



Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

Modelo de Vasicek com Volatilidade Estocástica

Autor: **Oswaldo Paulo Israel Cançado Assunção**

Orientador: **Dr. Jorge P. Zubelli**

Rio de Janeiro

Julho de 2013

Para minha mãe.

Agradecimentos

Agradeço a todos aqueles que me ajudaram e contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho. Faço menção especial à minha mãe que me apoiou desde o começo de minha vida acadêmica, e que sempre acreditou em mim e me incentivou, e incentiva, em meus estudos. Sou eternamente grato a ela.

Agradeço ao meu pai, que também me encorajou a seguir na academia, apesar das dificuldades apresentadas, que sempre se apresenta como um porto seguro em minha vida.

À minha irmã pela companhia em todos os momentos de minha vida, bons e ruins, sempre ao meu lado.

Agradeço também a Camilla, que sempre está ao meu lado, me apoiando, apesar da distância. Esses últimos dois anos aqui no IMPA sem dúvida foram difíceis, mas ela sempre me tranquiliza.

Agradeço aos meus tios Afonso e Lúcia por todo o suporte e ajuda durante esses anos no Rio de Janeiro, sempre tornando minha vida mais fácil e confortável.

Agradeço ao Guto por me incentivar a estudar finanças, em particular por sugerir que eu fizesse esse curso, e também por toda a ajuda dada ao longo desses dois anos no Rio de Janeiro.

Sou grato também aos meus tios e primos, todos sempre presentes em minha vida, que direta e indiretamente contribuíram para o meu crescimento acadêmico.

Agradeço também ao Professor Zubelli, que me ajudou diversas vezes ao longo do curso, especialmente nesses últimos meses, para que esse trabalho fosse concluído.

Gostaria de agradecer imensamente aos colegas de curso Carlos, Cristiane, Rodrigo, Sérgio e Vinícius, além dos demais, que me ajudaram diversas vezes a solucionar problemas, tiraram minhas dúvidas e participaram de discussões interessantes.

Finalmente, gostaria de agradecer aos monitores que tivemos durante esses dois anos, em especial ao Vinícius, Alan e Wanderson.

Resumo

Nesse trabalho obtemos fórmulas fechadas para o preço de *bonds* usando dois modelos populares para a taxa de juros, Vasicek e CIR. Em seguida expandimos esses modelos, adicionando um termo de volatilidade estocástica com dois fatores, seguindo o trabalho de J-P. Fouque, G. Papanicolaou, R. Sircar and K. Solna. Usamos teoria de perturbação e análise assintótica para obter as fórmulas fechadas para o preço de uma *bond*. Finalmente, ajustamos o modelo de Vasicek aos dados do mercado brasileiro, provando que o modelo com volatilidade estocástica, apesar de mais complicado, gera resultados melhores. A melhora nos resultados, porém, não é acompanhada de um gasto computacional, visto que a fórmula obtida é simples e fácil de ser implementada, o que é de grande valor para as instituições financeiras.

Key words: Volatilidade Estocástica, Análise Assintótica, Taxa de Juros, Vasicek, CIR.

Abstract

In this work we obtain closed formulas to price bonds using two popular models for the interest rate, Vasicek and CIR. We then expand these models, adding a two-factor stochastic volatility, following the work of J-P. Fouque, G. Papanicolaou, R. Sircar and K. Solna. We use perturbation theory and asymptotical analysis to obtain closed formulas for the bond price. Finally, we fit those models to brazilian market data, proving that the model with stochastic volatility, though more complicated, gets better results. The improvement on the results, however, does not come with an increased computational cost, since the closed formula obtained is simple and easy to implement, which is of great value to financial institutions.

Key words: Stochastic Volatility, Asymptotical Analysis, Interest Rate, Vasicek, CIR.

Sumário

Sumário	viii
Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiv
1 Introdução	1
1.1 Organização da Dissertação	1
2 Definições Básicas	3
2.1 Processos Estocásticos e Espaço de Probabilidade	3
2.2 Teorema de Girsanov	5
2.3 Fórmula de Feynman-Kac	6
2.4 Alternativa de Fredholm	8
3 Modelos para a Taxa de Juros	11
3.1 Modelo de Vasicek	11
3.2 O Modelo de Vasicek com Volatilidade Estocástica	13
3.3 O Modelo CIR	14
3.4 O Modelo CIR com Volatilidade Estocástica	15
4 Análise Assintótica	17
4.1 Solução para o Modelo de Vasicek	17
4.1.1 Correção da escala rápida	21
4.1.2 Correção de escala lenta	23
4.1.3 Redução de Parâmetros	25
4.2 Solução para o Modelo CIR	30
5 Resultados	33
5.1 Análise da reversão à média	33
5.2 A curva de <i>yield</i> no modelo de Vasicek	35
5.3 A curva de <i>yield</i> no modelo de Vasicek estendido	53

6	Conclusão	75
A	Código Principal	77
B	Função fitvasSV	79
C	Função yieldvasSV	81
	Bibliografia	82

Lista de Figuras

5.1	Ajuste do Variograma. A linha cheia representa a curva teória ajustada e a linha tracejada representa o variograma empírico, obtido à partir dos dados.	35
5.2	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 01/10/2003.	36
5.3	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 08/10/2003.	37
5.4	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 07/07/2004.	38
5.5	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 12/05/2005.	39
5.6	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 12/01/2006.	40
5.7	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 02/08/2006.	41
5.8	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 02/05/2007.	42
5.9	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 01/07/2008.	43
5.10	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 08/07/2008.	44
5.11	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 01/08/2008.	45
5.12	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 15/03/2010.	46
5.13	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 01/06/2010.	47
5.14	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 17/10/2012.	48
5.15	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 23/10/2012.	49

5.16	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 29/01/2013.	50
5.17	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 05/02/2013.	51
5.18	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 01/03/2013.	52
5.19	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 01/10/2003. . .	54
5.20	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 08/10/2003. . .	55
5.21	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 07/07/2004. . .	56
5.22	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 12/05/2005. . .	57
5.23	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 12/01/2006. . .	58
5.24	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 02/08/2006. . .	59
5.25	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 02/05/2007. . .	60
5.26	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 01/07/2008. . .	61
5.27	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 08/07/2008. . .	62
5.28	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 01/08/2008. . .	63
5.29	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 01/06/2009. . .	64
5.30	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 15/03/2010. . .	65
5.31	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 01/06/2010. . .	66
5.32	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 02/01/2012. . .	67
5.33	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 09/01/2012. . .	68
5.34	Gráfico da curva de <i>yield</i> obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 17/10/2012. . .	69

- 5.35 Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 23/10/2012. . . 70
- 5.36 Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 29/01/2013. . . 71
- 5.37 Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 05/02/2013. . . 72
- 5.38 Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 01/03/2013. . . 73

Lista de Tabelas

5.1	Tabela mostrando o erro máximo e erro médio referente a cada gráfico apresentado para o modelo de Vasicek.	53
5.2	Tabela mostrando o erro máximo e erro médio referente a cada gráfico apresentado para o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica.	74

Capítulo 1

Introdução

O estudo da evolução da taxa de juros é importante em finanças pois com sua estrutura a termo é possível precificar *bonds*¹, opções sobre *bonds* e obter a curva de *yield*². Os preços de *bonds* no mercado são geralmente cotados em termos da curva de *yield*.

A taxa de juros instantânea é uma variável não observável. No entanto, podemos inferí-la a partir dos preços de *bonds* e da curva de *yield*. Para isso é necessário criar um modelo para a estrutura a termo da taxa de juros e ajustá-lo aos dados de mercado.

Neste trabalho será feito um estudo de alguns modelos para a taxa de juros, dentre eles o modelo de Vasicek e o modelo CIR. Tentaremos expandir estes modelos clássicos utilizando um termo estocástico na volatilidade, seguindo o trabalho de Fouque, Papanicolaou, Sircar e Solna, em [3]. Supomos uma estrutura de volatilidade com 2 fatores, um representando uma escala de tempo curta, com reversão rápida à média e o outro representando uma escala longa no tempo, com reversão lenta à média. Veremos que esse modelo estendido se ajusta melhor aos dados reais da curva de *yield*.

Verificaremos a reversão rápida à média nos dados brasileiros da curva de *yield*, utilizando a metodologia proposta por Fouque, Papanicolaou, Sircar e Solna em [1]. Após verificar a validade do modelo, prosseguiremos para uma calibração do mesmo, fazendo a estimativa dos parâmetros pelo método dos mínimos quadrados. Por fim, comparamos os modelos originais e os modelos com volatilidade estocástica.

1.1 Organização da Dissertação

Este trabalho tem como foco o estudo dos modelos de taxa de juros. As principais ferramentas utilizadas nesse estudo serão revisadas no Capítulo 2, em que vamos enunciar os principais teoremas e definições utilizados ao longo do texto.

O Capítulo 3, dedica-se aos modelos clássicos para a taxa curta, no caso, os modelos estudados serão o de Vasicek e o CIR. O modelo CIR não foi ajustado, pois apresenta uma complexidade

¹Contratos que pagam juros.

²Um gráfico mostrando a taxa de juros para diferentes maturidades.

computacional superior, tornando o ajuste lento. Portanto ele não seria interessante para ser utilizado no mercado. Ele será estudado apenas por motivos teóricos, visto que sua solução se assemelha bastante à solução do morelo de Vasicek.

No Capítulo 4, será desenvolvida a parte principal do texto, onde será desenvolvida a análise assintótica, proposta em [3]. Nesse contexto, encontraremos fórmulas fechadas para o preço de uma *bond* sob os modelos com volatilidade estocástica analisados. A partir dos preços das *bonds*, será obtida a curva de *yield*, como mostrado no Capítulo 3. A curva de *yield* é utilizada no ajuste dos modelos pois é mais simples ajustá-la aos dados de mercado, já que ela é negociada diretamente através dos contratos futuros de DI, que possuem alta liquidez, o que indica que seu preço está bem cotado. O volume dos contratos negociados em cada dia foi obtido no boletim diário do site www.bmfbovespa.com.br.

No Capítulo 5 será discutida a análise de dados. Nele, será verificada a hipótese de reversão rápida à média, que é assumida no modelo com volatilidade estocástica estudado. Após verificaca a validade do modelo proposto, serão mostrados os ajustes feitos com base na curva de *yield*. Finalmente, serão mostradas as tabelas de erro obtidos nos ajustes, que demonstrará a melhoria do modelo proposto.

Capítulo 2

Definições Básicas

Este capítulo se dedica a descrever os principais conceitos matemáticos utilizados ao longo dessa dissertação. Vamos descrever o espaço de probabilidade usado nos cálculos posteriores e dar as definições básicas de um processo estocástico, em especial, do Movimento Browniano. Finalmente, vamos enunciar os principais teoremas utilizados, em particular, o Teorema de Girsanov e a Fórmula de Feynman-Kac.

2.1 Processos Estocásticos e Espaço de Probabilidade

Definição 1. *Um espaço de probabilidade constitui de um trio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, com as seguintes propriedades:*

1. *Um espaço amostral Ω não-vazio, que é o conjunto de todos os possíveis eventos;*
2. *Uma sigma-álgebra \mathcal{F} dos subconjuntos de Ω ;*
3. *Uma medida de probabilidade \mathbb{P} , satisfazendo:*

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- *se $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ e $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ é disjunto (i.e $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$), então*

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Definição 2. *Seja $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ uma família de sub sigma-álgebras de \mathcal{F} , I um conjunto ordenado com $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ para $s < t$, $s, t \in I$. Então, a família $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ é dita uma filtração.*

Definição 3. *Um conjunto $\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}_{t \in I}$, em que $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ é uma filtração e $\{X_t\}_{t \in I}$ é uma família de variáveis aleatórias em \mathbb{R}^n \mathcal{F}_t -mensuráveis, é chamado um processo estocástico com respeito à filtração $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$.*

Definição 4. *A σ -álgebra gerada por um processo estocástico $\{(X_t)\}$ é definida como:*

$$\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_t^X := \sigma\{X_s | s \leq t, s \in I\}.$$

Definição 5. Um processo estocástico $\{W_t\}_{t \geq 0}$ com caminhos contínuos tal que:

1. $W_0 = 0$ P-q.c.;
2. $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ para $0 \leq s < t$;
3. $W_t - W_s$ e $W_u - W_r$ são independentes para $0 \leq r \leq u \leq s < t$;

é dito um Movimento Browniano unidimensional.

Definição 6. A filtração associada a um Movimento Browniano é definida como:

$$\mathcal{F}_t^W := \sigma\{W_s | 0 \leq s \leq t\}, \quad t \in [0, \infty).$$

Por motivos técnicos, trabalharemos com a filtração \mathbb{P} -aumentada:

$$\mathcal{F}_t := \sigma\{\mathcal{F}_t^W \cup N | N \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(N) = 0\}, \quad t \in [0, \infty).$$

chamada filtração Browniana.

Definição 7. Sejam $\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}_{t \in [0, \infty)}$ e $\{(Y_t, \mathcal{G}_t)\}_{t \in [0, \infty)}$ dois processos estocásticos. Y é dito modificação de X , se tivermos que:

$$\mathbb{P}\{\omega | X_t(\omega) = Y_t(\omega)\} = 1 \text{ para todo } t \geq 0.$$

Definição 8. Sejam $\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}_{t \in [0, \infty)}$ e $\{(Y_t, \mathcal{G}_t)\}_{t \in [0, \infty)}$ dois processos estocásticos. X e Y são ditos indistinguíveis se tivermos que:

$$\mathbb{P}\{\omega | X_t(\omega) = Y_t(\omega) \text{ para todo } t \in [0, \infty)\} = 1.$$

Se X e Y são processos indistinguíveis, Y é também uma modificação de X . A recíproca é falsa. Para a prova ver Korn e Korn [5, p. 16].

Definição 9. Um processo $\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}_{t \in I}$, com $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ para todo $t \in I$, em que I é um conjunto ordenado, é dito um:

1. *supermartingal*, se para todos $s, t \in I$ com $s \leq t$ temos que $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s$ P-q.c.;
2. *submartingal*, se para todos $s, t \in I$ com $s \leq t$ temos que $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s$ P-q.c.;
3. *martingal*, se para todos $s, t \in I$ com $s \leq t$ temos que $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$ P-q.c.

Usando as definições acima, já podemos compreender o processo para a taxa curta de juros da maneira proposta no capítulo 3. Porém, para o apreçamento na medida neutra ao risco, é necessário descrever a mudança de medida de probabilidade. Para isso, vamos enunciar o Teorema de Girsanov na próxima seção.

2.2 Teorema de Girsanov

Nesta seção será enunciado um dos principais teoremas utilizados nessa dissertação, o Teorema de Girsanov, que é utilizado na mudança de medida de probabilidade, sob a qual é possível obter movimentos Brownianos a partir de certos processos de Itô, descritos na medida original. Ele será utilizado frequentemente nos capítulos posteriores.

Antes de enunciá-lo, é necessário definir algumas grandezas. Vale ressaltar que nesta seção estamos supondo a existência de um movimento Browniano m -dimensional.

Definição 10. *Seja $\{(X(t), \mathcal{F}_t)\}_{t \geq 0}$ um processo m -dimensional progressivamente mensurável, em que $\{\mathcal{F}_t\}$ é uma filtração Browniana, com:*

$$\int_0^t X_i^2(s) ds < \infty \quad P - q.c. \quad \text{para todo } t \geq 0, i = 1, \dots, m. \quad (2.2.1)$$

Suponha ainda que

$$Z(t, X) := \exp \left(- \sum_{i=1}^m \int_0^t X_i(s) dW_i(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \|X(s)\|^2 ds \right). \quad (2.2.2)$$

Agora podemos enunciar o Teorema.

Teorema 1. *Seja o processo $Z(t, X)$, definido na Equação (2.2.2), um martingal, defina o processo $\{(W^Q(t), \mathcal{F}_t)\}_{t \geq 0}$ como*

$$W_i^Q(t) := W_i(t) + \int_0^t X_i(s) ds, \quad 1 \leq i \leq m, \quad t \geq 0. \quad (2.2.3)$$

Então, para cada $T \in [0, \infty)$ o processo $\{(W^Q(t), \mathcal{F}_t)\}_{t \in [0, T]}$ é um movimento Browniano m -dimensional em $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q_T)$, em que a medida de probabilidade Q_T é definida por:

$$Q_T(A) := \mathbb{E}(1_A \cdot Z(T, X)) \quad \text{para } A \in \mathcal{F}_T. \quad (2.2.4)$$

A prova desse Teorema está apresentada em Korn e Korn [5, Teorema 3.11].

