caso exista, o ponto de estagnação estará no fundo.

Se $\lambda \to 0$ (regime de águas produndas) então

$$Y^* = 0.$$

As observações acima, mesmo sendo válidas apenas para a teoria linear dão intuição para como proceder em ondas não lineares para aproximar os pontos de estagnação da onda de superfície. Note também que a aproximação para Y^* não depende do valor de b. Estas ideias foram colocadas em prática para ondas não lineares e simulações foram realizadas com o propósito de testá-las.

Fixados os valores $\alpha = 0.2$ e $\gamma = 10$, foram realizados experimentos para encontrar o retrato de fase de ondas com comprimento 0.6, 1, 2, 6, 20 e 50, que correspondem respectivamente aos valores de $\beta = 2.8$, 1, 2.5×10^{-1}, 2.8×10^{-2}, 2.5×10^{-3} e 4×10^{-4}. Os resultados obtidos são exibidos na figura 4.18. Os pontos pretos no gráfico marcam a localização dos pontos de estagnação. No regime de ondas curtas, ou águas profundas, os pontos de estagnação estão mais próximos da onda de superfície, a qual é bastante arrendondada. Os perfis para $\beta = 2.8$ e 1 são semelhantes aos obtidos por Vanden-Broeck ([56], p. 214). A proximidade do ponto de estagnação com a superfície livre pode ser a responsável pela aparência de tais perfis. À medida que a onda vai passando ao regime de ondas longas, os pontos de estagnação ficam mais ao fundo. Porém diferentemente do que predizem as aproximações para ondas lineares, há um ponto de estagnação dentro do fluido.

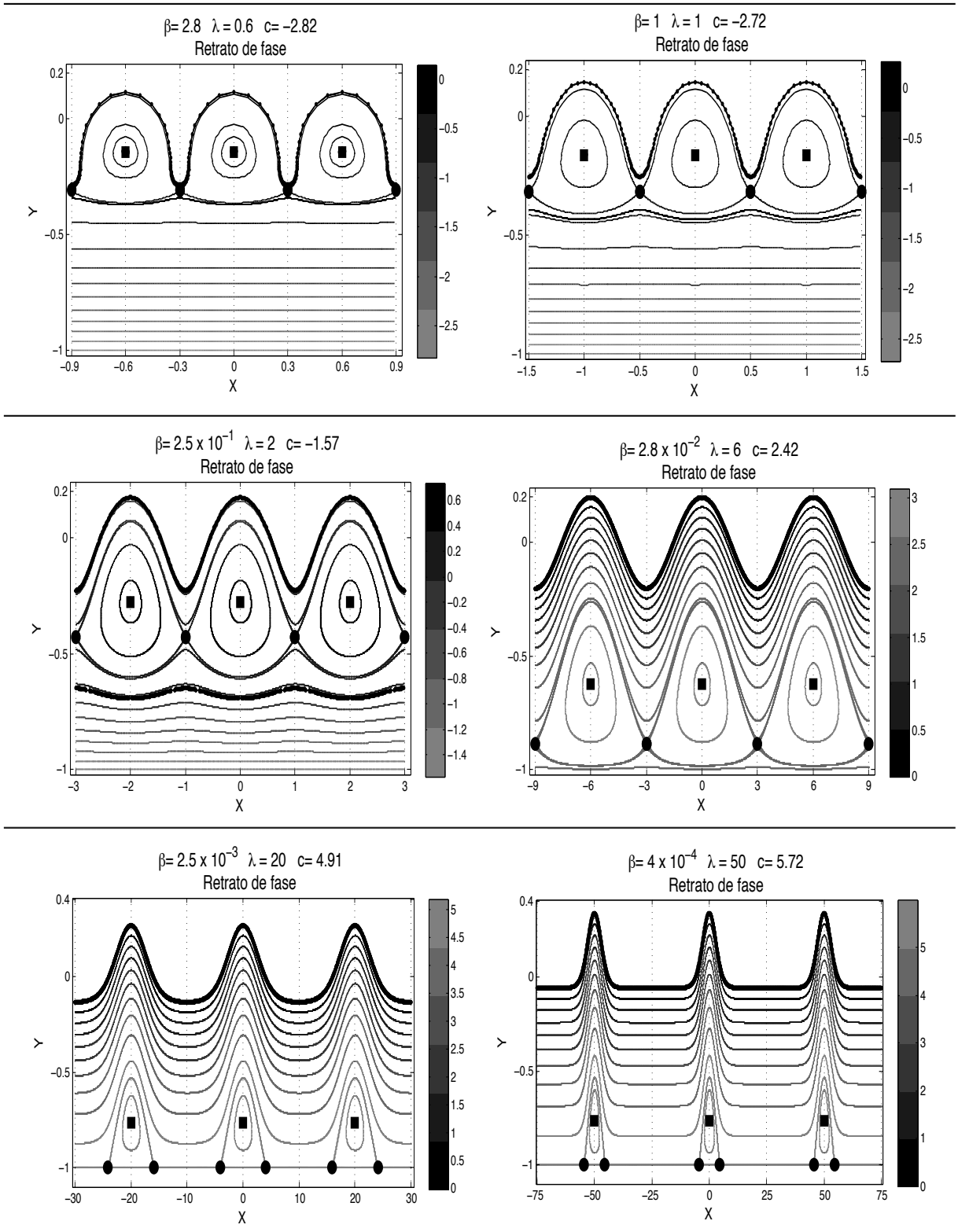

Figura 4.18: **Retrato de fase para diferentes regime de ondas.** Os pontos pretos marcam a localização dos pontos de estagnação e a curva preta mais grossa é a curva $\psi(X, Y) = 0$. Em todas estas simulações foram utilizados os parâmetros $\alpha = 0.2$ e $\gamma = 10$.

Conclusões

Neste trabalho foi realizada uma análise quantitativa dos efeitos provocados no interior do fluido devidos à passagem de uma onda não linear periódica viajante na superfície livre nas seguintes situações:

(1) Onda de superfície livre interagindo com uma correnteza uniforme;

(2) Onda de superfície livre interagindo com uma correnteza que varia linearmente com a profundidade, ou seja, com vorticidade constante.

Para o caso **(1)** foi apresentada uma formulação integral de fronteira adequada para capturar com precisão trajetórias de partículas. Esta formulação integral de fronteira permitiu calcular o campo de vetores da EDO das trajetórias das partículas sem recorrer a expansões em séries de potências. A precisão das trajetórias foi verificada com aproximações bastante conhecidas, tais como a de Fenton [25] para ondas fracamente não lineares. As simulações foram depois realizadas para regimes onde as ondas são mais íngremes. A partir dessas simulações, encontramos os resultados a seguir. Órbitas fechadas foram capturadas na presença de uma correnteza adversa uniforme, bem como trajetórias não suaves que nunca foram relatadas em outros trabalhos. Estas órbitas podem ocorrer para correntezas adversas ou favoráveis. Também estudamos como a relação entre o formato das órbitas e o *drift* varia em função da posição inicial das partículas, da altura da onda e da intensidade da correnteza uniforme.

Pela primeira vez na literatura os efeitos da vorticidade constante no interior do fluido foram analisados de forma precisa. Encontramos com exatidão a localização dos pontos de estagnação. Mostramos que no surgimento dos pontos de estagnação ocorre uma bifurcação do tipo sela-centro na EDO das trajetórias no referencial da onda de acordo com variações de γ e de ε. Diferente da teoria clássica de bifurcação ([28], p.427), na bifurcação sela-centro que encontramos existem dois pontos de sela simétricos e um de centro que se aproximam, colidem e desaparecem. Para ilustrar várias questões desta dinâmica, foi apresentada uma curva de bifurcação no espaço dos parâmetros (γ, ε). Mostramos também que o máximo da pressão está localizado em dois pontos simétricos em relação à crista da onda no fundo do canal, mais precisamente, abaixo dos pontos de sela.

Outro resultado importante obtido nesta tese foi capturar numericamente trajetórias de partículas no referencial de laboratório para fluxos com vorticidade constante. Diversos padrões de trajetória foram encontrados. Por exemplo, órbitas onduladas para a direita e para a esquerda, órbitas periódicas, bem como linhas retas que correspondem aos pontos de estagnação.

A ideia principal para tratar computacionalmente dos fluxos com vorticidade constante foi reformular as equações governantes do sistema, baseando-se em uma aplicação conforme do domínio físico em uma faixa com coordenadas horizontal e vertical dadas por ξ, ζ respectivamente. Através desta aplicação conforme, a onda de superfície livre é mapeada na superfície $\zeta = 0$, sendo este procedimento utilizado por [6, 40].

Do ponto de vista qualitativo, os resultados que encontramos para fluxos com vorticidade constante são de grande relevância, pois este tema é ainda recente e possui pouca teoria disponível. Do ponto de vista quantitativo, nossos resultados sobre o efeito da vorticidade constante no interior do fluido generalizam todos trabalhos anteriores relacionados a este tema [23, 61, 50, 59, 34].

De modo geral os resultados desta tese poderão servir de embasamento para futuros trabalhos qualitativos ou quantitativos relacionados ao tema de trajetória de partículas.

Referências

[1] AMICK, C.J.; FRAENKEL, L., E.; TOLAND, J.F. On the Stokes conjecture for the wave of extreme form. Acta Math, **148**, p.193-214,1982.

[2] AMICK, C.J.; TOLAND, J.F. On periodic water-waves and their convergence to solitary waves in the long-wave limit. *Philos. Trans. R. Soc. Lon.*, Ser. A, v. **303**, p. 633-669,1981.

[3] BERTSEKSAS, D.P. *Nonlinear Programming.* 2 ed. Massachusetts: Athena Scientific, Belmont, 1999.

[4] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.* 8 ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2005.

[5] CHANG, H.-K.; CHEN, Y.-Y.; LIOU, J.-C. Particle trajectories of nonlinear gravity waves in deep water. *Ocean Engineering*, **36**, 324-329, 2009.

[6] CHOI, W. Nonlinear surface waves interacting with a linear shear current. *Math. Comput. Simulat.*, v. **80**, p. 29-36, 2009.

[7] CHORIN, A.; MARSDEN, J. E. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics* New York: Springer-Verlag, 2000.

[8] CONSTANTIN, A. *Nonlinear Water Waves with Applications to Wave-Current Interactions and Tsunamis.* Philadelphia: SIAM, 2011.

[9] CONSTANTIN, A. The trajectories of particles in Stokes waves, *Invent. Math.*, **166**, p. 523-535, 2006.

[10] CONSTANTIN, A.; EHRNSTRÖM, M.; WAHLÉN, E. Symmetry for steady gravity water waves with vorticity. *Duke Math. J.*, v. **140** , p. 591–603 , 2007.

[11] CONSTANTIN, A.; ESCHER, J. Analyticity of periodic traveling free surface water waves with vorticity. *Ann.Math.* , v. **173**, n.2, p. 559–568, 2011.

[12] CONSTANTIN, A., ESCHER, J. Symmetry of steady deep-water waves with vorticity. *Eur. J. Appl. Math.*, **15**, p. 755–768, 2004.

[13] CONSTANTIN, A.; ESCHER, J. Symmetry of steady periodic surface water waves with vorticity. *J. Fluid Mech.* , **498**, p. 171–181, 2004.

[14] CONSTANTIN, A.; STRAUSS, W. Exact Steady Periodic Water Waves with Vorticity. *Communications on Pure and Applied Mathmatics*, v. **LVII**, p. 481-527, 2004.

[15] CONSTANTIN, A.; STRAUSS, W. Periodic Traveling Gravity Water Waves with Discontinuous Vorticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, v. **202**, p. 133-175, 2011.

[16] CONSTANTIN, A.; STRAUSS, W. Pressure beneath a Stokes wave. *Comm. Pure Appl. Math.*, v. **63** , p. 533-557, 2010.

[17] CONSTANTIN, A.; STRAUSS, W. Rotational steady water waves near stagnation *Phil. Trans. R. Soc. A*, v. **365**, p. 2227-2239, 2007.

[18] CONSTANTIN, A.; VARVARUCA, E. Steady Periodic Water Waves with Constant Vorticity: Regularity and Local Bifurcation. *Arch. Rational Mech. Anal.*, v. **199**, p. 33-67, 2011.

[19] CONSTANTIN, A.; VILLARI, G. Particle trajectories in linear water waves. *J. Math. Fluid Mech.*, v. **10**, p. 1336-1344, 2008.

[20] DECONINCK, B.; OLIVERAS, K. The instability of periodic surface gravity waves. *J. Fluid Mech.*, v. **675**, p. 141-167, 2011.

[21] DINGEMANS, M. W. *Water waves propagation over uneven bottoms.* Singapore: World Scientific, 1997.

[22] EHRNSTROÖM, M.; ESHER, J.; VILLARI, G. Steady water waves with multiple critical layers: interior dynamics *J. Math. Fluid Mech.* , v. **14**, p. 407-419, 2012.

[23] EHRNSTRÖM, M.; VILLARI, G. Linear water waves with vorticity: rotational features and particle paths *J. Differ. Equ.*, v. **244**, p. 1888-1909, 2008.

[24] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations.* 2nd. ed. Rhode Island: American Mathematical Society, 2010.

[25] FENTON, J. D. A fifth-order Stokes theory for steady waves. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, v. **111** , p. 216-234, 1985.

[26] FENTON, J. D. Nonlinear Wave Theories. *The sea: ocean engineering science*, v. **9**, p. 1-18, 1990.

[27] GUIDOTTI , P. A new first-kind boundary integral formulation for the Dirichlet-to-Neumman map in 2D. *J. Comput. Phy.*, v. **190** , p. 325-345, 2008.

[28] HALE, J. K.; KOÇAK, H. *Dynamics and Bifurcations.* New York: Springer-Verlag, 1991. Texts in Applied Mathematics, **3**.

[29] HUR, V. M. Symmetry of steady periodic water waves with vorticity. *Phil. Trans. R. Soc. A*, v. **365**, p. 2203-2214.

[30] ISOBE, M.; NISHIMURA, H.; HORIKAWA, K. Expressions of pertubation solutions for conservative waves by using wave height. *Proceedings* of 33rd annual conference of JSCE 1978, 760-761.

[31] JOHN, F. *Partial Differential Equations.* 4th. ed. New York: Springer-Verlag, 1982.

[32] KEADY, G.; NORBURY, J. On the existence theory for irrotational water waves. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, v. **83**, p. 137-157, 1978.

[33] KO, J.; STRAUSS, W. Effect of vorticity on steady water waves. *J. Fluid Mech.*, v. **608**, p. 197-215, 2008.

[34] KO, J.; STRAUSS, W. Large-amplitude steady rotational water waves. *Eur. J. Mech./B Fluids*, v. **27**, p. 96-109, 2008.

[35] LAMB, H. *Hydrodynamics.* Cambridge: Univ. Press, 1895.

[36] LEVI-CIVITA, T. What are waves? *Rice Inst. Pamphlet*, v. **25**, p. 168-205, 1938.

[37] LEWY, H. A note on harmonic functions and a hydrodynamical application. *Proc. Am. Math. Soc.*, v. **3** , p. 111–113, 1952.

[38] LONGUET-HIGGINS, M. S. Eulerian and Lagrangian aspects of surface waves. *J. Fluid Mech.*, **173**, p. 683-707, 1986.

[39] LONGUET-HIGGINS, M. S. The trajectories of particles in steep, symmetric gravity waves. *J. Fluid Mech.*, **94**, p. 497-517, 1979.

[40] MILEWSKI, P. A.; VANDEN-BROECK, J.-M.; WANG, Z. Dynamics of steep two-dimensional gravity-capillary solitary waves. *J. Fluid Mech.*, v. **664**, p. 466-477, 2010.

[41] PEREGRINE, D. H. Surface shear waves. *J. Hydraulic. Div. ASCE*, v. **100**, p. 1215-1217, 1974. (Mais detalhes em v. **101**, p. 1032-1034, 1975.)

[42] PLOTNIKOV, P. I. Proof of the Stokes conjecture in the theory of surface waves. *Dinamika Sploshn. Sredy*, v. **57**, p. 41—76, 1982 (Em Russo); Tradução para Inglês: *Stud. Appl. Math.* , v. **108** , p. 217–244, 2002.

[43] OKAMOTO, H.; SH$\bar{O}$JI. M. Trajectories of fluid particles in a periodic water wave. *Phil. Trans. R. Soc. A*, v. **370**, p. 1661-1676, 2012.

[44] OKAMOTO, H.; SH$\bar{O}$JI. M. *The Mathematical Theory of Permanent Progressive Water-waves.* Singapura: World Scientific, 2001.

[45] SKJELBREIA, L.; HENDRINCK, J. Fifth order gravity wave theory. In: 7th CONFERENCE ON COASTAL ENGINEERING, 1960, The Hague, The Netherlands. Proceedings Council on Wave Research, 1960, p. 184-196

[46] RUELLAN, F.; WALLET, A. Trajectoires internes das un clapotis partiel. *La Houille Blanche*, v. **5**, p. 483-489, 1950.

[47] STOER, J.; BULIRSCH, R. *Introduction to Numerical Analysis.* 2. ed. New York: Springer-Verlag, 1991.

[48] STOKER, J. J. *Water waves. The Mathematical Theory with Applications.* New York: Intersciene Publ. Inc., 1957.

[49] STOKES, G. G. On the theory of oscillatory waves. *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, v. **8**, p. 441-455, 1847.

[50] TELES DA SILVA, A.F.; PEREGRINE, D.H. Steep, steady surface waves on water of finite depth with constant vorticity. *Journal of Fluid Mechanics*, v. **195** , p. 281-302, 1988.

[51] TOLAND, J.F. On the symmetry theory for Stokes waves of finite and infinite depth. In: Trends in applications of math-ematics to mechanics (Nice, 1998). Chapman & Hall/CRC Monogr. In: Surv. Pure Appl. Math., vol. 106, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, pp. 207–217, 2000.

[52] TOLAND, J.F. Stokes Waves. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, v. **7**, p. 1-48,1996.

[53] TREFETHEN, L.N. *Spectral Methods in MATLAB* Philadelphia: SIAM, 2001.

[54] UMEYAMA, M. Eurelian-Lagrangian analysis for particle velocities and trajectories in a pure wave motion using particle image velocimetry. *Phil. Trans. R. Soc. A*, v. **370**, p. 1687-1702, 2012.

[55] URSELL, F. Mass transport in gravity waves. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, v. **40** , p. 145-150, 1953.

[56] VANDEN-BROECK, J.-M. Periodic waves with constant vorticity in water of infinite depth. *IMA J. Appl. Math.*, v. **56**, p. 207-217, 1996.

[57] VANDEN-BROECK, J.-M. Steep solitary waves in water of finite depth with constant vorticity. *J. Fluid. Mech.* , v. **274**, p. 339-348, 1994.

[58] VARVARUCA, E. On the existence of extreme waves and the Stokes conjecture with vorticity. *J. Fluid Mech.*, v. **246**, p. 4043-4076, 2009.

[59] VASAN, V.; OLIVERAS, K. Pressure beneath a traveling wave with vorticity constant. *DSDC-A* , v. **34**, n. 8, p. 3219-3239, 2014.

[60] YIH, C.-S. The role of drift mass in the kinetic energy and momentum of periodic water waves. *J. Fluid Mech.*, v. **331**, p. 429-438, 1997.

[61] WAHLÉN, E. Steady water waves with a critical layer. *J. Differ. Equ.*, v. **246**, p. 2468-2483, 2009.