Vamos ainda enunciar a condição de Novikov, que é utilizada para garantir que o processo $Z(t, X)$, definido em (2.2.2), seja um martingal.

Teorema 2 (Condição de Novikov). *Para que o processo estocástico $Z(t, X)$, (2.2.2), seja um martingal, é necessário e suficiente que:*

$$\mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^t \|X(s)\|^2 ds \right) \right) < \infty \quad (2.2.5)$$

Para a prova verificar [5, p. 98].

2.3 Fórmula de Feynman-Kac

Nesta seção vamos expor a Fórmula de Feynman-Kac, que será usada para resolver o preço de uma *bond* nos Capítulos 3 e 4

Primeiramente, precisamos da definição de uma solução forte de uma Equação Diferencial Estocástica (EDE).

Definição 11. *Considere um processo contínuo, d -dimensional, $\{(X(t), \mathcal{F}_t)\}_{t \geq 0}$, num espaço $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, com:*

$$X(0) = x,$$

$x \in \mathbb{R}^d$ fixado, e

$$X_i(t) = x_i + \int_0^t b_i(s, X(s)) ds + \sum_{j=0}^m \int_0^t \sigma_{ij}(s, X(s)) dW_j(s) \quad (2.3.1)$$

P-q.c. para todo $t \geq 0$, com $i \in \{1, \dots, d\}$, satisfazendo

$$\int_0^t \left(|b_i(s, X(s))| + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}^2(s, X(s)) \right) ds < \infty \quad (2.3.2)$$

P-q.c. para todo $t \geq 0$, com $i \in \{1, \dots, d\}$. Então, $X(t)$ é dito solução forte da seguinte EDE:

$$\begin{aligned} dX(t) &= b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) \\ X(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

em que $b : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ e $\sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d,m}$ são funções dadas.

Essa solução existe e é única sob algumas condições, enunciadas no teorema abaixo.

Teorema 3. *Sejam os coeficientes $b(t, x)$ e $\sigma(t, x)$ da EDE (2.3.3) funções contínuas com*

$$\|b(t, x) - b(t, y)\| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq K \|x - y\| \quad (2.3.4)$$

$$\|b(t, x)\|^2 + \|\sigma(t, x)\|^2 \leq K^2(1 + \|x\|^2) \quad (2.3.5)$$

para todo $t \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}^d$ e a constante $K > 0$. Então existe uma solução forte, e ela é única, a menos de indistinguibilidade.

A prova desse teorema pode ser encontrada em Korn e Korn [5, Teorema 3.22]

Agora vamos definir o operador característico de uma EDE.

Definição 12. *Seja $X(t)$ a única solução da EDE (2.3.3). Para $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$, o operador A_t definido por*

$$(A_t f)(x) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d a_{ik}(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x) + \sum_{i=1}^d b_i(t, x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \quad (2.3.6)$$

com

$$a_{ik}(t, x) := \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(t, x) \sigma_{kj}(t, x), \quad (2.3.7)$$

é dito o operador característico correspondente a $X(t)$.

Finalmente, vamos descrever o problema de Cauchy correspondente a A_t . Seja $T > 0$ fixado. Considere o seguinte problema de Cauchy:

$$-v_t + kv = A_t v + g \quad \text{em } [0, T) \times \mathbb{R}^d \quad (2.3.8)$$

$$v(T, x) = f(x) \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^d \quad (2.3.9)$$

em que

$$f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : [0, T) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad k : [0, T) \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty). \quad (2.3.10)$$

Para assegurar a unicidade de solução da Equação (2.3.8), exigimos que v odebeça uma condição de crescimento polinomial:

$$\max_{0 \leq t \leq T} |v(t, x)| \leq M (1 + \|x\|^{2\mu}), \quad \text{com } M > 0, \quad \mu \geq 1. \quad (2.3.11)$$

Assumimos também as seguintes condições para f e g :

$$|f(x)| \leq L (1 + \|x\|^{2\lambda}), \quad L > 0, \quad \lambda \geq 1 \quad \underline{\text{ou}} \quad f(x) \geq 0. \quad (2.3.12)$$

$$|g(t, x)| \leq L (1 + \|x\|^{2\lambda}), \quad L > 0, \quad \lambda \geq 1 \quad \underline{\text{ou}} \quad g(t, x) \geq 0. \quad (2.3.13)$$

Finalmente podemos enunciar o Teorema que nos dá a fórmula de Feynman-Kac.

Teorema 4. *Seja $v(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ solução contínua do problema de Cauchy acima com $v \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$. Assumimos que as condições (2.3.11), (2.3.12) e (2.3.13) são satisfeitas. Substitua o operador A_t da Equação (2.3.8) pelo operador característico correspondente à única solução $X(t)$ da EDE (2.3.3) com coeficientes contínuos b, σ satisfazendo (2.3.4) e*

$$b_i(t, x), \sigma_{ij}(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{para } i = 1, \dots, d, \quad j = 1, \dots, m.$$

Então, temos a seguinte representação:

$$v(t, x) = \mathbb{E}^{t,x} \left[f(X(T)) \cdot \exp \left(- \int_t^T k(\theta, X(\theta)) d\theta \right) + \int_t^T g(s, X(s)) \cdot \exp \left(- \int_t^s k(\theta, X(\theta)) d\theta \right) ds \right]. \quad (2.3.14)$$

Em particular, $v(t, x)$ é solução única da Equação (2.3.8), com condição final (2.3.9).

2.4 Alternativa de Fredholm

Nesta seção vamos descrever a Alternativa de Fredholm, que será utilizada repetidas vezes no Capítulo 4 quando estivermos desenvolvendo a análise assintótica.

A seguir será apresentada uma formulação bastante elementar da Alternativa de Fredholm, mas que será suficiente para entendermos a aplicação neste trabalho.

Definição 13 (Alternativa de Fredholm). *Considere a seguinte Equação:*

$$Ax = b$$

Então $b \in \text{Im}(A) \Leftrightarrow b \in \text{ker}(A^T)^\perp$

No Capítulo 4, utilizaremos a definição acima para obter uma condição de solubilidade para equações de Poisson.

Capítulo 3

Modelos para a Taxa de Juros

Este capítulo introduz os modelos de Vasicek e CIR que serão estudados ao longo deste trabalho. Na primeira seção será descrito o modelo de Vasicek seguindo [6] e iremos calcular o preço de *bonds* segundo esse mesmo modelo. Em seguida, será apresentada a extensão proposta em [3]. Na Seção 3.3, será descrito o modelo CIR e mostrado como obter os preços de *bonds* com base nesse modelo. Na Seção 3.4, apresentaremos sua extensão com volatilidade estocástica, como proposta em [3].

3.1 Modelo de Vasicek

O modelo proposto por Vasicek, em 1977, supõe que a taxa de juros siga um processo de Markov contínuo, da forma $dr_t = f(r_t, t)dt + \sigma(r_t, t)dW_t$, em que W_t é um movimento Browniano. Em particular, a taxa curta, na medida histórica, segue um processo de Ornstein-Uhlenbeck da seguinte forma:

$$dr_t = a(r_\infty - r_t)dt + \sigma dW_t.$$

No artigo original [6], o prêmio de risco é assumido constante. O prêmio de risco é o excesso de retorno de um ativo com relação a um ativo sem risco. No caso de uma *bond*, esta quantidade é devido ao *spread* de crédito, ou seja, a diferença de retorno dessa *bond* e um suposto ativo sem risco. Em [4], mostra-se que, se o prêmio de risco for uma função afim da taxa curta, então a dinâmica, na medida neutra ao risco, também será um processo de Ornstein-Uhlenbeck. Aqui, porém, vamos considerar, por simplicidade, o prêmio de risco como uma constante λ . Podemos então utilizar o teorema de Girsanov para fazer a mudança para a medida neutra ao risco, fazendo $\theta(t, r_t) = \lambda$. Assim, na medida neutra ao risco, a taxa de juros fica da seguinte forma:

$$dr_t = a(\bar{r} - r_t)dt + \sigma d\widetilde{W}_t. \tag{3.1.1}$$

com $\bar{r} = r_\infty - \frac{\lambda\sigma}{a}$. De posse da dinâmica da taxa curta, podemos calcular o preço de uma *bond*. Sabemos que o preço de não arbitragem, no tempo t , de uma *zero-coupon bond*, com *payoff* $h = 1$ e maturidade em T é dado por:

$$P(t, x; T) = \tilde{\mathbb{E}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} | r_t = x \right]. \quad (3.1.2)$$

Devido à fórmula de Feynman-Kac à Equação (3.1.2), obtem-se que:

$$\mathcal{L}_V P = 0, \quad (3.1.3)$$

sujeito a

$$P(T, x; T) = 1, \quad (3.1.4)$$

em que operador \mathcal{L}_V é dado por:

$$\mathcal{L}_V(\bar{r}, \sigma, a) = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a(\bar{r} - x) \frac{\partial}{\partial x} - x, \quad (3.1.5)$$

com volatilidade σ e taxa de reversão à média a .

A Equação (3.1.5), apesar de complicada, possui uma solução afim. Se supusermos uma solução da forma $P(t, x; T) = A(t, T)e^{-B(t, T)x}$ e a substituirmos na Equação (3.1.3), teremos as seguinte equações para A e B :

$$\frac{dB(\tau)}{d\tau} = -aB(\tau) + 1, \quad \text{com } B(0) = 0, \quad (3.1.6)$$

$$\frac{A'(\tau)}{A(\tau)} = \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(\tau) - a\bar{r}B(\tau), \quad \text{com } A(0) = 0. \quad (3.1.7)$$

Usando a mudança de variável $\tau = T - t$, a solução dessas equações é dada por:

$$B(\tau) = \frac{1 - e^{-a\tau}}{a}, \quad (3.1.8)$$

$$A(\tau) = \exp \left(- \left[R_\infty(\tau - B(\tau)) + \frac{\sigma^2}{4a} B^2(\tau) \right] \right). \quad (3.1.9)$$

De posse desses valores, o problema da precificação de um *bond* está concluído, basta substituí-los na equação para $P(t, x; T)$.

O Modelo de Vasicek da maneira proposta nesta seção não produz bons resultados, como será mostrado no Capítulo 5. De fato, o modelo da forma apresentada aqui não costuma ser utilizado por instituições financeiras, mas sim uma modificação deste. Em geral utiliza-se o Modelo de Vasicek com dois fatores. Neste trabalho, será estudado um caso particular do modelo de dois fatores, que utiliza dois fatores na volatilidade, aumentando assim o número de parâmetros. Será demonstrado ao fim desse trabalho que o modelo com dois fatores se ajusta melhor aos dados do mercado brasileiro.

3.2 O Modelo de Vasicek com Volatilidade Estocástica

Nesta seção será discutido o modelo de Vasicek da forma proposta em [3]. A dinâmica proposta para a taxa de juros segue novamente um processo de Ornstein-Uhlenbeck, porém o termo da volatilidade é dado por um processo estocástico de dois fatores, como mostrado nas equações:

$$\begin{aligned} dr_t &= (a(r_\infty - r_t) - \lambda(Y_t, Z_t)f(Y_t, Z_t)) dt + f(Y_t, Z_t)d\widetilde{W}_t^0, \\ dY_t &= \left(\frac{1}{\epsilon}\alpha(Y_t) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\beta(Y_t)\Lambda_1(Y_t, Z_t) \right) dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\beta(Y_t)d\widetilde{W}_t^1, \\ dZ_t &= \left(\delta c(Z_t) - \sqrt{\delta}g(Z_t)\Lambda_2(Y_t, Z_t) \right) dt + \sqrt{\delta}g(Z_t)d\widetilde{W}_t^2. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Observe que a dinâmica é dada na medida neutra ao risco. O modelo é proposto dessa forma, pois existem evidências empíricas para a reversão rápida e lenta à média para diversos tipos de contrados, dentre eles os contratos das taxas de juros. Para uma discussão mais detalhada, ver [1, Seção 5]. Os parâmetros pequenos ϵ e δ representam as escalas de reversão à média. A escala curta é da ordem de ϵ , e a escala longa é da ordem de $\frac{1}{\delta}$.

A correlação entre os Brownianos $(\widetilde{W}_t^0, \widetilde{W}_t^1, \widetilde{W}_t^2)$ é dada por:

$$\langle d\widetilde{W}_t^0, d\widetilde{W}_t^1 \rangle = \rho_1 dt, \quad (3.2.2)$$

$$\langle d\widetilde{W}_t^0, d\widetilde{W}_t^2 \rangle = \rho_2 dt, \quad (3.2.3)$$

$$\langle d\widetilde{W}_t^1, d\widetilde{W}_t^2 \rangle = \rho_{12} dt. \quad (3.2.4)$$

Sabemos que o processo (r_t, Y_t, Z_t) é Markoviano sob a medida neutra ao risco $\widetilde{\mathbb{P}}$. O preço da *bond* é então função do valor presente da taxa de juros.

$$P^{\epsilon, \delta}(t, r_t, Y_t, Z_t; T) = \tilde{\mathbb{E}} \left[e^{-\int_t^T r_t ds} | r_t, Y_t, Z_t \right]. \quad (3.2.5)$$

Para calcular o preço de uma *bond* é necessário especificar todos os parâmetros das equações acima. Esse cálculo será apresentado no capítulo seguinte, em que será feita a análise assintótica, a exemplo de [3]. Veremos que as técnicas apresentadas por Papanicolaou *et al* em [3] reduzem significativamente o número de parâmetros a serem estimados.

3.3 O Modelo CIR

Nesta seção será descrito brevemente o modelo CIR, apresentado em 1985 em [2]. Nesse artigo, a dinâmica proposta para a taxa curta, na medida física, é a seguinte:

$$dr_t = \kappa^*(r_\infty - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t.$$

Para que a forma funcional da taxa curta seja preservada nesse caso, o prêmio de risco deve ser da forma $\lambda(t, r_t) = a\sqrt{r_t} + b/\sqrt{r_t}$, como mostrado em [4]. Como no modelo de Vasicek, na Seção 3.1, usaremos o teorema de Girsanov, com $\theta(t, r_t) = \lambda(t, r_t)$. Dessa forma, a taxa curta na medida neutra ao risco é dada por:

$$dr_t = \kappa(\bar{r} - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}d\tilde{W}_t, \quad (3.3.1)$$

com $\kappa = \kappa^* + a\sigma$ e $\kappa\bar{r} = \kappa^*r_\infty - b\sigma$. Logo, a taxa curta no modelo CIR é afim, pela Definição 14.

O preço de uma *bond* é dado, novamente, pela Equação (3.1.2). Ela pode ser resolvida aplicando a fórmula de Feynman-Kac, como feito para o modelo de Vasicek. Porém, neste caso, iremos resolvê-la utilizando a proposição abaixo.

Definição 14. *Um modelo é dito afim se o preço de um zero-coupon bond é dado por $P(t, x; T) = A(t, T)e^{-B(t, T)x}$, para funções determinísticas A e B .*

Proposição 1. *Suponha que a taxa curta r_t seja dada por $dr_t = a(t, r_t)dt + b(t, r_t)d\tilde{W}_t$ sob medida neutra ao risco, com $a(t, r_t)$ e $b(t, r_t)$ da seguinte forma:*

$$a(t, r_t) = \kappa(t)r + \eta(t), \quad (3.3.2)$$

$$b(t, r_t) = \sqrt{\gamma(t)r + \delta(t)}, \quad (3.3.3)$$

com $\kappa, \eta, \gamma, \delta$ determinísticas. Então este modelo é afim, e as funções A e B satisfazem as equações de Riccati:

$$\frac{dB}{dt} = -\kappa(t)B - \frac{1}{2}\gamma(t)B^2 + 1, \quad (3.3.4)$$

$$\frac{dA}{dt} = -\eta(t)B - \frac{1}{2}\delta(t)B^2, \quad (3.3.5)$$

para $0 \leq t < T$, com condições de contorno $B(T, T) = A(T, T) = 0$.

Para a prova, ver [4, Proposição 3.2.1]. Portanto, pela Definição 14, vemos que o modelo CIR é afim, logo sua solução pode ser obtida usando as equações de Riccati, assim obtemos A e B da seguinte forma:

$$A(\tau) = \left[\frac{2\gamma e^{\frac{1}{2}(\gamma+\kappa)\tau}}{(\gamma+\kappa)(e^{\gamma\tau}-1) + 2\gamma} \right]^{2\kappa\bar{r}/\sigma^2}, \quad (3.3.6)$$

$$B(\tau) = \left[\frac{2(e^{\gamma\tau}-1)}{(\gamma+\kappa)(e^{\gamma\tau}-1) + 2\gamma} \right], \quad (3.3.7)$$

$$\gamma = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}.$$

Uma vez conhecidos A e B , o problema de precificar *bonds* está completo para o modelo CIR, bastando substituir esses valores na equação de $P(t, r_t; T)$.

3.4 O Modelo CIR com Volatilidade Estocástica

Nesta seção definiremos o modelo CIR com volatilidade estocástica, como em [3]. A solução explícita desse modelo será desenvolvida no próximo capítulo, através de uma análise assintótica das equações diferenciais.

A dinâmica desse modelo, na medida neutra ao risco, é definida pelas seguintes equações:

$$dr_t = (\kappa(\bar{r} - r_t)) dt + \sqrt{r_t} f(Y_t, Z_t) d\widetilde{W}_t^0, \quad (3.4.1)$$

$$dY_t = \left(\frac{r_t}{\epsilon} \alpha(Y_t) \right) dt + \sqrt{\frac{r_t}{\epsilon}} \beta(Y_t) d\widetilde{W}_t^1,$$

$$dZ_t = r_t \delta c(Z_t) dt + \sqrt{r_t} \delta g(Z_t) d\widetilde{W}_t^2.$$

A correlação entre os Brownianos $(\widetilde{W}_t^0, \widetilde{W}_t^1, \widetilde{W}_t^2)$ é dada por:

$$\langle d\widetilde{W}_t^0, d\widetilde{W}_t^1 \rangle = \rho_1 dt, \quad (3.4.2)$$

$$\langle d\widetilde{W}_t^0, d\widetilde{W}_t^2 \rangle = \rho_2 dt, \quad (3.4.3)$$

$$\langle d\widetilde{W}_t^1, d\widetilde{W}_t^2 \rangle = \rho_{12} dt. \quad (3.4.4)$$

Note que as equações para a volatilidade são dependentes de r_t . Essa modificação foi feita para que o modelo se mantenha afim.

Capítulo 4

Análise Assintótica

Este capítulo dedica-se ao desenvolvimento da solução para o preço de uma *bond* utilizando os modelos Vasicek e CIR com volatilidade estocástica. A técnica utilizada para o desenvolvimento da solução é a análise assintótica, como foi desenvolvido em [3]. A equação diferencial parcial para cada problema será escrita em função dos parâmetros pequenos ϵ e δ , definidos na dinâmica da taxa curta, no Capítulo 3. É conveniente escrever o operador diferencial em termos desses parâmetros, pois eles são considerados pequenos e, por isso, alguns termos serão desprezados no cálculo.

4.1 Solução para o Modelo de Vasicek

Para encontrar o valor da *bond* segundo esse modelo, vamos usar a fórmula de Feynman-Kac multidimensional, descrita no Capítulo (2), à seguinte equação, que define o preço de não-arbitragem de uma *bond*:

$$P^{\epsilon, \delta}(t, x, Y_t, Z_t; T) = \tilde{\mathbb{E}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} | r_t = x, Y_t, Z_t \right]. \quad (4.1.1)$$

Pelo Teorema 4, obtemos a seguinte equação diferencial parcial para P:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V^{\epsilon, \delta} P^{\epsilon, \delta} &= \frac{\partial P^{\epsilon, \delta}}{\partial t} + \mathcal{L}_V P^{\epsilon, \delta} - x P^{\epsilon, \delta}, \\ P^{\epsilon, \delta}(T, x, y, z; T) &= 1, \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

em que a taxa curta é denotada por x e \mathcal{L}_V é o gerador infinitesimal do processo (3.2.1), do Capítulo 3. É conveniente reescrever o operador diferencial acima decompondo-o em termos de ϵ e δ :

$$\mathcal{L}_V^{\epsilon, \delta} = \frac{1}{\epsilon} \mathcal{L}_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \sqrt{\delta} \mathcal{M}_1 + \delta \mathcal{M}_2 + \sqrt{\frac{\delta}{\epsilon}} \mathcal{M}_3. \quad (4.1.3)$$

Os operadores \mathcal{L}_0 , \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 , \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 e \mathcal{M}_3 são definidos abaixo, em termos dos parâmetros do modelo:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \beta^2(y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \alpha(y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad (4.1.4)$$

$$\mathcal{L}_1 = \beta(y) \left(\rho_1 f(y, z) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \Lambda_1(y, z) \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (4.1.5)$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} f^2(y, z) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (a(r_\infty - r_t) - \lambda(Y_t, Z_t) f(Y_t, Z_t)) \frac{\partial}{\partial x} - x, \quad (4.1.6)$$

$$\mathcal{M}_1 = g(z) \left(\rho_2 f(y, z) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} - \Lambda_2(y, z) \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (4.1.7)$$

$$\mathcal{M}_2 = \frac{1}{2} g^2(z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + c(z) \frac{\partial}{\partial z}, \quad (4.1.8)$$

$$\mathcal{M}_3 = \beta(y) \rho_{12} g(z) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}. \quad (4.1.9)$$

Vamos prosseguir com a solução da Equação (4.1.2). A aproximação de primeira ordem para o preço da *bond*, já que os valores de ϵ e δ são pequenos, é dada por:

$$P^{\epsilon, \delta} \approx \tilde{P}^{\epsilon, \delta} = P_0 + \sqrt{\epsilon} P_{1,0} + \sqrt{\delta} P_{0,1}, \quad (4.1.10)$$

onde $P_{1,0}$ e $P_{0,1}$ são as correções de primeira ordem devido as escalas rápida e lenta, respectivamente. O método de perturbação da solução é utilizado para resolvermos a Equação (4.1.2), pois com ele obtemos fórmulas fechadas para o preço calculado. Obter fórmulas fechadas é particularmente interessante ao ajustar o modelo aos dados de mercado, pois torna o problema de minimização, que será descrito no Capítulo 5, mais simples e rápido. Apesar de uma solução obtida pelo método de perturbação ser aproximada, veremos adiante que é uma aproximação suficientemente boa. Para uma discussão detalhada da precisão dessa aproximação, ver [3, Seção 4.5].

Para calcular os termos da Equação (4.1.10), vamos expandir o preço $\tilde{P}^{\epsilon, \delta}$ em potências de δ :

$$\tilde{P}^{\epsilon, \delta} = P_0^\epsilon + \sqrt{\delta} P_1^\epsilon + \delta P_2^\epsilon + \dots \quad (4.1.11)$$

Substituindo essa expansão na Equação (4.1.2), obtemos a seguinte equação, depois de agrupar em potências de δ :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\epsilon} \mathcal{L}_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \right) P_0^\epsilon + \sqrt{\delta} \left\{ \left(\frac{1}{\epsilon} \mathcal{L}_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \right) P_1^\epsilon \right. \\ & \left. + \left(\mathcal{M}_1 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \mathcal{M}_3 \right) P_0^\epsilon \right\} + \dots = 0. \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

Igualando cada termo da equação acima a zero, obtemos as seguintes Equações para P_0^ϵ e P_1^ϵ :

$$\left(\frac{1}{\epsilon} \mathcal{L}_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \right) P_0^\epsilon = 0, \quad (4.1.13)$$

$$P_0^\epsilon(T, x, y, z) = 1. \quad (4.1.14)$$

e

$$\sqrt{\delta} \left(\frac{1}{\epsilon} \mathcal{L}_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \right) P_1^\epsilon = - \left(\mathcal{M}_1 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \mathcal{M}_3 \right) P_0^\epsilon, \quad (4.1.15)$$

$$P_1^\epsilon(T, x, y, x) = 0. \quad (4.1.16)$$

Então P_0^ϵ e P_1^ϵ são as soluções das Equações (4.1.13) e (4.1.15), respectivamente.

Para resolver o termo dominante da Equação (4.1.11), vamos expandir o termo P_0^ϵ em potências de $\sqrt{\epsilon}$:

$$P_0^\epsilon = P_0 + \sqrt{\epsilon} P_{1,0} + \epsilon P_{2,0} + \epsilon^{3/2} P_{3,0} + \dots \quad (4.1.17)$$

Agora vamos substituir a expansão (4.1.17) na Equação (4.1.13):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} \mathcal{L}_0 P_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} (\mathcal{L}_0 P_{1,0} + \mathcal{L}_1 P_0) + (\mathcal{L}_0 P_{2,0} + \mathcal{L}_1 P_{1,0} + \mathcal{L}_2 P_0) \\ & + \sqrt{\epsilon} (\mathcal{L}_0 P_{3,0} + \mathcal{L}_1 P_{2,0} + \mathcal{L}_2 P_{1,0}) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

Agora, como o parâmetro ϵ é pequeno, podemos igualar cada um desses termos a zero separadamente. Vamos analisar primeiro o termo de ordem ϵ^{-1} :

$$\mathcal{L}_0 P_0 = 0. \quad (4.1.19)$$

A equação acima é uma EDO na variável y , e tem como soluções uma constante em y e uma função com crescimento exponencial, que não nos interessa. Logo, escolhemos $P_0 = P_0(t, x, z)$ como constante em y .

Passamos agora ao termo de ordem $\epsilon^{-1/2}$:

$$\mathcal{L}_0 P_{1,0} + \mathcal{L}_1 P_0 = 0. \quad (4.1.20)$$

O operador \mathcal{L}_1 toma derivadas em y , por isso o termo $\mathcal{L}_1 P_0$ vale zero. Logo:

$$\mathcal{L}_0 P_{1,0} = 0. \quad (4.1.21)$$

Como no caso de P_0 , escolhemos $P_{1,0}$ independente de y , então a equação acima é satisfeita.

Vamos agora ao termo de ordem 1. Sabemos que $\mathcal{L}_1 P_{1,0} = 0$ pois \mathcal{L}_1 toma derivadas em y e $P_{1,0}$ é constante em y , logo:

$$\mathcal{L}_0 P_{2,0} + \mathcal{L}_2 P_0 = 0. \quad (4.1.22)$$

A Equação (4.1.22) é uma equação de Poisson para $P_{2,0}$ na variável y . Para que essa equação seja solúvel, é necessário satisfazer a alternativa de Fredholm, ver 13, ou seja, $\mathcal{L}_2 P_0$ deve estar no complemento ortogonal de \mathcal{L}_0 . Equivalentemente, $\mathcal{L}_2 P_0$ deve ser centrado com relação a distribuição invariante do processo com gerador infinitesimal \mathcal{L}_0 : $\langle \mathcal{L}_2 P_0 \rangle = 0$. A notação de *brackets* indica a integral com respeito à distribuição invariante Ψ do processo Y^1 .

Como P_0 não depende de y , temos que $\langle \mathcal{L}_2 P_0 \rangle = \langle \mathcal{L}_2 \rangle P_0$, em que

$$\langle \mathcal{L}_2 \rangle = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a(\bar{r} - x) \frac{\partial}{\partial x} - x. \quad (4.1.23)$$

Esse é o operador de Vasicek em que os termos efetivos $\bar{\sigma}(z)$ e $\bar{r}(z)$ são dados por:

¹Veja [3, p. 128]

$$\bar{\sigma}^2(z) = \langle f^2(\cdot, z) \rangle = \int f^2(y, z) \Phi(dy), \quad (4.1.24)$$

$$\bar{r}(z) = r_\infty - \frac{\langle f(\cdot, z) \lambda(\cdot, z) \rangle}{a}. \quad (4.1.25)$$

Então, definimos P_0 como a única solução do seguinte problema:

$$\mathcal{L}_V(\bar{r}(z), \bar{\sigma}(z), a)P_0 = 0, \quad (4.1.26)$$

$$P_0(T, x; T, z) = 1.$$

O termo P_0 é então a solução do problema de Vasicek, resolvido no Capítulo 3. Logo:

$$P(t, x; T) = A(t, T)e^{-B(t, T)x}, \quad (4.1.27)$$

com B definido na Equação (3.1.8) e A definido na Equação (3.1.9), substituindo os valores de σ por $\bar{\sigma}(z)$ e \bar{r} por $\bar{r}(z)$.

Agora precisamos resolver os termos de correção com relação às escalas curta e rápida.

4.1.1 Correção da escala rápida

Vamos agora derivar uma equação para o termo de correção da escala rápida. Continuando com a análise dos termos da Equação (4.1.18), o termo de ordem $\sqrt{\epsilon}$ nos dá a seguinte equação:

$$\mathcal{L}_0 P_{3,0} + \mathcal{L}_1 P_{2,0} + \mathcal{L}_2 P_{1,0} = 0, \quad (4.1.28)$$

e a condição de solubilidade, ver 13, dessa equação fica

$$\langle \mathcal{L}_1 P_{2,0} + \mathcal{L}_2 P_{1,0} \rangle = 0. \quad (4.1.29)$$

Sabendo que $P_{1,0}$ não depende de y , podemos reescrever a equação acima como

$$\langle \mathcal{L}_1 P_{2,0} \rangle + \langle \mathcal{L}_2 \rangle P_{1,0} = 0. \quad (4.1.30)$$

Voltando à Equação (4.1.22), temos que:

$$\mathcal{L}_0 P_{2,0} + \mathcal{L}_2 P_0 = 0 = \langle \mathcal{L}_2 \rangle P_0, \quad (4.1.31)$$

logo

$$P_{2,0} = -\mathcal{L}_0^{-1}(\mathcal{L}_2 - \langle \mathcal{L}_2 \rangle)P_0 + c(t, x, z), \quad (4.1.32)$$

com um fator aditivo $c(t, x, z)$ que não depende de y e não interfere em $P_{1,0}$, já que o operador \mathcal{L}_1 toma derivadas com respeito a y . Finalmente, temos que

$$\langle \mathcal{L}_1 P_{2,0} \rangle = -\langle \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_0^{-1}(\mathcal{L}_2 - \langle \mathcal{L}_2 \rangle) \rangle P_0. \quad (4.1.33)$$

De agora em diante, vamos denotar o operador definido pela Equação (4.1.33) por $-\mathcal{A}_V$. Então, voltando à Equação (4.1.30), temos a seguinte EDP:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_2 \rangle P_{1,0} &= -\langle \mathcal{L}_1 P_{2,0} \rangle, \\ P_{1,0} &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.34)$$

Definindo $\sqrt{\epsilon}P_{1,0} = P_{1,0}^\epsilon$ e multiplicando o operador em (4.1.33) por $\sqrt{\epsilon}$, obtemos a seguinte equação para o termo $P_{1,0}^\epsilon$:

$$\mathcal{L}_V(\bar{r}(z), \bar{\sigma}(z), a)\tilde{P}_{1,0}^\epsilon = \mathcal{A}_V P_0, \quad (4.1.35)$$

$$\tilde{P}_{1,0}^\epsilon = 0; \quad (4.1.36)$$

em que $\mathcal{L}_V(\bar{r}(z), \bar{\sigma}(z), a) = \langle \mathcal{L}_2 \rangle$.

Para calcular o operador \mathcal{A}_V , considere as funções $\phi(y, z)$ e $\psi(y, z)$ soluções das seguintes equações de Poisson com respeito à variável y :

$$\mathcal{L}_0 \phi(y, z) = f^2(y, z) - \bar{\sigma}^2(z), \quad (4.1.37)$$

$$\mathcal{L}_0 \psi(y, z) = \lambda(y, z)f(y, z) - \langle \lambda(\cdot, z)f(\cdot, z) \rangle. \quad (4.1.38)$$

Então, temos que:

$$\mathcal{L}_0^{-1}(\mathcal{L}_2 - \langle \mathcal{L}_2 \rangle) = \frac{1}{2}\phi(y, z)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \psi(y, z)\frac{\partial}{\partial x}, \quad (4.1.39)$$

e finalmente

$$\mathcal{L}_1\mathcal{L}_0^{-1}(\mathcal{L}_2 - \langle \mathcal{L}_2 \rangle) \quad (4.1.40)$$

$$= \beta(y) \left(\rho_1 f(y, z)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \Lambda_1(y, z)\frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{2}\phi(y, z)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \psi(y, z)\frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (4.1.41)$$

$$= \beta(y)\Lambda_1(y, z)\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \left(\beta(y)\rho_1 f(y, z)\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{1}{2}\beta(y)\Lambda_1(y, z)\frac{\partial\phi}{\partial y} \right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\beta(y)\rho_1 f(y, z)\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial^3}{\partial x^3}. \quad (4.1.42)$$

Por fim, vamos tomar a média da expressão acima em y com respeito a distribuição invariante Ψ e multiplicá-la por $\sqrt{\epsilon}$, obtendo a seguinte fórmula para o operador \mathcal{A}_V :

$$\mathcal{A}_V = V_1^\epsilon(z)\frac{\partial}{\partial x} + V_2^\epsilon(z)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_3^\epsilon(z)\frac{\partial^3}{\partial x^3}, \quad (4.1.43)$$

com os seguintes parâmetros:

$$V_1^\epsilon(z) = \sqrt{\epsilon} \left\langle \beta\Lambda_1 \frac{\partial\psi}{\partial y} \right\rangle, \quad (4.1.44)$$

$$V_2^\epsilon(z) = -\rho_1\sqrt{\epsilon} \left\langle \beta f \frac{\partial\psi}{\partial y} \right\rangle + \frac{\sqrt{\epsilon}}{2} \left\langle \beta\Lambda_1 \frac{\partial\phi}{\partial y} \right\rangle, \quad (4.1.45)$$

$$V_3^\epsilon(z) = \frac{\rho_1\sqrt{\epsilon}}{2} \left\langle \beta f \frac{\partial\phi}{\partial y} \right\rangle. \quad (4.1.46)$$

Dessa maneira o problema da correção de primeira ordem com escala rápida está definido.