[62] WHITHAM, G.B. *Linear and Nonlinear Waves.* New York: Wiley, 1974.

Apêndices

Apêndice A

Revisão histórica do estudo de trajetórias de partículas

Nas tabelas A.1, A.3 e A.4 é apresentada uma breve revisão histórica dos estudos realizados sobre trajetórias de partículas em fluxos irrotacionais e rotacionais. Pontuamos de forma esquemática qual é a contribuição desta tese a este tema.

Artigo	**Resultados**
Stokes ([49], 1847)	Mostrou, a partir de aproximações sucessivas, que para ondas no regime de águas rasas e no regime de águas profundas, cada partícula sofre um *drift* (deslocamento residual) na direção de propagação da onda (apud [55], p. 145). Logo as órbitas das partículas não são fechadas.
Lamb ([35], 1895), Stoker ([48], 1957)	órbitas fechadas – com a forma circular para águas profundas ou com a forma elíptica para canais em profundidade finita – foram obtidas a partir de uma linearização da EDO das trajetórias das partículas, sob a hipótese de ondas de superfície lineares.
Ruellan e Wallet ([46], 1950)	Experimentos laboratoriais "confirmam"que órbitas são fechadas.
Ursell ([55], 1953)	Forneceu uma prova rigorosa para os resultados de Stokes [49]. Ursell provou que – para ondas no regime de águas profundas e no regime de águas rasas em profundidade uniforme – as partículas sofrem um drift na direção de propagação da onda.
Longuet-Higgins ([39], 1979)	Descobriu a partir de aproximações que órbitas induzidas por ondas não lineares sofrem a ação de um *drift*.
Longuet-Higgins ([38], 1986)	A partir de um experimento para traçar a trajetória de uma partícula na superfície encontrou órbitas que tinham a forma de um laço com um *drift*. Isto levantou suspeitas sobre trajetórias das partículas dentro do fluido.
Yih ([60], 1997)	Sem fazer nenhuma restrição ao regime da onda, a partir de uma análise do transporte de energia mostrou a existência de um drift.
Constantin e Villari ([19], 2008)	Mostraram que para ondas lineares, regime no qual é o conhecido o campo de velocidade do fluido, não existem existem órbitas fechadas. Além disso, descreveram geometricamente a forma das órbitas a partir de uma análise do retrato de fase da EDO das trajetórias. Eles provaram que as órbitas têm o formato de um laço.
	A TABELA CONTINUA NA PRÓXIMA PÁGINA

Tabela A.1: Revisão histórica sobre o estudo de trajétória de partículas abaixo de uma onda periódica viajante em fluxos irrotacionais.

Artigo	**Resultados**
Constantin ([9], 2006)[1]	Generalizou o trabalho [19], provou que para ondas de Stokes de pequena ou grande amplitude as órbitas sofrem um *drift* positivo. Além disso, forneceu uma descrição geométrica das trajetórias. Constantin [9] provou que todas as órbitas tem o formato de um laço. Em [19], a análise foi simplificada, pois foi realizada a partir das fórmulas explícitas do campo de velocidade, da pressão e da superfície livre conhecidas da teoria linear. Neste caso mais geral [9], nenhuma destas informações são conhecidas. Constantin conseguiu os resultados através de um estudo qualitativo do problema de valor de fronteira não linear proveniente da formulação via função de corrente.
Constantin e Strauss ([16], 2010)	Analisaram trajetórias de partículas provenientes da interação da onda de superfície livre com uma correnteza uniforme. Eles provaram analiticamente que neste caso existe a possibilidade de uma trajetória fechada, ou seja, *drift* ser nulo. Contudo sua localização e outras informações quantitativas continuavam desconhecidas. Além disso, provaram propriedades de monotocidade da pressão no interior do fluido.
Esta tese	Capturamos de forma quantitativa vários padrões das trajetórias das partículas, como por exemplo os descobertos analiticamente por Constantin e colaboradores [9, 16, 19]. Nossos resultados quantitativos são obtidos através de um modelo numérico preciso que evita expansão em série de potências. Sendo assim útil para mais regimes de ondas de Stokes, no que toca à sua amplitude. Em particular mostramos que trajetórias de partículas podem ser capturadas com grande precisão, por exemplo, no caso da órbita fechada prevista por Constantin e Strauss [16], 2010) que é capturada com muitos dígitos de precisão. Além disso, as simulações mostraram que, quando a onda interage com uma correnteza uniforme pode existir uma órbita não suave dentro do fluido. Este fato não era conhecido nos trabalhos de Constantin.

Tabela A.2: **CONTINUAÇÃO DA TABELA A.1**. Revisão histórica sobre o estudo de trajétória de partículas abaixo de uma onda períodica viajante em fluxos irrotacionais.
[1]Apesar de [19] ter sido publicado em 2008, lendo o trabalho de Constantin [9], publicado em 2006, fica evidente que [19] foi feito antes de 2006.

Artigo	**Descrição dos resultados**
Ehrnström e Villari ([23], 2008)	A partir de uma linearização das equações governantes em torno do fluxo cisalhante trivial sem onda, encontraram uma expressão para o campo de velocidades no interior do fluido. De posse do campo de velocidade mostraram que existem três pontos de estagnação por comprimento de onda no interior do fluido. Estes pontos foram classificados topologicamente em um de centro e dois de sela.
Wahlen ([61], 2009)	Construiu fluxos com vorticidade constante que são perturbações do fluxo cisalhante trivial sem onda, a partir da teoria da bifurcação. Com isto mostrou que existem três pontos de estagnação por comprimento de onda e descreveu qualitativamente suas trajetórias. Contudo neste trabalho, não foi feita nenhuma classificação topológica dos pontos de estagnação.
Ehrnström et al ([22], 2012)	Sob a hipótese que a vorticidade depende linearmente da função de corrente, linearização as equações governantes em torno do fluxo cisalhante trivial sem onda e obtiveram uma expressão para o campo de velocidades no interior do fluido. Como resultado encontraram múltiplas camadas dentro do fluido onde existem pontos de estagnação.
Esta tese	Todos os resultados acima são para ondas de amplitude infinitesimal, ou seja, ondas lineares, em torno de um estado trivial de vorticidade. Estes resultados são úteis na validação do nosso método numérico que estende com detalhes estes resultados para ondas não lineares.

Tabela A.3: **Resultados via aproximações e linearizações**. A menos que seja dito do contrário, os resultados da tabela são relacionados a ondas periódicas viajantes interagindo com uma correnteza uniforme que varia linearmente com a profundidade, em canais de profundidade finita.

Artigo	Descrição dos resultados
Teles da Silva e Peregrine ([50], 1988)	Neste trabalho os autores apresentam um método integral de fronteira para construir ondas de superfície e sem dar muitos detalhes exibem gráficos das linhas de corrente e das curvas de nível da pressão no interior do fluido. A partir do gráfico das linhas de corrente vê-se que há pelo menos um ponto de estagnação no interior do fluido, contudo a sua localização precisa não é conhecida. Além disso, o gráfico das curvas de nível da pressão indica que existem pontos no interior do fluido com pressão menor que a atmosférica. O método utilizado por Teles da Silva e Peregrine para construir as linhas de corrente e a pressão no interior do fluido não é deixado claro no trabalho, nem nas referências mencionadas no artigo.
Ko e Strauss ([34, 33], 2008)	A partir da transformação de Dubreil-Jacotin desenvolveram um método numérico para construir o perfil da superfície livre e das linhas de corrente para os casos de vorticidade constante e vorticidade mudando de sinal dentro do fluido [34] e para o caso de camadas de vorticidade no fluido [34]. Para a validade da transformação de Dubreil-Jacotin é necessário supor que a velocidade horizontal das partículas no fluido, u, é menor do que a velocidade da onda, c, o que exclui a existência de pontos de estagnação no interior. Em seus trabalhos, Ko e Strauss estudam fluxos para os quais o máximo de $u - c$ está perto de zero, ou seja, está perto de ocorrer um ponto de estagnação. Os resultados de Ko e Strauss dão indícios para existência de pontos de estagnação, mas não conseguem informar a localização dos mesmos.
	A TABELA CONTINUA NA PRÓXIMA PÁGINA

Tabela A.4: **Resultados numéricos**. A menos que seja dito do contrário, os resultados da tabela são relacionados a ondas periódicas viajantes interagindo com uma correnteza uniforme que varia linearmente com a profundidade, em canais de profundidade finita.

Artigo	Descrição dos resultados
Vasan e Oliveras ([59], 2014)	Eles escreveram as equações governantes via uma formulação não local recente [20] e construíram um método numérico preciso para traçar as linhas de corrente e encontrar a pressão no interior do fluido. A principal contribuição do trabalho de Vasan e Oliveras é deduzir uma relação entre a elevação da onda de superfície e a pressão no fundo do canal. A partir desta relação, Vasan e Oliveras mostram que para determinados valores de vorticidade o ponto de máximo da pressão no fluido, por comprimento de onda, ocorre em dois pontos no fundo do canal. Quanto ao estudo de pontos de estagnação os resultados de Vasan e Oliveras são os mesmos de Teles da Silva e Peregrine [50]. Assim como no trabalho de Teles da Silva e Peregrine [50], a metodologia utilizada por Vasan e Oliveras para encontrar pontos de estagnação foi observar os gráficos das linhas de corrente ([59], p. 3235). Desta forma, a depender do caso, é possível identificar a existência de um ponto de estagnação, porém não se consegue encontrar com precisão sua localização. Traçar as linhas de corrente não é o método adequado para encontrar com precisão pontos de estagnação. Deste modo é possível identificar apenas pontos de centro que estejam suficientemente longe do fundo, pois neste caso as linhas de corrente fechadas podem ser notadas. Apenas traçando as linhas de corrente, pontos de estagnação que possam ocorrer perto do fundo ficam despercebidos. Sem conhecer a localização precisa dos pontos de estagnação é impossível fazer um estudo rigoroso dos mecanismo responsáveis pelo surgimento dos mesmos. Mais ainda, é impossível fazer um estudo detalhado da influência destes pontos em outras características do fluxo, como por exemplo o efeito da presença deles na localização dos pontos de máximo da pressão. Por isto Vasan e Oliveras ao analisar a correlação existente entre a presença de pontos de estagnação e a localização dos pontos de máximo da pressão restringem-se a fluxos nos quais as ondas de superfície possuem amplitudes arbitrariamente pequena, pois neste regime é conhecida uma condição para o surgimento de pontos de estagnação.
	A TABELA CONTINUA NA PRÓXIMA PÁGINA

Tabela A.5: **CONTINUAÇÃO DA TABELA A.4: Resultados numéricos**. A menos que seja dito do contrário, os resultados da tabela são relacionados a ondas periódicas viajantes interagindo com uma correnteza uniforme que varia linearmente com a profundidade, em canais de profundidade finita.