4.1.2 Correção de escala lenta

Vamos agora descrever o problema da correção de primeira ordem com escala lenta. Para isso, expandiremos o termo P_1^ϵ em termos de $\sqrt{\epsilon}$:

$$P_1^\epsilon = P_{0,1} + \sqrt{\epsilon}P_{1,1} + \epsilon P_{2,1} + \epsilon^{3/2}P_{3,1} + \dots \quad (4.1.47)$$

Substituindo as aproximações (4.1.47) e (4.1.17) na EDP (4.1.15), temos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} \mathcal{L}_0 P_{0,1} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} (\mathcal{L}_0 P_{1,1} + \mathcal{L}_1 P_{0,1} + \mathcal{M}_3 P_0) \\ & + (\mathcal{L}_0 P_{2,1} + \mathcal{L}_1 P_{1,1} + \mathcal{L}_2 P_{0,1}) + \mathcal{M}_1 P_0 + \mathcal{M}_3 P_{1,0} \\ & + \sqrt{\epsilon} (\mathcal{L}_0 P_{3,1} + \mathcal{L}_1 P_{2,1} + \mathcal{L}_2 P_{1,1} + \mathcal{M}_1 P_{1,0} + \mathcal{M}_3 P_{2,0}) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (4.1.48)$$

Faremos uma análise análoga àquela feita na seção 4.1.1, igualando cada termo a zero. O termo de ordem ϵ^{-1} nos dá:

$$\mathcal{L}_0 P_{0,1} = 0. \quad (4.1.49)$$

Novamente, escolhemos $P_{0,1}$ constante em y .

Vamos agora ao termo de ordem $\sqrt{\epsilon}$. Veja que $\mathcal{L}_1 P_{0,1} = 0$ e $\mathcal{M}_3 P_0 = 0$, já que esses operadores tomam derivadas em y . Logo a equação fica reduzida a

$$\mathcal{L}_0 P_{1,1} = 0. \quad (4.1.50)$$

Escolhemos $P_{1,1}$ também independente de y .

Analisando o termo de ordem ϵ , vemos que $\mathcal{M}_3 P_{1,0} = 0$ e $\mathcal{L}_1 P_{1,1} = 0$. Assim, obtemos a equação

$$\mathcal{L}_0 P_{2,1} + \mathcal{L}_2 P_{0,1} + \mathcal{M}_1 P_0 = 0. \quad (4.1.51)$$

que é uma equação de Poisson para $P_{2,1}$ na variável y . Novamente, usando a condição de solubilidade, ver 13, temos que:

$$\langle \mathcal{L}_2 P_{0,1} + \mathcal{M}_1 P_0 \rangle = 0. \quad (4.1.52)$$

Como P_0 e $P_{0,1}$ são independentes de y :

$$\langle \mathcal{L}_2 \rangle P_{0,1} = - \langle \mathcal{M}_1 \rangle P_0. \quad (4.1.53)$$

Definindo $\sqrt{\delta}P_{0,1} = P_{1,0}^\delta$ e multiplicando o operador acima por $\sqrt{\delta}$, obtemos as seguintes Equações para $\tilde{P}_{1,0}^\delta$:

$$\mathcal{L}_V(\bar{r}(z), \bar{\sigma}(z), a)\tilde{P}_{0,1}^\delta = -\langle \mathcal{M}_1 \rangle P_0, \quad (4.1.54)$$

$$\tilde{P}_{0,1}^\delta = 0. \quad (4.1.55)$$

O operador $\langle \mathcal{M}_1 \rangle$ é dado por:

$$\langle \mathcal{M}_1 \rangle = \sqrt{\delta} \left(\rho_2 g \langle f \rangle \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - g \langle \Lambda_2 \rangle \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (4.1.56)$$

Como o operador acima atua em funções que dependem de z apenas através dos parâmetros $\bar{\sigma}$ e \bar{r} , é natural trocar as derivadas em z por derivadas em $\bar{\sigma}$ e \bar{r} , logo

$$\langle \mathcal{M}_1 \rangle = V_{0,\sigma}^\delta(z) \frac{\partial}{\partial \sigma} + V_{0,r}^\delta(z) \frac{\partial}{\partial r} + V_{1,\sigma}^\delta(z) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \sigma} + V_{1,r}^\delta(z) \frac{\partial^2}{\partial x \partial r}, \quad (4.1.57)$$

em que:

$$V_{0,\sigma}^\delta(z) = -g(z)\sqrt{\delta} \langle \Lambda_2(\cdot, z) \rangle \bar{\sigma}'(z), \quad (4.1.58)$$

$$V_{0,r}^\delta(z) = -g(z)\sqrt{\delta} \langle \Lambda_2(\cdot, z) \rangle \bar{r}'(z), \quad (4.1.59)$$

$$V_{1,\sigma}^\delta(z) = \rho_2 g(z)\sqrt{\delta} \langle f(\cdot, z) \rangle \bar{\sigma}'(z), \quad (4.1.60)$$

$$V_{1,r}^\delta(z) = \rho_2 g(z)\sqrt{\delta} \langle f(\cdot, z) \rangle \bar{r}'(z). \quad (4.1.61)$$

Portanto o problema da correção de primeira ordem para o termo de escala lenta está bem definido.

4.1.3 Redução de Parâmetros

Voltando à solução para o preço da *bond* (4.1.10), já temos as equações para o termo dominante e os termos de correção de primeira ordem:

$$\tilde{P}^{\epsilon,\delta} = P_0 + \sqrt{\epsilon}P_{1,0} + \sqrt{\delta}P_{0,1}. \quad (4.1.62)$$

Podemos agora agrupar as correções de primeira ordem, afim de reduzir os parâmetros a serem estimados. Em princípio, esse agrupamento não pode ser feito, devido à separação assintótica de ϵ e δ . Porém, nesse caso, os parâmetros são estatisticamente indistinguíveis, logo podemos agrupá-los. Para uma discussão mais detalhada ver [3, Seções 4.3,4.4].

Seja:

$$P_1^{\epsilon,\delta} = \sqrt{\epsilon}P_{1,0} + \sqrt{\delta}P_{0,1}, \quad (4.1.63)$$

então, $P_1^{\epsilon,\delta}$ é definido como a solução da seguinte problema de valor final:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V(\bar{\sigma}(z), \bar{r}(z), a)P_1^{\epsilon,\delta} &= -\mathcal{H}_V^{\epsilon,\delta}P_0, \\ P_1^{\epsilon,\delta}(T, x, z) &= 0, \end{aligned} \quad (4.1.64)$$

em que o operador $\mathcal{H}_V^{\epsilon,\delta}$ é definido por:

$$\mathcal{H}_V^{\epsilon,\delta} = \sum_{k=1}^3 V_k^\epsilon \frac{\partial^k}{\partial x^k} + \left(V_{0,r}^\delta \frac{\partial}{\partial r} + V_{1,r}^\delta \frac{\partial^2}{\partial r \partial x} \right) + \left(V_{0,\sigma}^\delta \frac{\partial}{\partial \sigma} + V_{1,\sigma}^\delta \frac{\partial^2}{\partial \sigma \partial x} \right). \quad (4.1.65)$$

O operador $\mathcal{H}_V^{\epsilon,\delta}$ depende de sete parâmetros, que dependem de z . Assim, podemos reduzir o número de parâmetros ainda mais, defina:

$$\sigma^*(z) = \sqrt{\bar{\sigma}^2(z) + 2V_2^\epsilon(z)}, \quad (4.1.66)$$

$$r^*(z) = \bar{r}(z) + V_1^\epsilon(z)/a. \quad (4.1.67)$$

Então, eliminando a dependência em z , temos as seguintes igualdades:

$$\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 \frac{\partial^2 \tilde{P}^{\epsilon,\delta}}{\partial x^2} + V_2^\epsilon \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\sigma^{*2} \frac{\partial^2 \tilde{P}^{\epsilon,\delta}}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\epsilon + \delta), \quad (4.1.68)$$

$$a\bar{r} \frac{\partial \tilde{P}^{\epsilon,\delta}}{\partial x} + V_1^\epsilon \frac{\partial P_0}{\partial x} = ar^* \frac{\partial \tilde{P}^{\epsilon,\delta}}{\partial x} + \mathcal{O}(\epsilon + \delta). \quad (4.1.69)$$

Podemos então substituir, com o mesmo grau de precisão², $\tilde{P}^{\epsilon,\delta}$ por $P_0^* + P_1^*$, que são definidos como soluções de:

²Ver argumento em [3, Seção 4.3]

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V(\sigma^*, r^*, a)P_0^* &= 0, \\ P_0^*(T, x) &= 1,\end{aligned}\tag{4.1.70}$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V(\sigma^*, r^*, a)P_1^* &= -\mathcal{H}_V^*P_0^*, \\ P_1^*(T, x) &= 0,\end{aligned}\tag{4.1.71}$$

com o operador reduzido:

$$\mathcal{H}_V^* = V_3^\epsilon \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \left(V_{0,r}^\delta \frac{\partial}{\partial r} + V_{1,r}^\delta \frac{\partial^2}{\partial r \partial x} \right) + \left(V_{0,\sigma}^\delta \frac{\partial}{\partial \sigma} + V_{1,\sigma}^\delta \frac{\partial^2}{\partial \sigma \partial x} \right).\tag{4.1.72}$$

obtido substituindo as identidades (4.1.68) e (4.1.69) no operador (4.1.65). A solução do termo P_0^* já é conhecida, pois foi obtida no Capítulo 3. Para resolver o termo P_1^* , definido como solução da Equação (4.1.71), vamos aplicar o operador \mathcal{H}_V^* em P_0^* :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_V^*P_0^*(t, x; t + \tau, z) &= \\ &= - \left[B^3(\tau) \left(-V_3^\epsilon + \frac{\sigma^* V_{1,\sigma}^\delta}{2a} \right) + B^2(\tau) \left(-V_{1,r}^\delta - \frac{\sigma^* V_{0,\sigma}^\delta}{2a} + \frac{\sigma^* V_{1,\sigma}^\delta}{a^2} \right) \right. \\ &+ B(\tau) \left(V_{0,r}^\delta + \frac{\sigma^* V_{0,\sigma}^\delta}{a^2} \right) + \tau \left(-V_{0,r}^\delta + \frac{\sigma^* V_{0,\sigma}^\delta}{a^2} \right) \\ &\left. + \tau B(\tau) \left(V_{1,r}^\delta - \frac{\sigma^* V_{1,\sigma}^\delta}{a^2} \right) \right] P_0^*(t, x; t + \tau, z).\end{aligned}\tag{4.1.73}$$

Podemos reduzir ainda mais os cinco parâmetros, reescrevendo a Equação (4.1.73) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_V^*P_0^*(t, x; t + \tau, z) &= \\ &= - \left(\tilde{V}_1^\delta \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{V}_2^\delta \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \tilde{V}_3^{\epsilon,\delta} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \tau \tilde{V}_{0,r,\sigma}^\delta + \tau B(\tau) \tilde{V}_{1,r,\sigma}^\delta \right) P_0^*(t, x; t + \tau, z),\end{aligned}\tag{4.1.74}$$

com:

$$\tilde{V}_1^\delta = -V_{0,r}^\delta - \frac{\sigma^* V_{0,\sigma}^\delta}{a^2}, \quad (4.1.75)$$

$$\tilde{V}_2^\delta = -V_{1,r}^\delta - \frac{\sigma^* V_{0,\sigma}^\delta}{2a} + \frac{\sigma^* V_{1,\sigma}^\delta}{a^2}, \quad (4.1.76)$$

$$\tilde{V}_3^{\epsilon,\delta} = -V_3^\epsilon - \frac{\sigma^* V_{1,\sigma}^\delta}{2a}, \quad (4.1.77)$$

$$\tilde{V}_{0,r,\sigma}^\delta = -V_{0,r}^\delta + \frac{\sigma^* V_{0,\sigma}^\delta}{a^2}, \quad (4.1.78)$$

$$\tilde{V}_{1,r,\sigma}^\delta = V_{1,r}^\delta - \frac{\sigma^* V_{1,\sigma}^\delta}{a^2}. \quad (4.1.79)$$

Repetindo o processo acima, introduzimos:

$$\tilde{\sigma}^* = \sqrt{\sigma^{*2} + 2(V_2^\epsilon + \tilde{V}_2^\delta)}, \quad (4.1.80)$$

$$\tilde{r}^* = r^* + (V_1^\epsilon + \tilde{V}_1^\delta)/a. \quad (4.1.81)$$

Dessa forma, podemos escrever a solução $\tilde{P}^{\epsilon,\delta} \approx \tilde{P}_0^* + \tilde{P}_1^*$ como:

$$\tilde{P}_0^*(t, x; t + \tau, z) = A^*(\tau, \tilde{\sigma}^*, \tilde{r}^*) e^{-B(\tau)x}, \quad (4.1.82)$$

e P_1^* é solução de:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V(\tilde{\sigma}^*, \tilde{r}^*, a) \tilde{P}_1^* &= -\tilde{\mathcal{H}}_V^* \tilde{P}_0^*, \\ \tilde{P}_1^*(T, x) &= 0, \end{aligned} \quad (4.1.83)$$

com o operador $\tilde{\mathcal{H}}_V^*$ reduzido dado por:

$$\tilde{\mathcal{H}}_V^* = \tilde{V}_3^{\epsilon,\delta} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \tau \tilde{V}_{0,r,\sigma}^\delta + \tau B(\tau) \tilde{V}_{1,r,\sigma}^\delta. \quad (4.1.84)$$

Podemos resolver P_1^* utilizando a seguinte função:

$$\tilde{P}_1^*(t, x; T, z) = \tilde{D}(\tau, z) \tilde{P}_0^*(t, x; T, z) = \tilde{D}(\tau, z) A^*(\tau, \tilde{\sigma}^*, \tilde{r}^*) e^{-B(\tau)x}. \quad (4.1.85)$$

Voltando à Equação (4.1.83):

$$\frac{\partial \tilde{D}}{\partial \tau} = - \left(\tau \tilde{V}_{0,r,\sigma}^\delta + \tau B(\tau) \tilde{V}_{1,r,\sigma}^\delta - B^3 \tilde{V}_3^{\epsilon,\delta} \right), \quad (4.1.86)$$

$$\tilde{D}(0, z) = 0. \quad (4.1.87)$$

Usando repetidamente que $B = (1 - B')/a$, obtemos finalmente que

$$\begin{aligned} \tilde{D}(\tau, z) = & -\tilde{V}_{0,r,\sigma}^\delta \left(\frac{\tau^2}{2} \right) - \tilde{V}_{1,r,\sigma}^\delta \left(\frac{\tau^2}{2a} - \frac{1}{a} (B(\tau)(a\tau + 1) - \tau) \right) \\ & + \tilde{V}_3^{\epsilon,\delta} \left(\frac{\tau}{a^3} - \frac{B(\tau)}{a^3} - \frac{B^2(\tau)}{2a^2} - \frac{B^3(\tau)}{3a} \right). \end{aligned} \quad (4.1.88)$$

A solução completa para o preço de uma *bond* no modelo de Vasicek é então dada pela seguinte equação:

$$\tilde{P}(t, x; T, z) = (1 + D(\tau)) \tilde{P}_0. \quad (4.1.89)$$

Agora, de posse do valor da *bond*, vamos calcular a curva de *yield*, definida por $R(t, \tau) = -\frac{1}{\tau} \log(P(t, r_t))$. Logo, aplicando essa fórmula ao preço encontrado acima e sabendo que o fator de correção D é pequeno, temos que:

$$\tilde{R}^{\epsilon,\delta} \approx \tilde{R}_0 - \frac{1}{\tau} \log(1 + D) \approx \tilde{R}_0 - \frac{D}{\tau}. \quad (4.1.90)$$

O termo \tilde{R}_0 é o valor da *yield* para o modelo de Vasicek com coeficientes constantes, cujo preço é \tilde{P}_0 . O valor de \tilde{R}_0 é dado por:

$$\tilde{R}_0 = R_\infty + (x - R_\infty) \frac{B(\tau)}{\tau} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{4a} \frac{B^2(\tau)}{\tau}, \quad (4.1.91)$$

com R_∞ definido como:

$$R_\infty = \tilde{r} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2a^2}.$$

Finalmente, obtemos uma fórmula fechada para a curva de *yield*. Essa fórmula depende dos parâmetros a , $\tilde{\sigma}^*$, \tilde{r}^* , $\tilde{V}_{0,r,\sigma}^\delta$, $\tilde{V}_{1,r,\sigma}^\delta$ e $\tilde{V}_3^{\epsilon,\delta}$. Observe que, dos três fatores adicionais, $\tilde{V}_{0,r,\sigma}^\delta$, $\tilde{V}_{1,r,\sigma}^\delta$ refletem apenas a contribuição da escala longa, já $\tilde{V}_3^{\epsilon,\delta}$ influencia ambas as escalas. Esses parâmetros devem ser estimados para que a curva de *yield* obtida pelo modelo se ajuste aos dados de mercado. Essa estimação será tratada no próximo capítulo.