Artigo	Descrição dos resultados
Esta tese	Não existe nenhum trabalho teórico ou numérico capaz de encontrar com precisão a localização dos pontos de estagnação ou traçar as trajetórias das partículas no referencial fixo. Mostraremos nesta tese um método numérico capaz de **descobrir com precisão a localização dos pontos de estagnação**. Através deste método analisamos como os pontos de estagnação surgem ou desaparecem no interior do fluido em função de variações da vorticidade e da onda de superfície livre. Pela definição de pontos de estagnação, é fácil perceber que, matematicamente, eles são os pontos de equilíbrio da EDO das trajetórias no referencial da onda. É feito um estudo inédito sobre a bifurcação sofrida pela EDO das trajetórias no referencial da onda, tendo como parâmetros do sistema a vorticidade e a onda de superfície. Apresentamos, de forma inédita na literatura, um método numérico para **capturar com precisão órbitas das partículas no referencial fixo** geradas por uma onda periódica viajante não linear em fluxos com vorticidade constante. Neste trabalho também é apresentado um método para encontrar a **pressão no interior do fluido**. Isto, somado à capacidade de encontrar pontos de estagnação com precisão, permite que, pela primeira vez na literatura, seja estudado como a presença de pontos de estagnação afetam os pontos de máximo da pressão em fluxos com vorticidade constante, nos quais as ondas de superfície não lineares. Cabe ressaltar, que os métodos numéricos que propomos neste trabalho são válidos inclusive para perfis de ondas de superfície que não são gráficos de uma função.

Tabela A.6: **CONTINUAÇÃO DA TABELA A.4: Resultados numéricos**. A menos que seja dito do contrário, os resultados da tabela são relacionados a ondas periódicas viajantes interagindo com uma correnteza uniforme que varia linearmente com a profundidade, em canais de profundidade finita.

Apêndice B

O efeito de uma correnteza uniforme no fluxo

A velocidade da onda relativa a um observador na praia depende da correnteza uniforme. As ondas propagam-se mais rapidamente com uma correnteza uniforme a favor do que com uma correnteza uniforme contrária.

Os principais efeitos que uma correnteza uniforme provoca são mudança no período da onda de superfície livre aparentemente medido por um observador e um efeito aditivo na velocidade horizontal do fluido. Este efeito aditivo faz com que, para determinar esta velocidade, seja necessário conhecer a correnteza. Se a correnteza não é conhecida, então o problema não está completamente descrito [26].

Para um melhor entendimento, o sistema de coordenadas é mudado para o referencial móvel. O referencial fixo é (x, y). Neste sistema de coordenadas a onda propaga-se na direção x com velocidade c. Fazendo a mudanças de coordenadas

$$X = x - ct \qquad Y = y, \tag{B.1}$$

denotaremos a velocidade do fluido no referencial (x, y) por (u, v), e no referencial (X, Y) por (U, V).

No referencial (X, Y) o movimento do fluido consiste de um fluxo na direção negativa de X, e o perfil da onda é estacionário. A velocidade média horizontal por comprimento de onda neste referencial, para um valor constante de Y é definida por

$$-\bar{U} := \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda U(X, Y)\, dX.$$

A média é negativa porque o fluxo é na direção $-X$. De (B.1) segue que

$$-\bar{U} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda u(X, Y)\, dX - c. \tag{B.2}$$

Definindo

$$\kappa := \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} u(X,Y)\,dX, \tag{B.3}$$

segue imediatamente de (B.2) que

$$c = \bar{U} + \kappa. \tag{B.4}$$

Observe que a grandeza κ definida em (B.3) é independente de Y. Com efeito, seja Y_0 uma profundidade abaixo do nível do cavado. Pelo Teorema de Gauss-Green ([24], p. 627) e pela irrotacionalidade do fluxo segue que

$$0 = \int_{-d}^{Y_0}\int_0^{\lambda}(u_Y - v_X)dX\,dY = \int_0^{\lambda} u(X,Y_0)dX - \int_0^{\lambda} u(X,-d)dX.$$

Portanto κ representa a intensidade da correnteza uniforme. Se $\kappa = 0$ então por (B.4) a velocidade da onda é $c = \bar{U}$. Esta é a primeira aproximação de Stokes para a velocidade da onda.

Tomando a aproximação de Stokes como definição para a velocidade da onda vê-se de (B.4) que a presença de uma correnteza uniforme afeta a onda de superfície livre causando um efeito aditivo na sua velocidade de propagação.

Apêndice C

Equações do mapeamento conforme

C.1 Solução da equação de Laplace para $Y(\xi, \zeta)$

Considere o problema de encontrar $Y(\xi, \zeta)$ λ-periódica na variável ξ satisfazendo:

$$(P1) := \begin{cases} \Delta Y = 0 \qquad \text{em} \qquad -D < \zeta < 0, \\ Y(\xi, 0) = \mathbf{Y}(\xi), \\ Y(\xi, -D) = -1. \end{cases}$$

Passando a transformada Fourier em ξ este problema é equivalente à família $(P1_k)_{k\in\mathbb{R}}$ de equações diferenciais ordinárias (EDO) definida por

$$(P1_k) := \begin{cases} \hat{Y}_{\zeta\zeta}(k, \zeta) - k^2 \hat{Y}(k, \zeta) = 0 \qquad \text{em} \qquad -D < \zeta < 0, \\ \hat{Y}(k, 0) = \hat{\mathbf{Y}}(k), \\ \hat{Y}(k, -D) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq 0, \\ -1 & \text{se } k = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Fixe k. A solução de $(P1_k)$ pode ser encontrada dividindo o problema em outros dois auxiliares mais simples.

Com efeito, defina

$$\hat{Y}(k, \zeta) := \hat{g}(k, \zeta) + \hat{h}(k, \zeta), \tag{C.1}$$

onde $\hat{g}(k, \zeta)$ e $\hat{h}(k, \zeta)$ satisfazem:

$$(Q1_k) := \begin{cases} \hat{g}_{\zeta\zeta}(k, \zeta) - k^2 \hat{g}(k, \zeta) = 0 \qquad \text{em} \qquad -D < \zeta < 0, \\ \hat{g}(k, 0) = \hat{\mathbf{Y}}(k), \\ \hat{g}(k, -D) = 0. \end{cases}$$

$$(Q2_k) := \begin{cases} \hat{h}_{\zeta\zeta}(k,\zeta) - k^2\hat{h}(k,\zeta) = 0 \qquad \text{em} \qquad -D < \zeta < 0, \\ \hat{h}(k,0) = 0, \\ \hat{h}(k,-D) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq 0, \\ -1 & \text{se } k = 0. \end{cases} \end{cases}$$

É fácil ver que a solução de $(Q2_k)$ é

$$\hat{h}(k,\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq 0, \\ \dfrac{\zeta}{D} & \text{se } k = 0. \end{cases} \tag{C.2}$$

Para resolver $(Q1_k)$ é utilizado a técnica do parâmetro a determinar (veja [4], p. 137). Suponha que

$$\hat{g}(k,\zeta) = e^{r\zeta}.$$

O parâmetro r é determinado substituindo esta expressão em $(Q1_k)$. Aplicando as condições de contorno segue que a solução de $(Q1_k)$ é

$$\hat{g}(k,\zeta) = \frac{\sinh(k(D+\zeta))}{\sinh(kD)}\hat{\mathbf{Y}}(k). \tag{C.3}$$

É fácil verificar que $\hat{Y}(k,\zeta)$ definido em (C.1) através das fórmulas (C.2) e (C.3) é uma solução de $(P1_k)$.

Portanto a solução de $(P1)$ é dada por:

$$\begin{aligned} Y(\xi,\zeta) &= \mathbf{F}^{-1}[\hat{Y}(k,\zeta)] = \mathbf{F}^{-1}[\hat{g}(k,\zeta)] + \mathbf{F}^{-1}[\hat{h}(k,\zeta)] \\ &= \mathbf{F}^{-1}\left[\frac{\sinh(k(D+\zeta))}{\sinh(kD)}\right]\mathbf{F}_k[\mathbf{Y}] + \frac{\zeta}{D}. \end{aligned} \tag{C.4}$$

C.2 Fórmula para $X(\xi,\zeta)$

As funções $X(\xi,\zeta)$ e $Y(\xi,\zeta)$ do mapeamento conforme são harmônicas conjugadas. Assim pela relação de Cauchy-Riemann $X_\xi = Y_\zeta$.

Logo de (C.4) segue que

$$X_\xi(\xi,\zeta) = \mathbf{F^{-1}}\left[\frac{k\cosh(k(\zeta+D))}{\sinh(kD)}\right]\mathbf{F}_k\mathbf{Y} + \frac{1}{D}.$$

Isto implica que:

$$X(\xi,\zeta) = \frac{\xi}{D} - \mathbf{F^{-1}}\left[i\frac{\cosh(k(\zeta+D))}{\sinh(kD)}\right]\mathbf{F}_k\mathbf{Y}.$$

Afirmação C.2.1.

$$X(\xi=0,\zeta) = 0.$$

Prova: De fato,

$$X(\xi,\zeta) = \frac{\xi}{D} - h(\xi),$$

onde $h(\xi) := \mathbf{F^{-1}}\left[i\frac{\cosh(k(\zeta+D))}{\sinh(kD)}\right]\mathbf{F}_k\mathbf{Y}$. Para verificar a afirmação basta mostrar que $h(\xi)$ é ímpar.