4.2 Solução para o Modelo CIR

Nesta seção faremos um cálculo análogo ao da seção anterior, porém nesse caso usaremos os operadores relativos ao modelo CIR.

Novamente partiremos do preço de não arbitragem para uma *bond*

$$P^{\epsilon, \delta}(t, x, Y_t, Z_t; T) = \tilde{\mathbb{E}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} | r_t = x, Y_t, Z_t \right]. \quad (4.2.1)$$

Pelo Teorema 4, essa equação satisfaz à seguinte EDP:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\epsilon, \delta} P^{\epsilon, \delta} &= \frac{\partial P^{\epsilon, \delta}}{\partial t} + \mathcal{L} P^{\epsilon, \delta} - x P^{\epsilon, \delta}, \\ P^{\epsilon, \delta}(T, x, y, z; T) &= 1, \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

em que a taxa curta é denotada por x e \mathcal{L} é o gerador infinitesimal do processo definido pela Equação (3.4.1), no Capítulo 3. Vamos reescrever o operador diferencial acima decompondo-o em termos de ϵ e δ :

$$\mathcal{L}^{\epsilon, \delta} = \frac{1}{\epsilon} \mathcal{L}_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \sqrt{\delta} \mathcal{M}_1 + \delta \mathcal{M}_2 + \sqrt{\frac{\delta}{\epsilon}} \mathcal{M}_3, \quad (4.2.3)$$

em que os operadores são agora definidos de acordo com o modelo CIR, logo:

$$\mathcal{L}_0 = x \left(\frac{1}{2} \beta^2(y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \alpha(y) \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (4.2.4)$$

$$\mathcal{L}_1 = \beta(y) \rho_1 f(y, z) x \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad (4.2.5)$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} f^2(y, z) x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa(\bar{r} - x) \frac{\partial}{\partial x} - x, \quad (4.2.6)$$

$$\mathcal{M}_1 = x g(z) \rho_2 f(y, z) x \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}, \quad (4.2.7)$$

$$\mathcal{M}_2 = \frac{1}{2} x g^2(z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + x c(z) \frac{\partial}{\partial z}, \quad (4.2.8)$$

$$\mathcal{M}_3 = x \beta(y) \rho_{12} g(z) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}. \quad (4.2.9)$$

Repetindo o procedimento da seção anterior, obtemos a seguinte solução para o termo dominante P_0 :

$$P_0(t, x; T) = A(\tau)e^{-B(\tau)x}, \quad (4.2.10)$$

em que A e B estão definidos em (3.3.6) e (3.3.7) respectivamente, com o termo σ substituído pela volatilidade efetiva (4.1.24). A correção da escala rápida é a solução de:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{CIR}(\bar{\sigma}, \bar{r}, a)P_{1,0} &= -xV_3^\epsilon(z)\frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}, \\ P_{1,0}(T, x; T, z) &= 0, \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

e a correção da escala lenta é a solução de:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{CIR}(\bar{\sigma}, \bar{r}, a)P_{0,1} &= -xV_1^\delta(z)\frac{\partial^2 P_0}{\partial x \partial z}, \\ P_{0,1}(T, x; T, z) &= 0, \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

nas quais o operador \mathcal{L}_{CIR} é definido por:

$$\mathcal{L}_{CIR} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}f^2(y, z)x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa(\bar{r} - x)\frac{\partial}{\partial x} - x, \quad (4.2.13)$$

e os novos parâmetros V_1^δ e V_3^ϵ são dados por:

$$\begin{aligned} V_1^\delta(z) &= \sqrt{\delta}\rho_2g(z)\langle f \rangle, \\ V_3^\epsilon &= -\frac{\epsilon\rho_1}{2}\left\langle \beta f \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\rangle. \end{aligned}$$

Assumindo uma aproximação da forma $\tilde{P}^{\epsilon, \delta} = (1 + D_0^{\epsilon, \delta} + D_1^{\epsilon, \delta}x + D_2^\delta x^2)P_0$ para o preço da *bond*, os fatores de correção resolvem o seguinte sistema de EDO's:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_0^{\epsilon, \delta}}{\partial \tau} &= \kappa\bar{r}D_1^{\epsilon, \delta}, \\ \frac{\partial D_1^{\epsilon, \delta}}{\partial \tau} &= -(\kappa + B\bar{\sigma}^2)D_1^{\epsilon, \delta} + (2\kappa\bar{r} + \bar{\sigma}^2)D_2^\delta - \left(V_3^\epsilon B^3 + \tilde{V}_1^\delta B \left(\frac{\partial A / \partial \sigma}{A} \right) \right), \\ \frac{\partial D_2^\delta}{\partial \tau} &= -2(\kappa + B\bar{\sigma}^2)D_2^\delta + \tilde{V}_1^\delta B \frac{\partial B}{\partial \sigma}, \end{aligned}$$

em que $\tilde{V}_1^\delta = \bar{\sigma}'V_1^\delta$.

Capítulo 5

Resultados

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos com os ajustes dos modelos apresentados nos Capítulos 3 e 4 e uma análise a respeito da validade da hipótese de reversão rápida à média na volatilidade. Os dados utilizados foram de futuros de DI (esses dados foram retirados do boletim diário no site www.bmfbovespa.com.br), que representam a curva de *yield* vista pelo mercado naquele dia. Vale ressaltar que foram excluídos do ajuste os dados ilíquidos, que poderiam gerar ruídos nos dados em análise.

Antes de ajustar os dados, devemos verificar a hipótese suposta nos modelos de volatilidade estocástica de reversão rápida à média. A verificação será feita utilizando um variograma para o processo de Ornstein-Uhlenbeck que descreve r_t , definido na Equação (3.2.1). Após ser verificada essa hipótese, passaremos ao ajuste dos dados.

Os dados de mercado foram ajustados à fórmula da curva de *yield* obtida para cada um dos modelos e a estimação dos parâmetros foi feita pelo método de mínimos quadrados. Logo, seja Θ o vetor de parâmetros, desejamos minimizar a seguinte função:

$$R^{\epsilon, \delta}(t) = \min_{\Theta} \left\| \tilde{R}^{\epsilon, \delta}(t) - F(t) \right\|^2, \quad (5.0.1)$$

em que $F(t)$ é o vetor contendo as taxas do futuro de DI em função do tempo. A minimização da função definida na Equação (5.0.1) foi feita utilizando as funções *fmincon* e *fminsearch* do programa *Matlab*. O método de minimização utilizado por essas funções não será discutido no texto¹.

5.1 Análise da reversão à média

Nesta seção, vamos analisar os dados da taxa curta de juros do mercado brasileiro, para verificar a existência de reversão rápida à média na volatilidade dos dados. Essa análise é necessária, pois

¹A documentação dessas rotinas podem ser encontradas em: <http://www.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html> e <http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/fminsearch.html>

é uma das hipóteses dos modelos descritos nas Equações (3.2.1) e (3.4.1). Os dados utilizados nesta seção são os valores diários da taxa Selic de 16/10/2007 até o presente e esses dados foram obtidos da página www.cetip.com.br.

A verificação da reversão à média será feita utilizando um variograma.

Definição 15 (Variograma). *O Variograma é um método de estimarmos a autocorrelação de uma variável descrita por uma série histórica.*

A construção do variograma segue a metodologia proposta em [1, Seção 5.1]. Considere as flutuações normalizadas da taxa curta dadas por:

$$D_j = \frac{x_j - x_{j-1}}{\sqrt{\Delta t}}, \quad (5.1.1)$$

em que x_j é o valor da taxa curta no dia j . Assim, defina o Variograma V_j da seguinte maneira:

$$V_j := \frac{1}{N} \sum_n (X_{n+j} - X_n)^2, \quad (5.1.2)$$

com X_j definido da seguinte maneira:

$$X_j := \log |D_j|.$$

Possuímos assim a forma empírica do variograma. Porém, precisamos de uma curva teórica para podermos ajustá-lo. Considere as flutuações definidas na Equação (5.1.1) e modeladas da seguinte maneira:

$$D_j = e^{y_j} \epsilon_j,$$

em que ϵ_j são variáveis aleatórias $\mathcal{N}(0, 1)$ independentes e identicamente distribuídas, e y_j é o valor da volatilidade no dia j . Segundo [1], essa modelagem é consistente com um processo de Ornstein-Uhlenbeck exponencial com volatilidade estocástica, desde que o *drift* do processo seja pequeno, para um Δt pequeno. Isso leva a um X_j da forma:

$$X_j := y_j + \log |\epsilon_j|.$$

Utilizando um filtro de medianas em X_j para evitar as singularidades impostas por $|\epsilon_j|$, a curva teórica do variograma será dada por:

$$\tilde{V}_j = 2\psi^2 + 2\frac{\beta^2}{2\alpha} (1 - e^{-j/l}), \quad j \geq 1. \quad (5.1.3)$$

Essa curva é deduzida diretamente do modelo de Ornstein-Uhlenbeck. Os termos ψ^2 , $\frac{\beta^2}{2\alpha}$ e l são a variância do ruído ϵ_j , do processo de volatilidade y_j e o comprimento de decorrelação, que é o tempo até o variograma se estabilizar, do processo y_t . Assumimos que a correlação entre os processos é igual a 0. Simulações feitas por Fouque, Papanicolaou, Sircar e Solna mostraram que as propriedades do variograma são bastante insensíveis à variações em ρ , logo essa suposição pode ser feita sem perda de generalidade.

Finalmente, ajustamos o variograma empírico, dado em (4.1.2) à curva teórica (4.1.3). A estimação dos parâmetros foi feita utilizando-se o método de mínimos quadrados. O gráfico está apresentado abaixo na Figura 5.1.

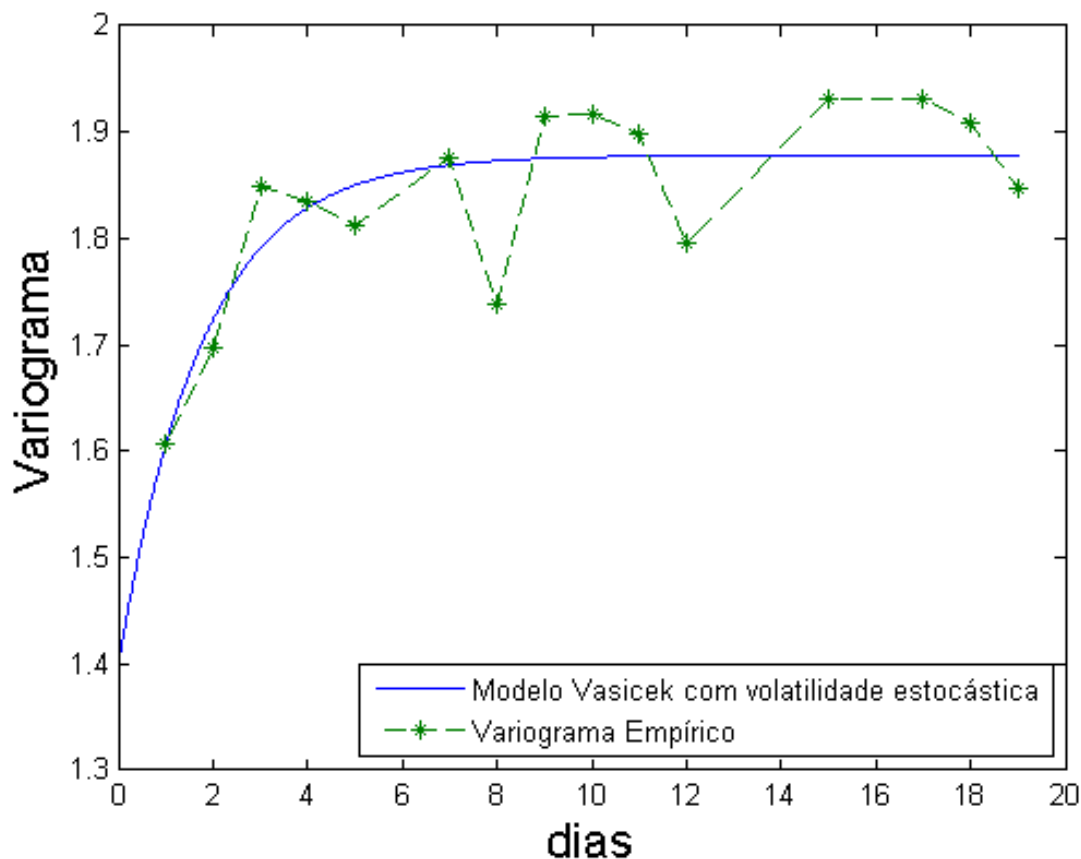


Figura 5.1: Ajuste do Variograma. A linha cheia representa a curva teórica ajustada e a linha tracejada representa o variograma empírico, obtido à partir dos dados.

Da Figura 5.1, podemos concluir que a volatilidade dos dados reverte rapidamente à média, já que o gráfico se estabiliza rapidamente. Seu comprimento de decorrelação é 1,766.

5.2 A curva de *yield* no modelo de Vasicek

No modelo de Vasicek, proposto em 1977, os parâmetros a serem estimados são $\Theta = (a, \bar{r}, \sigma)$. Utilizando esse vetor na Equação (5.0.1), encontra-se um valor ótimo para Θ . Aplicando esse

valor ótimo de Θ à fórmula paramétrica da curva de *yield* (4.1.91), obtemos uma função definida. Os gráficos obtidos são apresentados nas Figuras 5.2 à 5.18.