Como a onda de superfície livre é par então $\hat{\mathbf{Y}}(k) = \hat{\mathbf{Y}}(-k)$. Por um lado tem-se que

$$h(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}(k)e^{2\pi ik\xi/\lambda} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i\frac{\cosh(k(\zeta+D))}{\sinh(kD)}\hat{\mathbf{Y}}(k)e^{2\pi ik\xi/\lambda}.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} h(-\xi) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} i\frac{\cosh(k(\zeta+D))}{\sinh(kD)}\hat{\mathbf{Y}}(k)e^{-2\pi ik\xi/\lambda} \\ &= \sum_{k=\infty}^{-\infty} i\frac{\cosh(-k(\zeta+D))}{\sinh(-kD)}\hat{\mathbf{Y}}(-k)e^{2\pi ik\xi/\lambda} \\ &= -\sum_{k=\infty}^{-\infty} i\frac{\cosh(k(\zeta+D))}{\sinh(kD)}\hat{\mathbf{Y}}(k)e^{2\pi ik\xi/\lambda} = -h(\xi). \end{aligned}$$

△

Afirmação C.2.2.

$$X(\xi = \lambda/2, \zeta) = \lambda/2.$$

Prova: De fato, no mapeamento é imposto que o período no domínio canônico e físico sejam os mesmos. Isto significa que

$$X(\xi = \lambda/2, \zeta) - X(\xi = -\lambda/2, \zeta) = \lambda.$$

Da prova da afirmação anterior conclui-se que $X(\xi,\zeta)$ é ímpar em ξ. Logo da igualdade acima segue que

$$X(\xi = \lambda/2, \zeta) + X(\xi = \lambda/2, \zeta) = \lambda,$$

o que prova a afirmação. △

C.3 Solução das equações de Laplace para $\tilde{\phi}(\xi,\zeta)$ e $\tilde{\psi}(\xi,\zeta)$

Consideremos a equação de Laplace com condição de fronteira definida abaixo

$$(P2) = \begin{cases} \Delta\tilde{\phi} = 0 \qquad \text{em} \qquad -D < \zeta < 0, \\ \tilde{\phi}(\xi,0) = \tilde{\mathbf{\Phi}}(\xi), \\ \tilde{\phi}_\zeta(\xi,-D) = 0. \end{cases}$$

Deseja-se encontrar uma solução $\tilde{\phi}(\xi,\zeta)$ de $(P2)$ que seja λ-periódica na variável ξ.

Efetuando a transformada de Fourier em ξ em $(P2)$, esta equação diferencial parcial é transformada na família de EDOs $(P2_k)_{k\in\mathbb{R}}$ definida por

$$(P2_k) := \begin{cases} \hat{\tilde{\phi}}_{\zeta\zeta}(k,\zeta) - k^2\hat{\tilde{\phi}}(k,\zeta) = 0 \qquad \text{em} \qquad -D<\zeta<0, \\ \hat{\tilde{\phi}}(k,0) = \hat{\tilde{\Phi}}(k), \\ \hat{\tilde{\phi}}_{\zeta}(k,-D) = 0. \end{cases}$$

Utilizando o método do parâmetro a determinar como na Seção C.1 encontra-se que a solução de $(P2_k)$ é

$$\hat{\tilde{\phi}}(k,\zeta) = \frac{\cosh(k(D+\zeta))}{\cosh(kD)}\mathbf{F}_k[\tilde{\mathbf{\Phi}}].$$

Invertendo a transformada de Fourier de $\hat{\tilde{\phi}}(k,\zeta)$ conclui-se que a solução de $(P2)$ é

$$\tilde{\phi}(\xi,\zeta) = \mathbf{F}^{-1}\left[\frac{\cosh(k(D+\zeta))}{\cosh(kD)}\right]\mathbf{F}_k[\tilde{\mathbf{\Phi}}].$$

Consideremos agora o problema de obter uma solução λ-periódica na variável ξ para a equação de Laplace

$$(P3) := \begin{cases} \Delta\tilde{\psi} = 0 \qquad \text{em} \qquad -D<\zeta<0, \\ \tilde{\psi}(\xi,0) = \tilde{\mathbf{\Psi}}(\xi), \\ \tilde{\psi}(\xi,-D) = 0. \end{cases}$$

Mutatis mutandis no problema $(Q1_k)$ na Seção C.1 conclui-se que a solução de $(P3)$ é

$$\tilde{\psi}(\xi,\zeta) = \mathbf{F}^{-1}\left[\frac{\sinh(k(D+\zeta))}{\sinh(kD)}\right]\mathbf{F}_k[\tilde{\mathbf{\Psi}}].$$

Apêndice D

As condições de fronteira livre no sistema de coordenadas canônico

No referencial móvel (X, Y), as condições de fronteira livre são dadas por

$$\begin{cases} -c\eta_X + (\tilde{\phi}_X - \gamma(\eta + b))\eta_X = \tilde{\phi}_Y & \text{(Cinemática)} \\ -c\tilde{\phi}_X + \dfrac{1}{2}(\tilde{\phi}_X^2 + \tilde{\phi}_Y^2) + \eta - \gamma(\eta + b)\tilde{\phi}_X + \gamma\tilde{\psi} = B & \text{(Bernoulli)} \ . \end{cases} \tag{D.1}$$

Os objetivos desta seção são escrever estas equações no sistema de coordenadas canônico (ξ, ζ) e depois arranjá-las de forma que a onda de superfície livre seja governada apenas por uma única equação.

Note que

$$\mathbf{Y}(\xi) = \eta(X(\xi, 0)) \Rightarrow \mathbf{Y}_\xi = \eta_X \mathbf{X}_\xi \Rightarrow \eta_X = \frac{\mathbf{Y}_\xi}{\mathbf{X}_\xi}.$$

Substituindo a relação acima na condição de cinemática em (D.1) obtém-se que

$$-c\mathbf{Y}_\xi + (\tilde{\phi}_X - \gamma(\mathbf{Y} + b))\mathbf{Y}_\xi = \tilde{\phi}_Y \mathbf{X}_\xi. \tag{D.2}$$

Veja que

$$\tilde{\psi}(\xi, \zeta) = \tilde{\psi}(X(\xi, \zeta), Y(\xi, \zeta)) \Rightarrow \tilde{\psi}_\xi(\xi, \zeta) = \tilde{\psi}_X X_\xi(\xi, \zeta) + \tilde{\psi}_Y Y_\xi(\xi, \zeta).$$

Logo avaliando $\tilde{\psi}_\xi(\xi, \zeta)$ ao longo da superfície livre ($\zeta = 0$) e usando as relações de Cauchy-Riemann segue que

$$\tilde{\mathbf{\Psi}}_\xi = -\tilde{\phi}_Y \mathbf{X}_\xi + \tilde{\phi}_X \mathbf{Y}_\xi. \tag{D.3}$$

Aplicando a relação acima em (D.2) conclui-se que a condição de cinemática no domínio canônico é dada por

$$\tilde{\mathbf{\Psi}}_\xi = c\mathbf{Y}_\xi + \gamma(\mathbf{Y} + b)\mathbf{Y}_\xi. \tag{D.4}$$

É conhecido de (3.26) que

$$\tilde{\phi}_X = \frac{1}{|J|}(\tilde{\phi}_\xi Y_\zeta - \tilde{\phi}_\zeta Y_\xi) = \frac{1}{|J|}(\tilde{\phi}_\xi X_\xi + \tilde{\psi}_\xi Y_\xi),$$
$$\tilde{\phi}_Y = \frac{1}{|J|}(-\tilde{\phi}_\xi X_\zeta + \tilde{\phi}_\zeta X_\xi) = \frac{1}{|J|}(\tilde{\phi}_\xi Y_\xi - \tilde{\psi}_\xi X_\xi).$$

Avaliando as equações acima ao longo da superfície livre ($\zeta = 0$) obtém-se as relações

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_X &= \frac{1}{|J|}(\tilde{\mathbf{\Phi}}_\xi \mathbf{X}_\xi + \tilde{\mathbf{\Psi}}_\xi \mathbf{Y}_\xi), \\ \tilde{\phi}_Y &= \frac{1}{|J|}(\tilde{\mathbf{\Phi}}_\xi \mathbf{Y}_\xi - \tilde{\mathbf{\Psi}}_\xi \mathbf{X}_\xi). \end{aligned} \tag{D.5}$$

Assim

$$\frac{1}{2}(\tilde{\phi}_X^2 + \tilde{\phi}_Y^2) = \frac{1}{2|J|}(\tilde{\mathbf{\Phi}}_\xi^2 + \tilde{\mathbf{\Psi}}_\xi^2). \tag{D.6}$$

Portanto substituindo (D.5) e (D.6) na equação de Bernoulli em (D.1) conclui-se que no sistema de coordenadas canônico esta equação é escrita como

$$\begin{aligned} \underbrace{-\frac{c}{|J|}(\tilde{\mathbf{\Phi}}_\xi \mathbf{X}_\xi + \tilde{\mathbf{\Psi}}_\xi \mathbf{Y}_\xi)}_{A_1} + \underbrace{\frac{1}{2|J|}(\tilde{\mathbf{\Phi}}_\xi^2 + \tilde{\mathbf{\Psi}}_\xi^2) + \mathbf{Y}}_{A_2} + \\ + \underbrace{\gamma\tilde{\mathbf{\Psi}} - \gamma(\mathbf{Y}+b)\frac{1}{|J|}(\tilde{\mathbf{\Phi}}_\xi \mathbf{X}_\xi + \tilde{\mathbf{\Psi}}_\xi \mathbf{Y}_\xi)}_{A_3} = B. \end{aligned} \tag{D.7}$$

Agora, após escrever as equações cinemática e Bernoulli no sistema de coordenadas canônico, pretende-se utilizar as relações do mapeamento conforme (3.29) e (3.30)

$$\mathbf{X}_\xi = \frac{1}{D} - \mathcal{C}[\mathbf{Y}_\xi], \tag{D.8}$$

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}_\xi = -\mathcal{C}[\tilde{\mathbf{\Psi}}_\xi], \tag{D.9}$$

para acoplar as equações de fronteira em apenas uma.