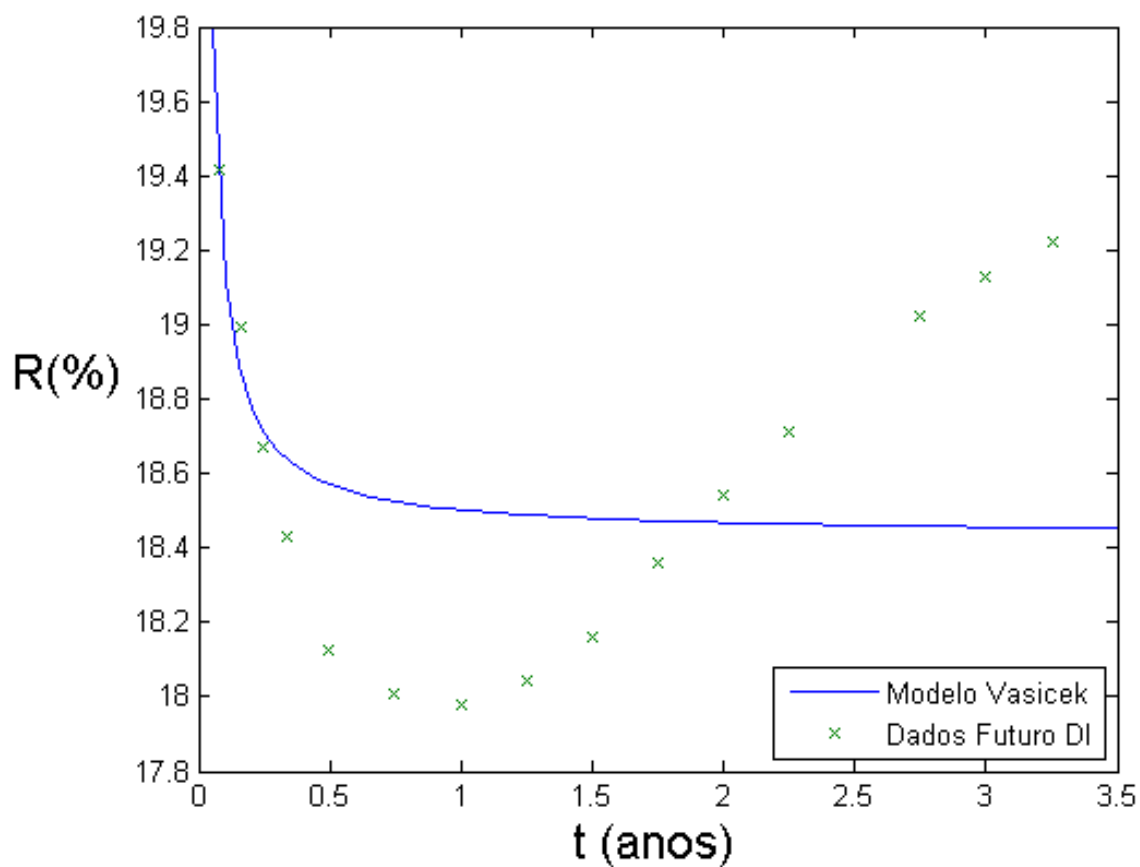


Figura 5.2: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 01/10/2003.

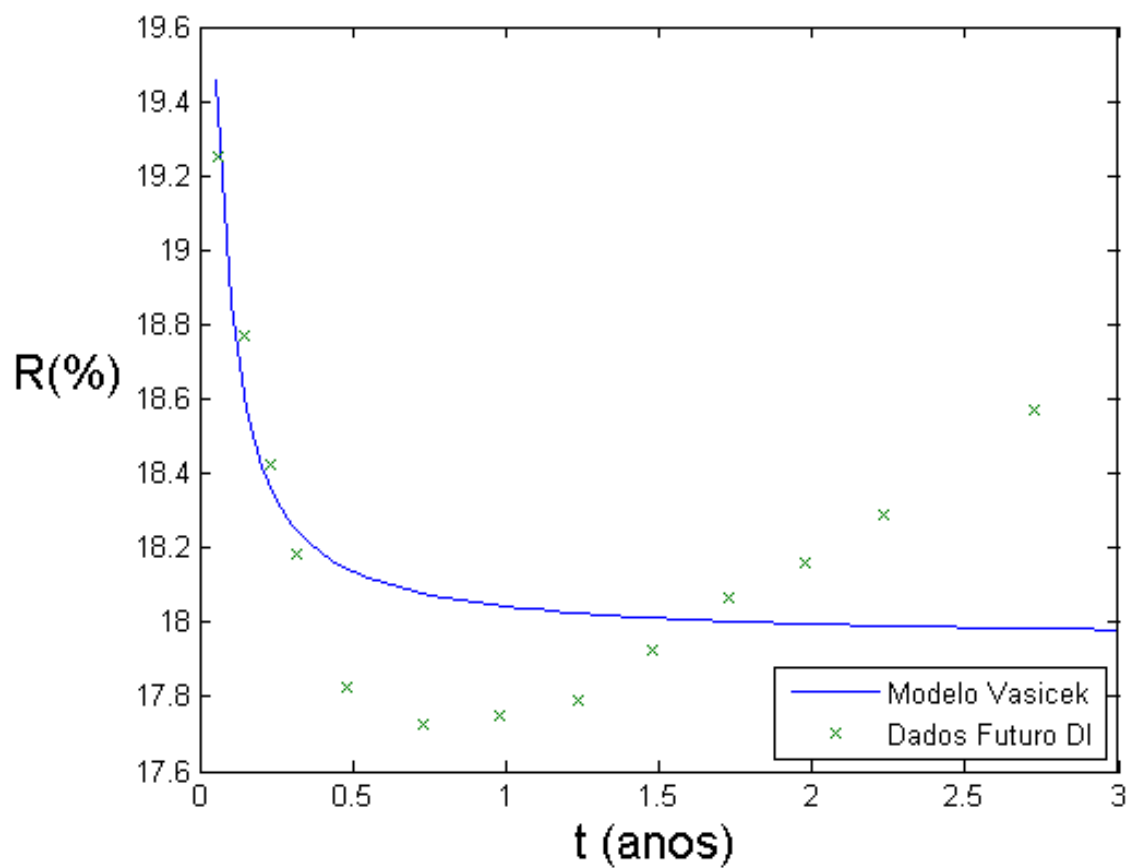


Figura 5.3: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 08/10/2003.

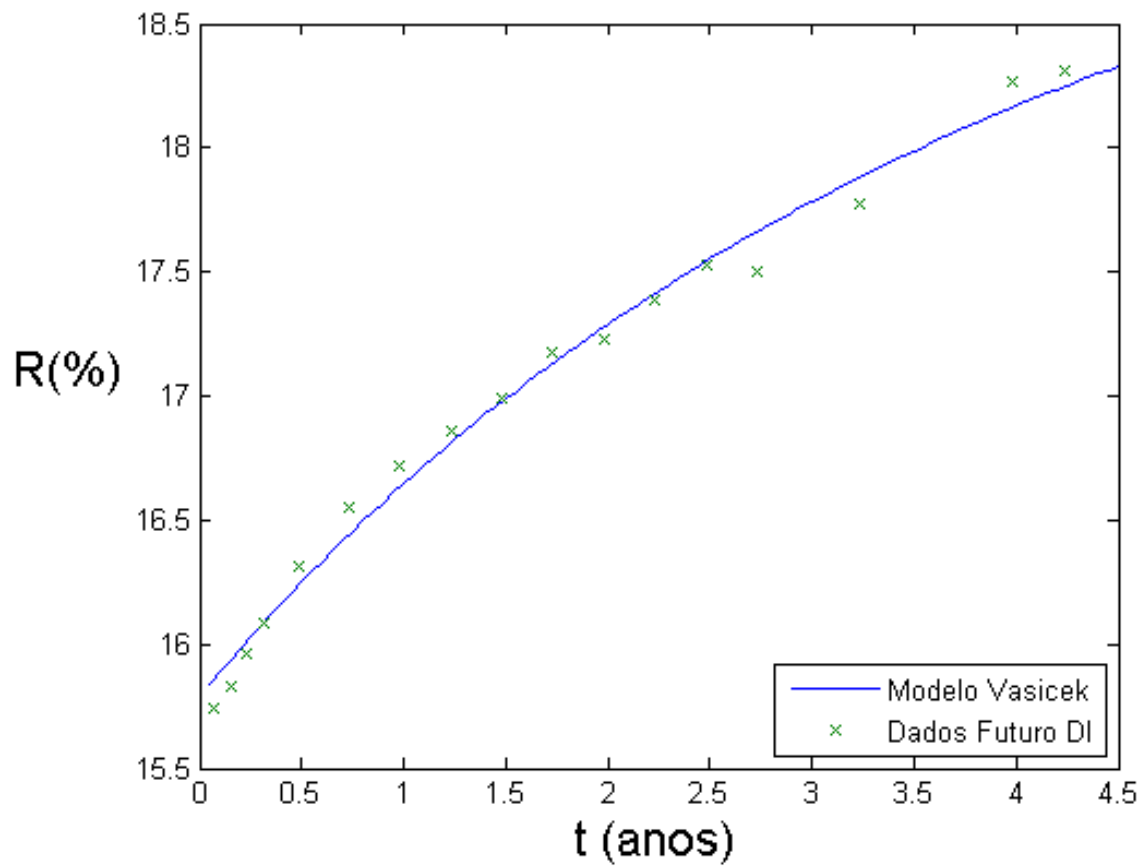


Figura 5.4: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 07/07/2004.

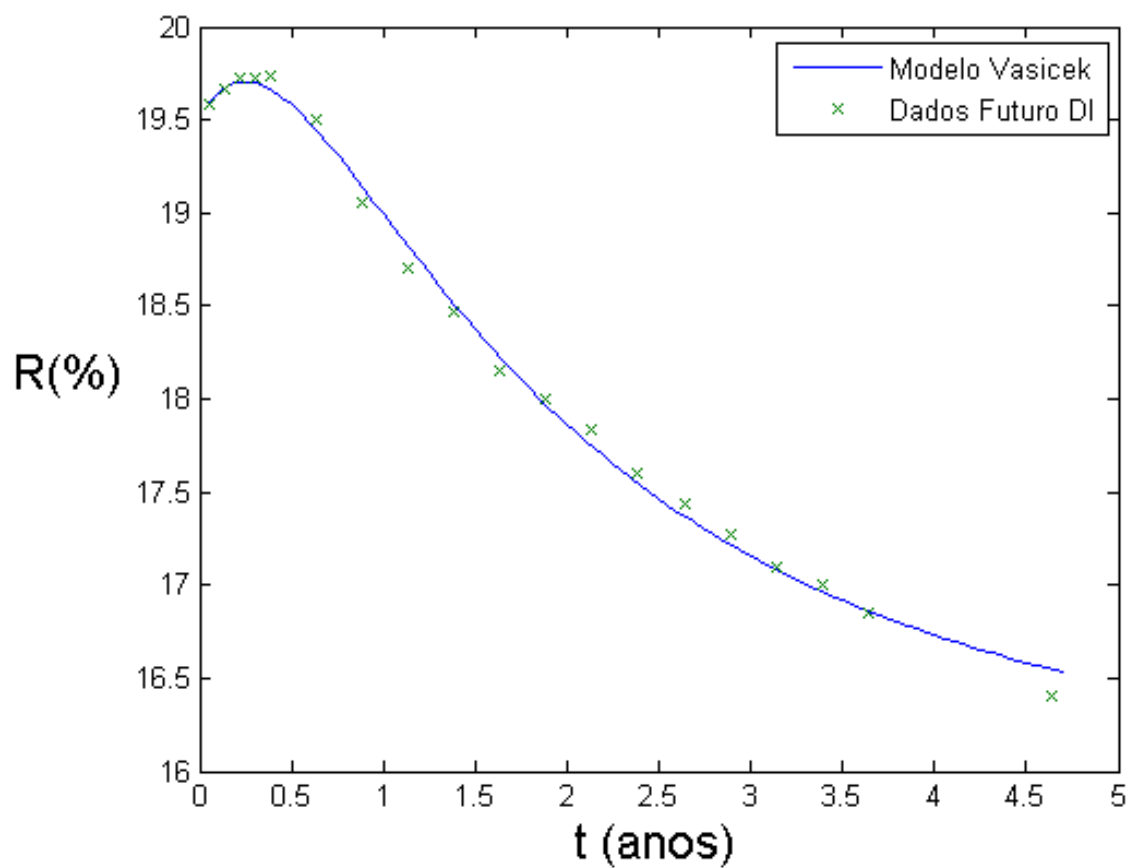


Figura 5.5: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 12/05/2005.

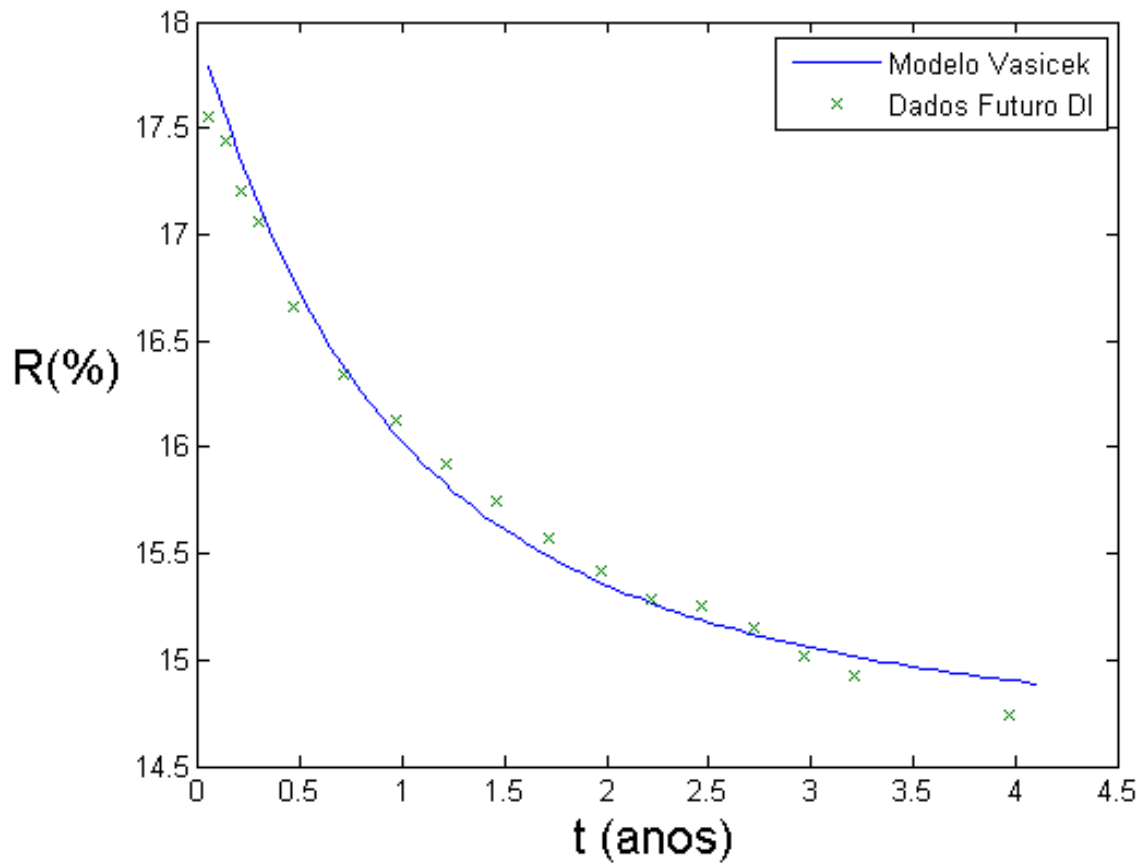


Figura 5.6: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 12/01/2006.

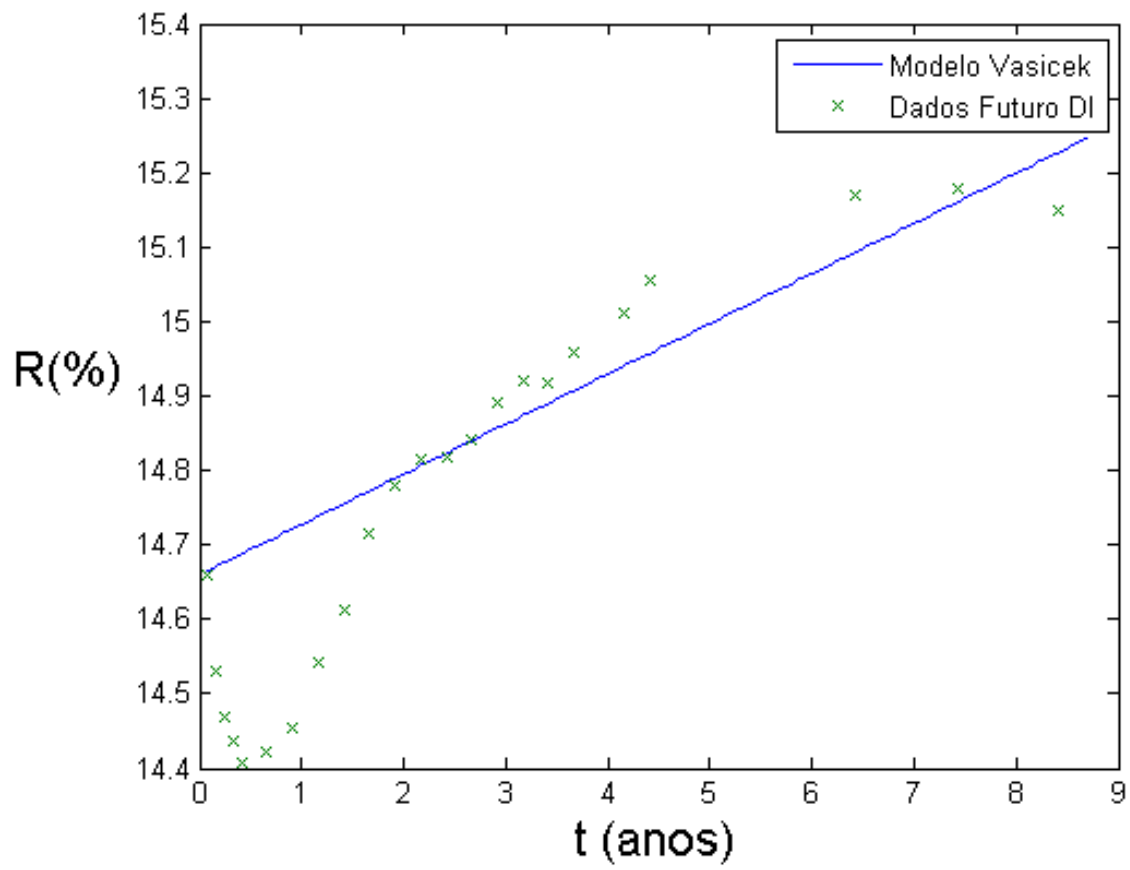


Figura 5.7: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 02/08/2006.