Inicialmente note que:

$$\begin{aligned} \text{-> } \quad A_1 &= -\frac{c}{|J|}(\tilde{\mathbf{\Phi}}_\xi \mathbf{X}_\xi + \tilde{\mathbf{\Psi}}_\xi \mathbf{Y}_\xi) \\ &\underbrace{=}_{(D.4)} -\frac{c}{|J|}\tilde{\mathbf{\Phi}}_\xi \mathbf{X}_\xi - \frac{c}{|J|}\mathbf{Y}_\xi(c\mathbf{Y}_\xi + \gamma(\mathbf{Y}+b)\mathbf{Y}_\xi) \\ &= -\frac{c}{|J|}\tilde{\mathbf{\Phi}}_\xi \mathbf{X}_\xi - \frac{c^2}{|J|}\mathbf{Y}_\xi^2 - \frac{c}{|J|}\gamma(\mathbf{Y}+b)\mathbf{Y}_\xi^2. \\ \text{-> } \quad A_2 &= \frac{1}{2|J|}(\tilde{\mathbf{\Phi}}_\xi^2 + \tilde{\mathbf{\Psi}}_\xi^2) + \mathbf{Y} \\ &\underbrace{=}_{(D.4)} \frac{1}{2|J|}\tilde{\mathbf{\Phi}}_\xi^2 + \frac{1}{2|J|}(c\mathbf{Y}_\xi + \gamma(\mathbf{Y}+b)\mathbf{Y}_\xi)^2 + \mathbf{Y} \\ &= \frac{1}{2|J|}\tilde{\mathbf{\Phi}}_\xi^2 + \frac{1}{2|J|}c^2\mathbf{Y}_\xi^2 + \frac{1}{2|J|}\gamma^2(\mathbf{Y}+b)^2\mathbf{Y}_\xi^2 + \frac{1}{|J|}c\gamma(\mathbf{Y}+b)\mathbf{Y}_\xi^2 + \mathbf{Y}. \end{aligned}$$

Logo

$$A_1 + A_2 = -\frac{c}{|J|}\tilde{\mathbf{\Phi}}_\xi \mathbf{X}_\xi - \frac{c^2}{2|J|}\mathbf{Y}_\xi^2 + \frac{1}{2|J|}\tilde{\mathbf{\Phi}}_\xi^2 + \frac{1}{2|J|}\gamma^2(\mathbf{Y}+b)^2\mathbf{Y}_\xi^2 + \mathbf{Y}. \tag{D.10}$$

De (D.9) é válido que

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}_\xi = -\mathcal{C}[\tilde{\mathbf{\Psi}}_\xi] \underbrace{=}_{(D.4)} -\mathcal{C}[c\mathbf{Y}_\xi] - \mathcal{C}[\gamma(\mathbf{Y}+b)\mathbf{Y}_\xi] \underbrace{=}_{(D.8)} c\mathbf{X}_\xi - \frac{1}{D} - \mathcal{C}[\gamma(\mathbf{Y}+b)\mathbf{Y}_\xi]. \tag{D.11}$$

Substituindo em (D.10) vem que

$$A_1 + A_2 = -\frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2|J|D^2} + \mathbf{Y} + \otimes, \tag{D.12}$$

onde

$$\otimes = \frac{\mathcal{C}^2[\gamma(\mathbf{Y}+b)\mathbf{Y}_\xi]}{2|J|} + \frac{c\,\mathcal{C}[\gamma(\mathbf{Y}+b)\mathbf{Y}_\xi]}{|J|D} + \frac{\gamma^2(\mathbf{Y}+b)^2\mathbf{Y}_\xi}{2|J|}.$$

Seja A_3 definido em (D.7)

$$A_3 = \gamma\tilde{\mathbf{\Psi}} - \gamma(\mathbf{Y}+b)\frac{1}{|J|}(\tilde{\mathbf{\Phi}}_\xi \mathbf{X}_\xi + \tilde{\mathbf{\Psi}}_\xi \mathbf{Y}_\xi). \tag{D.13}$$

A partir de (D.4) é fácil ver que

$$\tilde{\mathbf{\Psi}} = c\mathbf{Y} + \gamma\mathbf{Y}\left(\frac{\mathbf{Y}}{2} + b\right). \tag{D.14}$$

Substituindo (D.4), (D.11) e (D.14) em (D.13) encontra-se que

$$\begin{aligned} A_3 = {} & -c\gamma(\mathbf{Y}+b) + \frac{c\gamma(\mathbf{Y}+b)\mathbf{X}_\xi}{|J|D} + \frac{\gamma(\mathbf{Y}+b)\mathbf{X}_\xi\,\mathcal{C}[\gamma(\mathbf{Y}+b)\mathbf{Y}_\xi]}{|J|} \\ & - \frac{\gamma^2(\mathbf{Y}+b)^2\,\mathbf{Y}_\xi^2}{|J|} + \gamma\mathbf{Y}\left(\frac{\mathbf{Y}}{2}+b\right). \end{aligned} \tag{D.15}$$

Portanto substituindo (D.12) e (D.15) em (D.7) conclui-se que **o perfil da superfície livre, Y, satisfaz a equação**

$$\begin{aligned} & -\frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2|J|D^2} + \mathbf{Y} + \frac{\gamma^2\mathcal{C}^2[\mathbf{Y}+b)\mathbf{Y}_\xi]}{2|J|} + \gamma\mathcal{C}[(\mathbf{Y}+b)\mathbf{Y}_\xi]\left(\frac{c}{|J|D} + \frac{\gamma\mathbf{X}_\xi(\mathbf{Y}+b)}{|J|}\right) \\ & - \frac{\gamma^2(\mathbf{Y}+b)^2\mathbf{Y}_\xi^2}{2|J|} + \frac{c\gamma(\mathbf{Y}+b)\mathbf{X}_\xi}{|J|D} - \gamma cb + \gamma^2\mathbf{Y}\left(\frac{\mathbf{Y}}{2}+b\right) = B. \end{aligned} \tag{D.16}$$

Apêndice E

Fórmulas para a energia cinética e potencial no sistema de coordenadas canônico

A energia cinética (E_c) e potencial(E_p) por comprimento de onda nas variáveis físicas são dadas respectivamente por:

$$E_c = \frac{\rho}{2}\int_{\widetilde{\Omega}} \|(u,v)\|^2\, dy\, dx \qquad\qquad E_p = \int_{\widetilde{\Omega}} \rho\, g\, y\, dy\, dx,$$

onde

$$\widetilde{\Omega} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \lambda \text{ e } 0 - d \leq y \leq \eta(x,t)\},$$
$$u = \tilde{\phi}_x - \gamma(y+b) \qquad \text{e} \qquad v = \tilde{\phi}_y.$$

Fazendo a mudança de coordenadas para as variáveis adimensionais dadas em (3.15) obtém-se que

$$E_c = \frac{\rho}{2}\int_{\widetilde{\Omega}'} g\, d^3 \|(u',v')\|^2\, dx'\, dy' \qquad\qquad E_p = \int_{\widetilde{\Omega}'} \rho\, g d^3\, y'\, dx'\, dy'.$$

Definindo $E_c = \rho g d^3 E_c'$ e $E_p = \rho g d^3 E_p'$, substituindo acima e esquecendo as linhas, a energia cinética e potencial adimensionalizadas são respectivamente:

$$E_c = \frac{1}{2}\int_{\widetilde{\Omega}} \|(u,v)\|^2\, dx\, dy \qquad\qquad E_p = \int_{\widetilde{\Omega}} y\, dx\, dy.$$

Sob a hipótese que a onda é viajante, passando ao referencial móvel

$$X = x - ct \qquad Y = y,$$

as fórmulas da energia são escritas como

$$E_c = \frac{1}{2}\int_{\widetilde{\Omega}(t)} \|(u,v)\|^2\, dX\, dY \qquad\qquad E_p = \int_{\widetilde{\Omega}(t)} Y\, dX\, dY,$$

onde

$$\widetilde{\Omega}(t) = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 : -ct \leq X \leq \lambda - ct \text{ e } -1 \leq Y \leq \eta(X)\}.$$

Afirmação E.0.1. *A energia cinética e potencial não dependem do tempo. O que implica que sem perda de generalidade suas fórmulas podem ser escritas como*

$$E_c = \frac{1}{2}\int_{\widetilde{\Omega}} \|(u,v)\|^2\, dX\, dY \qquad\qquad E_p = \int_{\widetilde{\Omega}} Y\, dX\, dY, \tag{E.1}$$

onde

$$\widetilde{\Omega} = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq X \leq \lambda \;\; e \;\; -1 \leq Y \leq \eta(X)\}.$$

Prova: De fato

$$E_c(t) = \frac{1}{2}\int_{-ct}^{\lambda - ct}\int_{-1}^{\eta(X)} \|(u,v)\|^2\, dY\, dX,$$

derivando em relação ao tempo segue que

$$2\frac{dE_c}{dt}(t) = -c\int_{-1}^{\eta(X)} \|(u,v)\|^2\, dY - (-c)\int_{-1}^{\eta(X)} \|(u,v)\|^2\, dY = 0.$$

O que mostra que a fórmula de E_c em E.1 é válida. Procedendo de forma análoga verifica-se o mesmo para E_p.