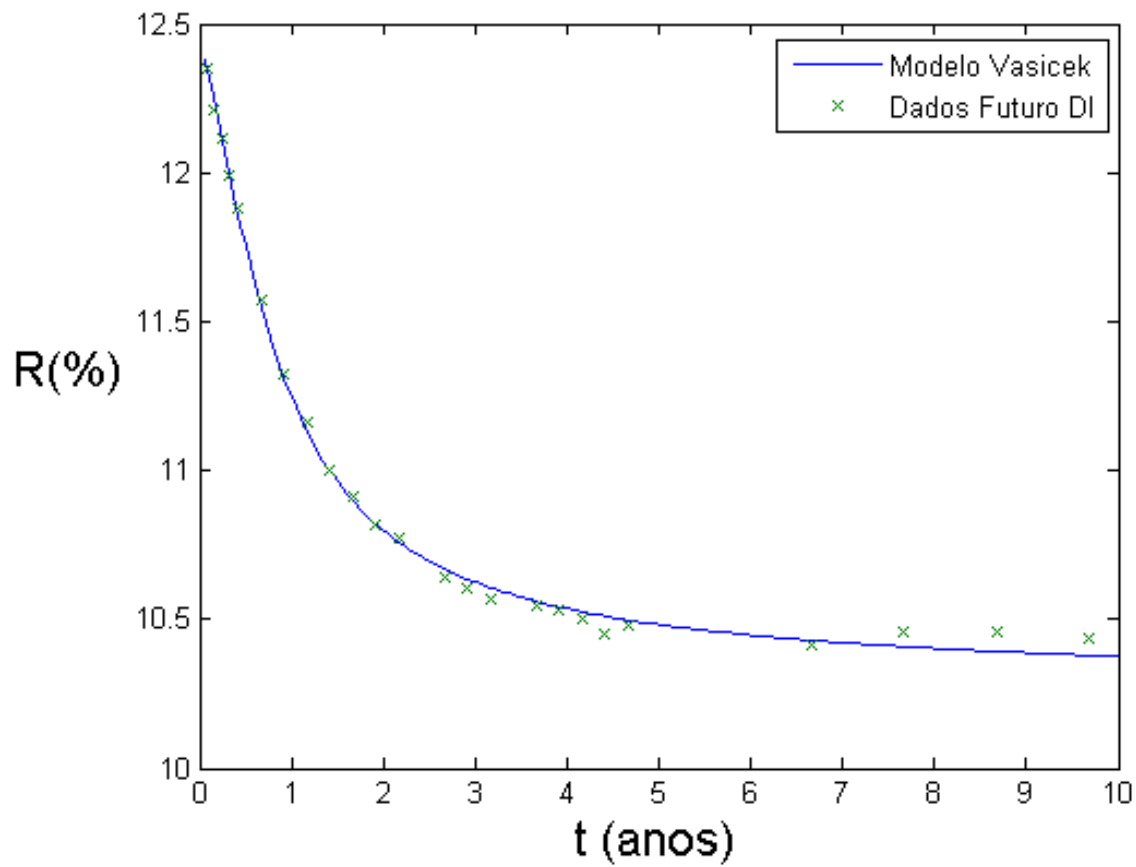


Figura 5.8: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 02/05/2007.

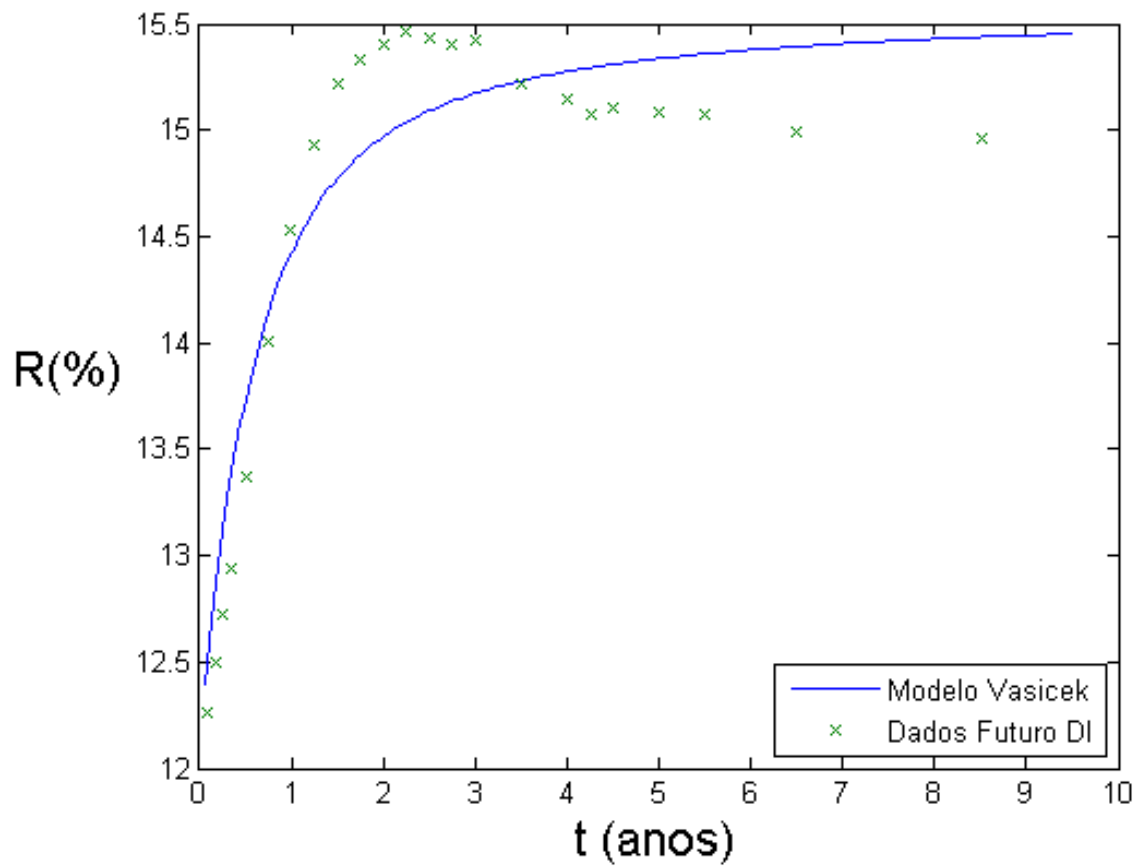


Figura 5.9: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 01/07/2008.

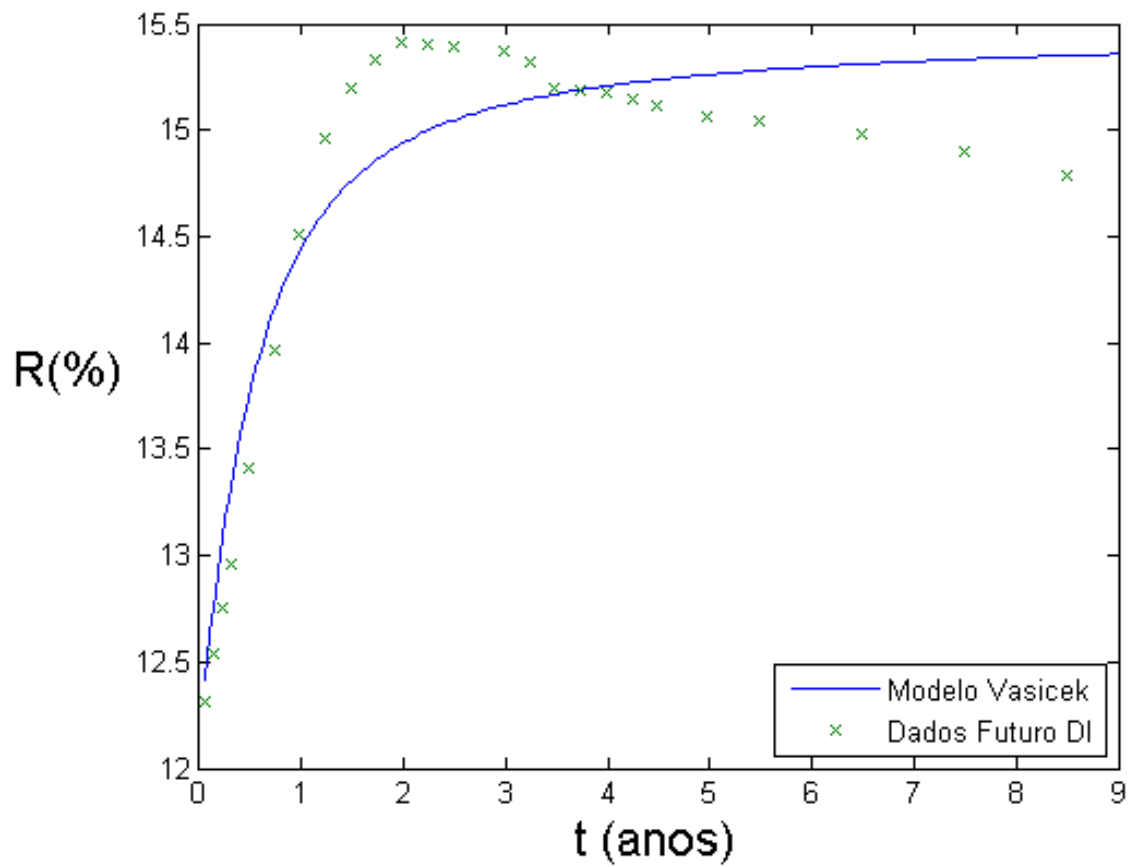


Figura 5.10: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 08/07/2008.

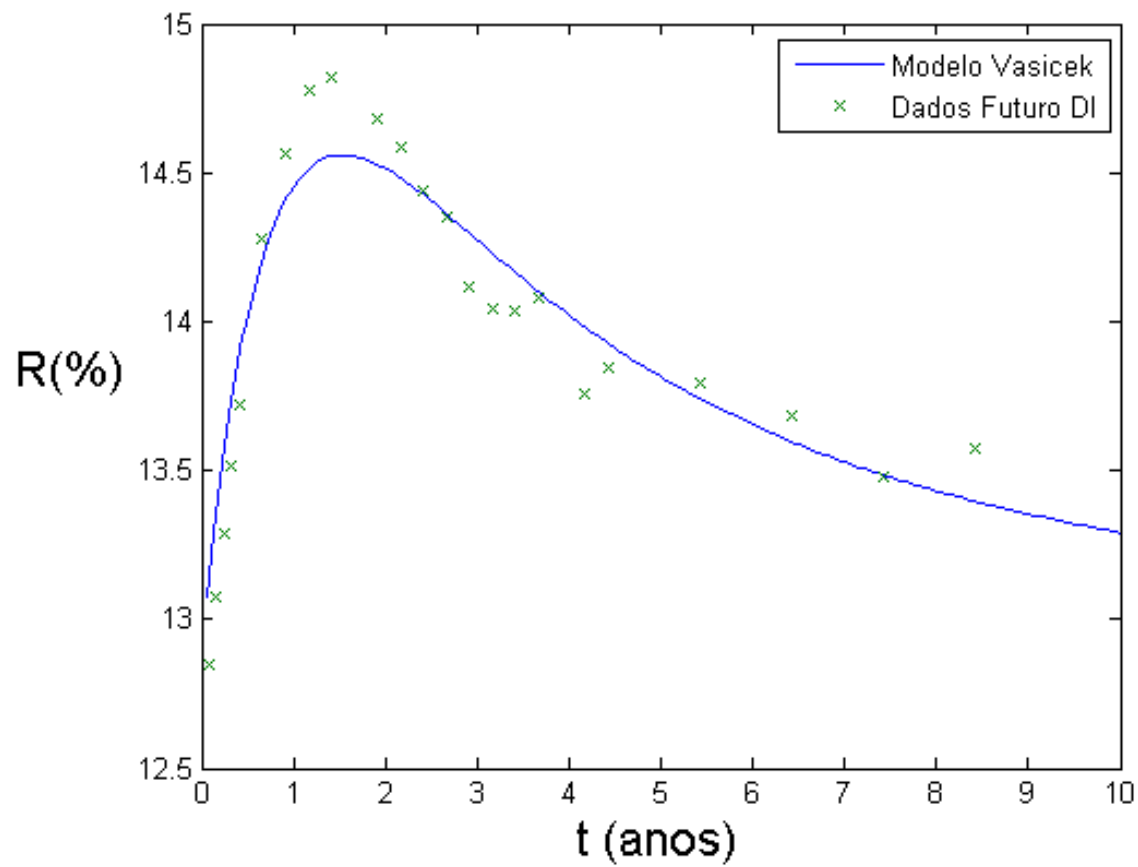


Figura 5.11: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 01/08/2008.

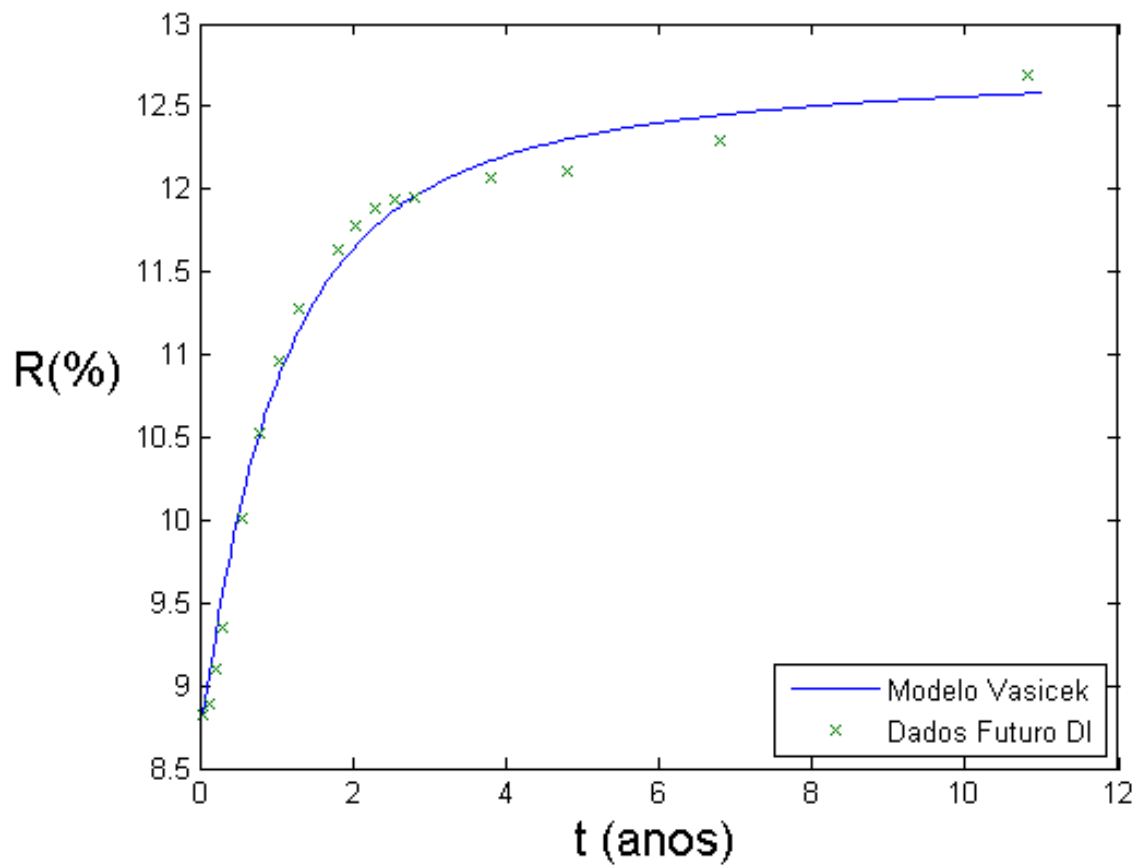


Figura 5.12: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 15/03/2010.