△

De posse das fórmulas para energia cinética e potencial (E.1) o objetivo agora é reduzir as integrações a integrar apenas sobre a superfície livre.

Para tal finalidade, substituindo o campo de velocidades na fórmula da energia cinética chega-se em

$$E_c = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\widetilde{\Omega}} (\tilde{\phi}_X^2 + \tilde{\phi}_Y^2)\, dX\, dY}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\widetilde{\Omega}} \gamma^2(Y+b)^2 - 2\gamma(Y+b)\tilde{\phi}_X)\, dX\, dY}_{I_2}. \tag{E.2}$$

Aplicando uma das identidades de Green ([24], p. 712) em I_1

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_{\widetilde{\Omega}} \|\nabla\tilde{\phi}\|^2\, dX\, dY = \frac{1}{2}\int_{\partial\widetilde{\Omega}} \tilde{\phi}\,\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\mathbf{n}}\, dS, \tag{E.3}$$

onde $\mathbf{n}$ denota o vetor normal a $\partial\widetilde{\Omega}$ apontando para fora. Como $\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\mathbf{n}} = 0$ no fundo e $\tilde{\phi}$ é periódica em X, segue que a integração em (E.3) é reduzida a superfície livre. Parametrizando a superfície livre pelo sistema de coordenadas canônico, dado em (3.20), a integral I_1 torna-se

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}\int_0^{\lambda} \tilde{\phi}(\mathbf{X}(\xi),\mathbf{Y}(\xi))(-\tilde{\phi}_X(\mathbf{X}(\xi),\mathbf{Y}(\xi))\mathbf{Y}_\xi + \tilde{\phi}_Y(\mathbf{X}(\xi),\mathbf{Y}(\xi))\mathbf{X}_\xi)\, d\xi \\ &\underbrace{=}_{(*)} -\frac{1}{2}\int_0^{\lambda} \tilde{\mathbf{\Phi}}\tilde{\mathbf{\Psi}}_\xi\, d\xi, \end{aligned} \tag{E.4}$$

onde em $(*)$ utilizamos a equação (D.3).

Agora é a vez de analisar I_2 definido em (E.2) por

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(\int_\Omega \gamma^2(Y+b)^2\,dX\,dY - \int_\Omega 2\gamma(Y+b)\tilde{\phi}_X\,dX\,dY\right).$$

Integrando acima por partes ([24], p. 712) vem que

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\frac{\gamma^2(Y+b)^3}{3}n^y\,dS - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}2\gamma(Y+b)\tilde{\phi}n^x\,dS, \tag{E.5}$$

onde $\mathbf{n} = (n^x, n^y)$ é o vetor normal a $\partial\Omega$ apontando para fora. Assim

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\frac{\gamma^2(Y+b)^3}{3}n^y\,dS = &\frac{1}{2}\int_0^\lambda \frac{\gamma^2(Y(\xi,0)+b)^3}{3}X_\xi(\xi,0)\,d\xi\\ &-\frac{1}{2}\int_0^\lambda \frac{\gamma^2(Y(\xi,-D)+b)^3}{3}X_\xi(\xi,-D)\,d\xi.\end{aligned}$$

De (3.22) e (3.20) temos que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\frac{\gamma^2(Y+b)^3}{3}n^y\,dS &= \frac{1}{2}\int_0^\lambda \frac{\gamma^2(\mathbf{Y}(\xi)+b)^3}{3}\mathbf{X}_\xi(\xi)\,d\xi\\ &\quad-\frac{1}{2}\int_0^\lambda \frac{\gamma^2(-1+b)^3}{3}\left(\frac{1}{D}+g(\xi)\right)\,d\xi\\ &= \frac{1}{2}\int_0^\lambda\left(\frac{\gamma^2(\mathbf{Y}(\xi)+b)^3}{3}\mathbf{X}_\xi(\xi)+\frac{\gamma^2(1-b)^3}{3D}\right)\,d\xi.\\ &\quad+\frac{1}{2}\int_0^\lambda \frac{\gamma^2(1-b)^3}{3}g(\xi)\,d\xi,\end{aligned} \tag{E.6}$$

onde

$$g(\xi) := \mathbf{F^{-1}}\left[\frac{k}{\sinh(kD)}\right]\mathbf{F}_k\mathbf{Y}.$$

Para a segunda integração de I_2 tem-se que

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}2\gamma(Y+b)\tilde{\phi}n^x\,dS &= -\int_0^\lambda 2\gamma(\mathbf{Y}+b)\tilde{\mathbf{\Phi}}\mathbf{Y}_\xi\,d\xi = -\int_0^\lambda \gamma\frac{d}{d\xi}[(\mathbf{Y}+b)^2]\tilde{\mathbf{\Phi}}\,d\xi\\ &= \int_0^\lambda \gamma(\mathbf{Y}+b)^2\tilde{\mathbf{\Phi}}_\xi\,d\xi.\end{aligned} \tag{E.7}$$

Portanto por (E.4) a (E.7) conclui-se que energia cinética adimensional é escrita como

$$\begin{aligned}E_c =&\frac{1}{2}\int_0^\lambda\left(-\tilde{\mathbf{\Phi}}\tilde{\mathbf{\Psi}}_\xi+\frac{\gamma^2(\mathbf{Y}+b)^3}{3}\mathbf{X}_\xi+\frac{\gamma^2(1-b)^3}{3D}-\gamma(\mathbf{Y}+b)^2\tilde{\mathbf{\Phi}}_\xi\right)\,d\xi\\ &+\frac{1}{2}\int_0^\lambda\frac{\gamma^2(1-b)^3}{3}g(\xi)\,d\xi,\end{aligned}$$

onde

$$g(\xi) := \mathbf{F^{-1}}\left[\frac{k}{\sinh(kD)}\right]\mathbf{F}_k\mathbf{Y}.$$

A fórmula da energia potencial definida em (E.1) escrita nas coordenadas (ξ, ζ) é dada por

$$E_p = \int_\Omega Y\, dX\, dY = \int_0^\lambda \int_{-1}^{\eta(X)} Y\, dY\, dX = \frac{1}{2}\int_0^\lambda \eta(X)^2 dX - \frac{\lambda}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\lambda \mathbf{Y}^2 \mathbf{X}_\xi\, d\xi - \frac{\lambda}{2}.$$

O nível de repouso será considerado como o nível de energia potencial zero. Logo,

$$E_p = \frac{1}{2}\int_0^\lambda \mathbf{Y}^2 \mathbf{X}_\xi\, d\xi.$$

Uma outra energia que é útil ser calculada separadamente é a energia cinética (E_l) exclusiva do fluxo laminar que é dada por:

$$E_l = \frac{1}{2}\int_\Omega \gamma^2 (Y+b)^2\, dX\, dY = \frac{1}{2}\int_0^\lambda \int_{-1}^{0} \gamma^2 (Y+b)^2\, dY\, dX$$
$$= \frac{\lambda\gamma^2}{6}\left(b^3 + (1-b)^3\right).$$

Apêndice F

Discretizações

F.1 Discretizando a equação governante da superfície livre

A elevação da onda de superfície no sistema de coordenadas canônico $\mathbf{Y}(\xi)$ será discretizada no intervalo $\xi \in [-L, L]$, onde $\lambda = 2L$. A discretização é feita em pontos equidistantes

$$\xi_j = -L + (j-1)\Delta\xi, \qquad j = 1, \cdots, J = 2^p \qquad \text{onde} \quad \Delta\xi = \lambda/J, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Cada função avaliada em um ponto $\xi_j, j = 1, \cdots, J$, da grade acima é sinalizada com um sub-índice j, por exemplo $\mathbf{Y}_j := \mathbf{Y}(\xi_j)$ e $\mathbf{X}_{\xi j} := \mathbf{X}_\xi(\xi_j)$. Como será necessário calcular transformadas discretas de Fourier (TDF), para aumentar a velocidade das operações aritméticas da TDF do Matlab, as discretizações são feitas com $J = 2^p$ pontos ([53], p. 24).

Buscando ondas de superfície livre $\mathbf{Y}$ simétricas a equação (3.36) é discretizada como

$$G_j(\mathbf{Y}_1, \cdots, \mathbf{Y}_{J/2+1}, c, B) = 0, \quad j = 1, \cdots, J/2+1,$$

onde

$$
\begin{aligned}
\rightarrow \quad & G_j(\mathbf{Y}_1,\cdots,\mathbf{Y}_{J/2+1},c,B) := -\frac{c^2}{2}+\frac{c^2}{2|J|D^2}+\mathbf{Y}_j+\frac{\gamma^2\mathcal{C}^2[\mathbf{Y}_j+b)\mathbf{Y}_{\xi j}]}{2|J|} \\
& +\gamma\mathcal{C}[(\mathbf{Y}_j+b)\mathbf{Y}_{\xi j}]\left(\frac{c}{|J|D}+\frac{\gamma\mathbf{X}_{\xi j}(\mathbf{Y}_j+b)}{|J|}\right) \\
& -\frac{\gamma^2(\mathbf{Y}_j+b)^2\mathbf{Y}_{\xi j}i^2}{2|J|}+\frac{c\gamma(\mathbf{Y}_j+b)\mathbf{X}_{\xi j}}{|J|D}-\gamma cb \\
& +\gamma^2\mathbf{Y}_j\left(\frac{\mathbf{Y}_j}{2}+b\right)-B, \\
\rightarrow \quad & \mathbf{X}_\xi = \frac{1}{D}-\mathcal{C}[\mathbf{Y}_\xi], \\
\rightarrow \quad & \mathcal{C}[\cdot] := \mathbf{F}^{-\mathbf{1}}[i\coth(kD)]\mathbf{F}_k[\cdot].
\end{aligned}
$$

Uma descrição minuciosa da discretização do operador $\mathcal{C}[\cdot]$ é dada no Apêndice F.2.

Como visto acima, a discretização de (3.36) gera um sistema com $J/2+1$ equações e $J/2+2$ incógnitas. Este sistema pode ser completado pelas equações

$$
\mathbf{Y}(0)-\mathbf{Y}(-L)=H, \qquad \int_{-L}^{0}\mathbf{Y}\mathbf{X}_\xi\,d\xi=0, \tag{F.1}
$$

que significam que a onda tem uma altura H e média zero no sistema de coordenadas físico. Conforme visto em (3.24), a condição de média zero implica que o domínio canônico é uma faixa de largura $D=1$. Discretizando (F.1) defini-se

$$
\begin{aligned}
& G_{J/2+2}(\mathbf{Y}_1,\cdots,\mathbf{Y}_{J/2+1},c,B) := \mathbf{Y}_{J/2+1}-\mathbf{Y}_1-H, \\
& G_{J/2+3}(\mathbf{Y}_1,\cdots,\mathbf{Y}_{J/2+1},c,B) := \frac{\Delta\xi(\mathbf{Y}_1\mathbf{X}_{\xi 1}+\mathbf{Y}_{J/2+1}\mathbf{X}_{\xi J/2+1})}{2}+\Delta\xi\sum_{j=2}^{J/2}\mathbf{Y}_j\mathbf{X}_{\xi j}.
\end{aligned}
$$

Resolvemos este sistema pelo método de Newton, com a matriz jacobiana calculada da seguinte forma

$$
\frac{\partial G_j}{\partial \mathbf{Y}_l}=\frac{G_j(\mathbf{Y}_1,\cdots,\mathbf{Y}_l+\delta,\cdots,\mathbf{Y}_{J/2+1},c,B)-G_j(\mathbf{Y}_1,\cdots,\mathbf{Y}_l,\cdots,\mathbf{Y}_{J/2+1},c,B)}{\delta},
$$

para $j,l=1,\cdots,J/2+1$ e $j=J/2+3$. Mutatis mutandis encontra $\dfrac{\partial G_j}{\partial c}$ para $j=1,\cdots,J/2+1$. Para $j=J/2+2$ e $J/2+3$ tem-se que

$$
\frac{\partial G_j}{\partial c}=0.
$$

Além disso, é fácil ver que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G_j}{\partial B} &= -1, \quad \text{para} \quad j=1,\cdots,J/2+1, \\
\frac{\partial G_j}{\partial B} &= 0, \quad \text{para} \quad j=J/2+2, J/2+3.
\end{aligned}
$$

Quanto a $G_{J/2+2}$ segue que:

$$
\frac{\partial G_{J/2+2}}{\partial \mathbf{Y}_1}=-1, \qquad \frac{\partial G_{J/2+2}}{\partial \mathbf{Y}_{J/2+1}}=1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial G_{J/2+2}}{\partial \mathbf{Y}_l}=0, \text{ se } l\neq 1, J/2+1.
$$

F.2 Discretizando o operador de Hilbert $\mathcal{C}[\cdot]$

A expansão de Fourier de qualquer funcão contínua periódica no intervalo $[-L, L]$ contém um número infinito de modos de Fourier

$$g(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_k[g] e^{2\pi i k\xi/\lambda},$$

onde a transformada de Fourier de g é dada por

$$\mathbf{F}_k[g] = \frac{1}{\lambda}\int_{-L}^{L} g(\xi) e^{-2\pi i k\xi/\lambda} d\xi, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

O operador $\mathcal{C}[\cdot]$ definido por

$$\mathcal{C}[g] = \mathbf{F^{-1}}[i\coth(kD)]\mathbf{F}_k[g],$$

a partir da definição de transformada de Fourier dada acima $\mathcal{C}[g]$ é re-escrito como:

$$\mathcal{C}[g] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i\coth\left(\frac{2\pi k}{\lambda}D\right)\mathbf{F}_k[g]e^{2\pi i k\xi/\lambda}. \tag{F.2}$$

Aqui será apresentado de forma detalhada como implementar este operador em Matlab.

Considere o problema de conhecido valor de uma função g nos pontos de grade calcular o operador $\mathcal{C}[g]$. Primeiramente são calculados os valores aproximados da transformada de Fourier de g. Para isso é feito o seguinte:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_k[g] &\approx \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{J} g_j e^{-2\pi i k(-L+(j-1)\Delta\xi)/\lambda}\Delta\xi \\
&\approx \frac{1}{J} e^{-2\pi i k(-L)/\lambda}\sum_{j=1}^{J} g_j e^{-2\pi i k(j-1)/J} \\
&\approx \frac{1}{J} e^{2\pi i k L/\lambda}\mathcal{F}_k[g],
\end{aligned} \tag{F.3}$$

onde

$$\mathcal{F}_k[g] = \sum_{j=1}^{J} g_j e^{-2\pi i k(j-1)/J}$$

denota a transforma discreta de Fourier (TDF) de um vetor $g \in \mathbb{C}^J$, que coincide com a usada no pacote MATLAB. O símbolo $\mathcal{F}_k$ significa a representação matricial da transformada rápida de Fourier.

A série (F.2) pode ser aproximada pela série truncada

$$\mathcal{C}[g] \approx \sum_{k=-J/2+1}^{J/2} i\coth\left(\frac{2\pi k}{\lambda}D\right)\mathbf{F}_k[g]e^{2\pi i k\xi/\lambda}.$$

Logo trocando os coeficientes de $\mathbf{F}_k[g]$ pelos seus valores aproximados (F.3) surge que

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}[g]_j &\approx \frac{1}{J} e^{2\pi i k L/\lambda} \sum_{k=-J/2+1}^{J/2} i \coth\left(\frac{2\pi k}{\lambda} D\right) \mathcal{F}_k[g] e^{2\pi i k(-L+(j-1)\Delta\xi)/\lambda} \\
&\approx \frac{1}{J} \sum_{k=-J/2+1}^{J/2} i \coth\left(\frac{2\pi k}{\lambda} D\right) \mathcal{F}_k[g] e^{2\pi i k/J}. \\
&\approx \frac{1}{J} \sum_{k=-J/2+1}^{-1} i \coth\left(\frac{2\pi k}{\lambda} D\right) \mathcal{F}_k[g] e^{2\pi i k/J} \\
&+ \frac{1}{J} \sum_{k=0}^{J/2} i \coth\left(\frac{2\pi k}{\lambda} D\right) \mathcal{F}_k[g] e^{2\pi i k/J}.
\end{aligned}$$

Na soma dos modos negativos é feita a seguinte mudança de índices $k \to J + k$ assim

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}[g]_j &\approx \frac{1}{J} \sum_{k=J/2+1}^{J-1} i \coth\left(\frac{2\pi (k-J)}{\lambda} D\right) \mathcal{F}_{k-J}[g] e^{2\pi i (k-J)/J} \\
&+ \frac{1}{J} \sum_{k=0}^{J/2} i \coth\left(\frac{2\pi k}{\lambda} D\right) \mathcal{F}_k[g] e^{2\pi i k/J} \\
&\underbrace{=}_{(*)} \frac{1}{J} \sum_{k=J/2+1}^{J-1} i \coth\left(\frac{2\pi (k-J)}{\lambda} D\right) \mathcal{F}_k[g] e^{2\pi i (k)/J} \\
&+ \frac{1}{J} \sum_{k=0}^{J/2} i \coth\left(\frac{2\pi k}{\lambda} D\right) \mathcal{F}_k[g] e^{2\pi i k/J}.
\end{aligned}$$

(*) Aqui foi utilizada a periodicidade da TDF: $\mathcal{F}_{k-J}[\cdot] = \mathcal{F}_k[\cdot]$.

Definindo o vetor

$$p = \frac{2\pi}{\lambda}[0, 1, \cdots, \frac{J}{2} - 1, \frac{J}{2}, -\frac{J}{2} + 1, \cdots, -1]$$

obtém-se uma forma mais compacta

$$\mathcal{C}[g]_j \approx \frac{1}{J} \sum_{k=0}^{J-1} i \coth\left(p_{k+1} D\right) \mathcal{F}_k[g] e^{2\pi i k/J}.$$

Como a inversa da transformada de Fourier discreta de um vetor $g \in \mathbb{C}^J$ é representada por

$$\mathcal{F}_j^{-} 1[g] = \frac{1}{J} \sum_{k=0}^{J-1} g_k \, e^{2\pi i k j/J}$$

o operador $\mathcal{C}[\cdot]$ é escrito na forma discreta por:

$$\mathcal{C}[g]_j = \mathcal{F}_j^{-1}[i \coth\left(p_{k+1} D\right) \mathcal{F}_k[g]].$$

Seguindo um procedimento similar mostra-se também que a derivada $g_\xi(\xi)$ discretizada é dada por

$$g_{\xi j} = \mathcal{F}_j^{-1}[ip_{k+1}\mathcal{F}_k[g]].$$

No uso do operador $\mathcal{C}[g]_j$ é importante prestar a atenção para o caso em que ele é aplicado a uma função $g(\xi) = h_\xi(\xi)$. Neste caso ele é escrito como

$$\mathcal{C}[h_\xi]_j = \mathcal{F}_j^{-1}[i\coth(p_{k+1}D)\,\mathcal{F}_k[h_\xi]] = \mathcal{F}_j^{-1}[-p_{k+1}\coth(p_{k+1}D)\,\mathcal{F}_k[h]].$$

Como

$$\lim_{r\to 0} r\coth(rD) = \frac{1}{D},$$

o primeiro modo de Fourier de $\mathcal{C}[h_\xi]_j$ é $-1/D\mathcal{F}_0[h]$. Este valor deve ser passado corretamente ao implementar o código em Matlab.

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA

Estrada Dona Castorina, 110, Jardim Botânico, Rio de Janeiro - RJ
CEP: 22460 - 320
<http://www.impa.br>