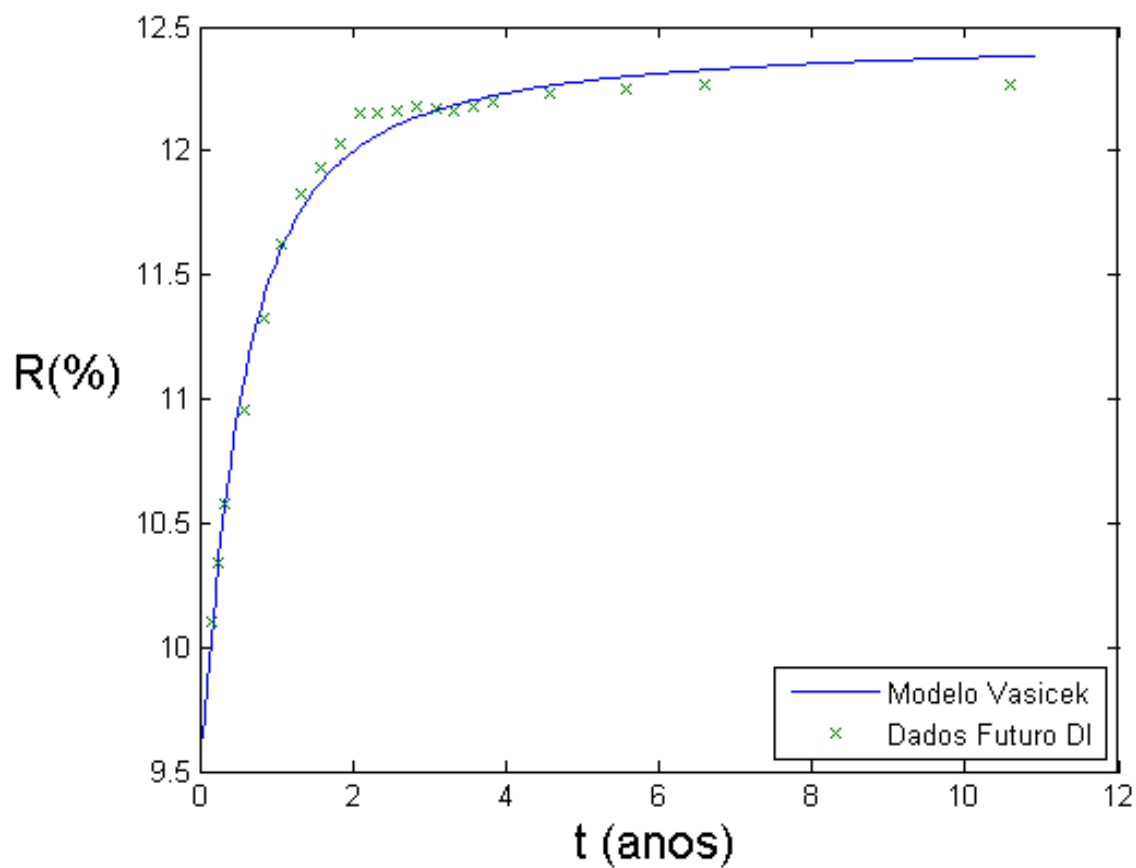


Figura 5.13: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 01/06/2010.

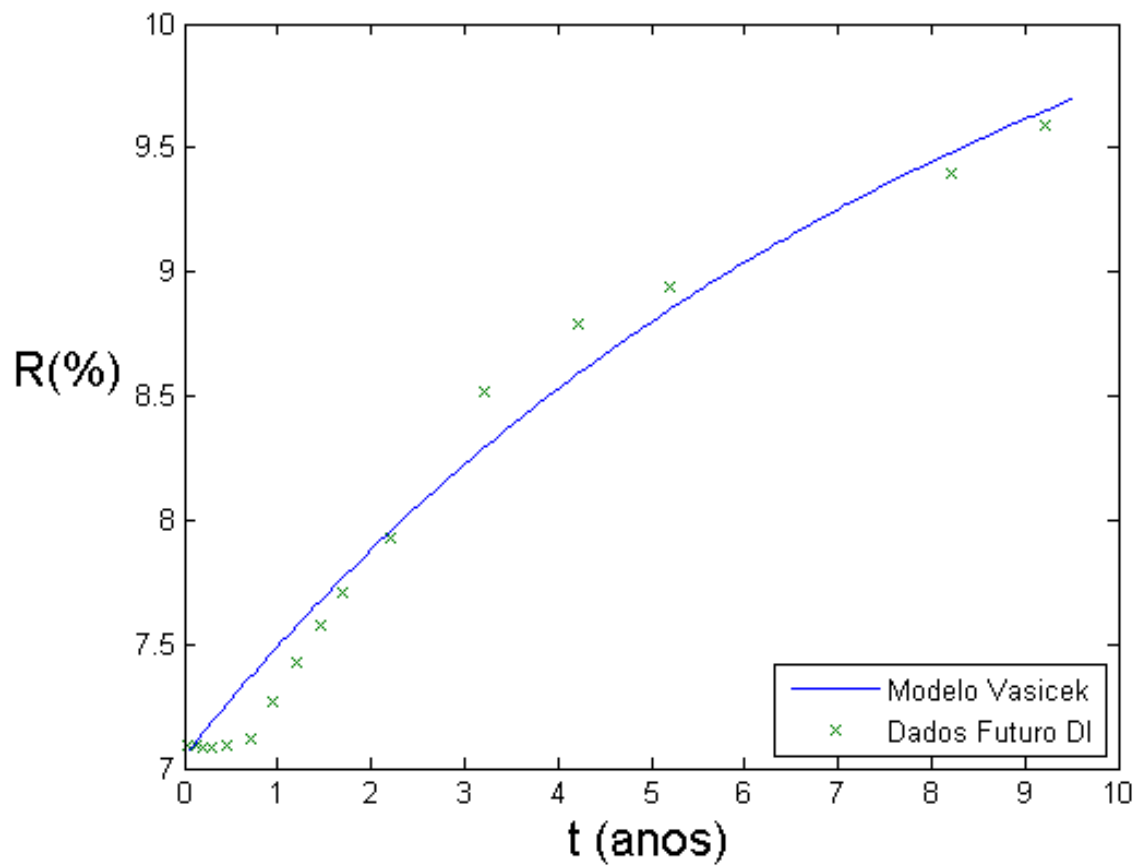


Figura 5.14: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 17/10/2012.

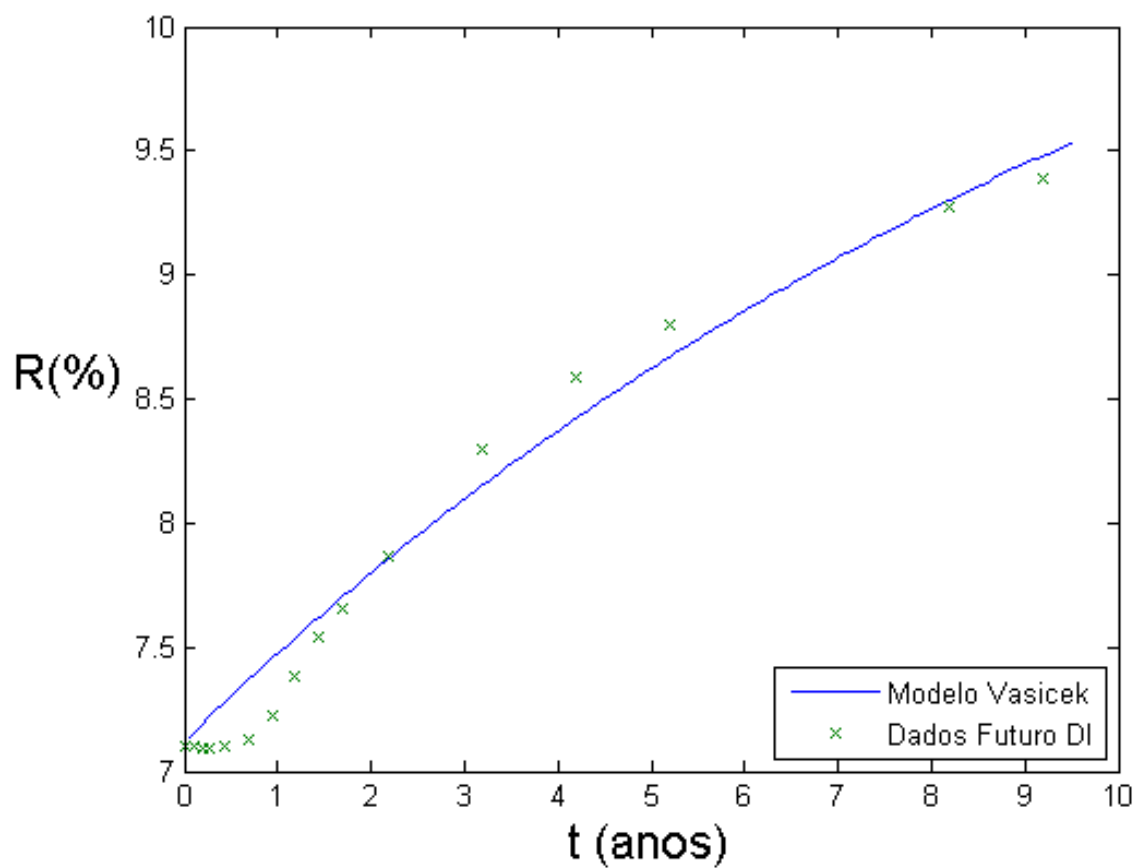


Figura 5.15: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 23/10/2012.

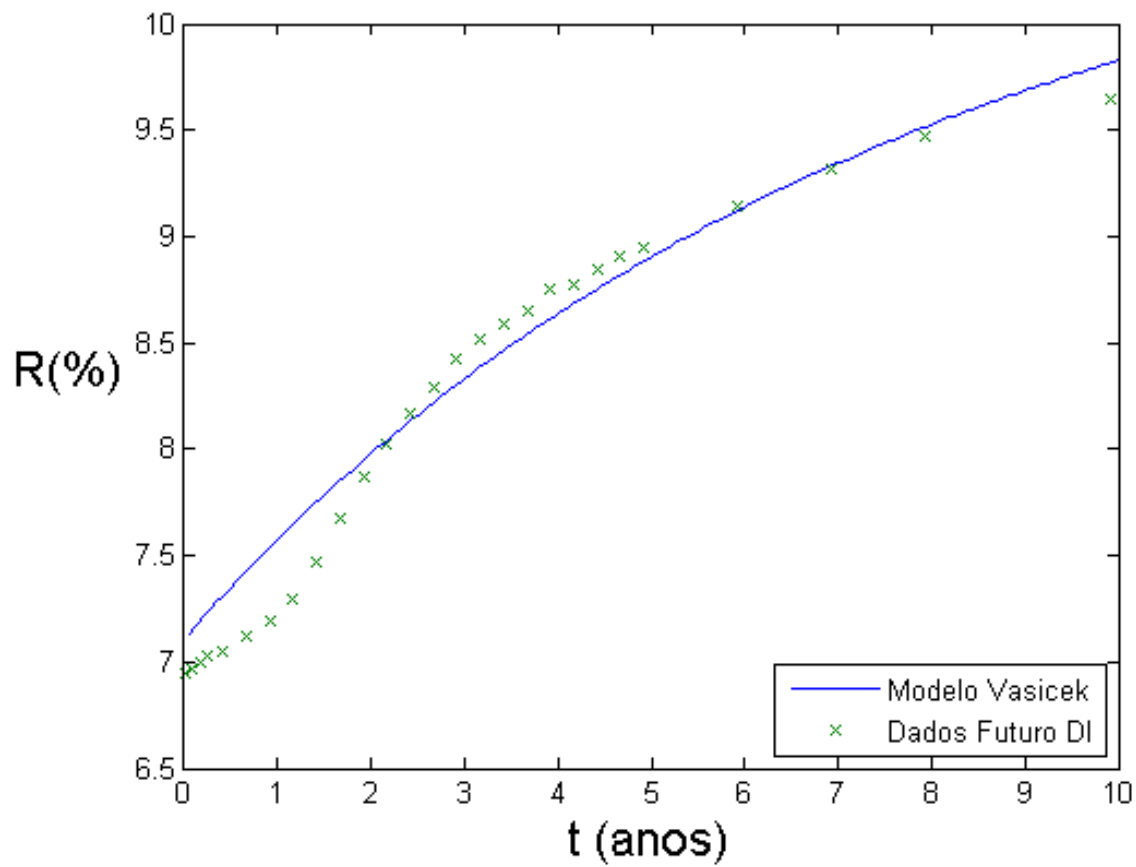


Figura 5.16: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 29/01/2013.

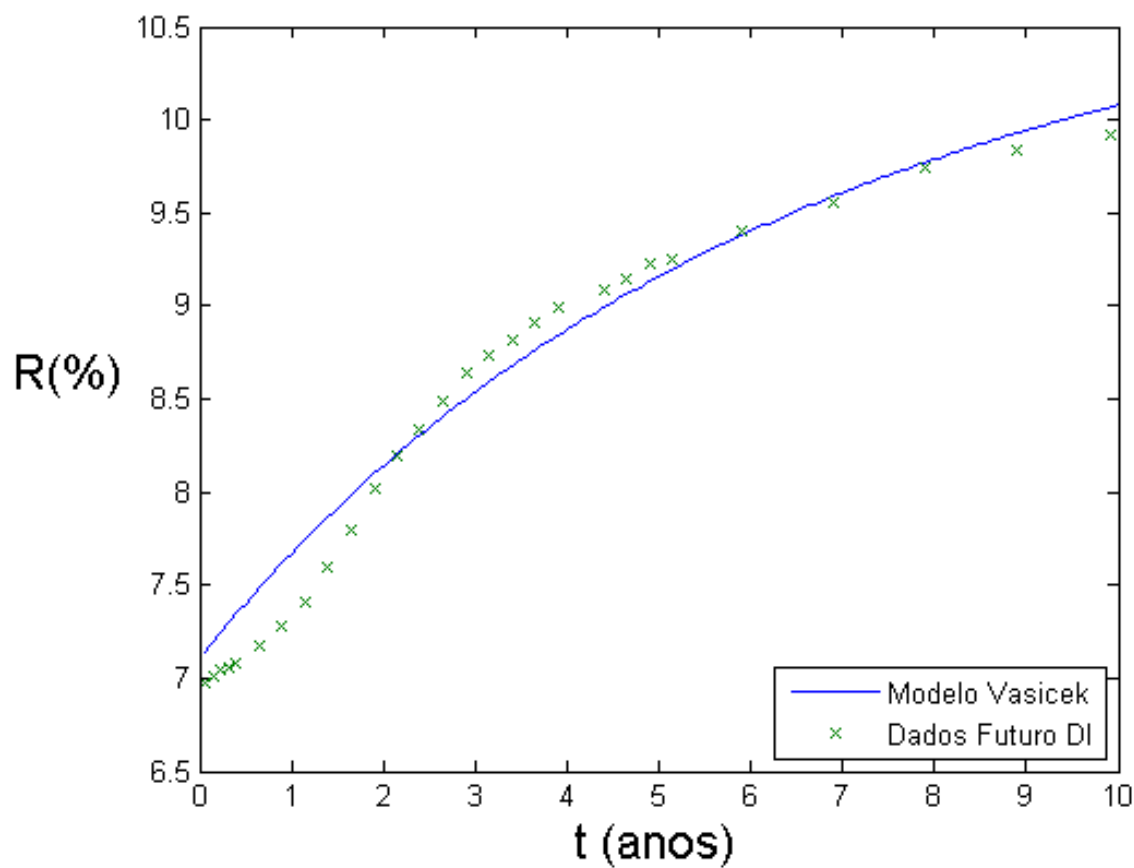


Figura 5.17: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 05/02/2013.

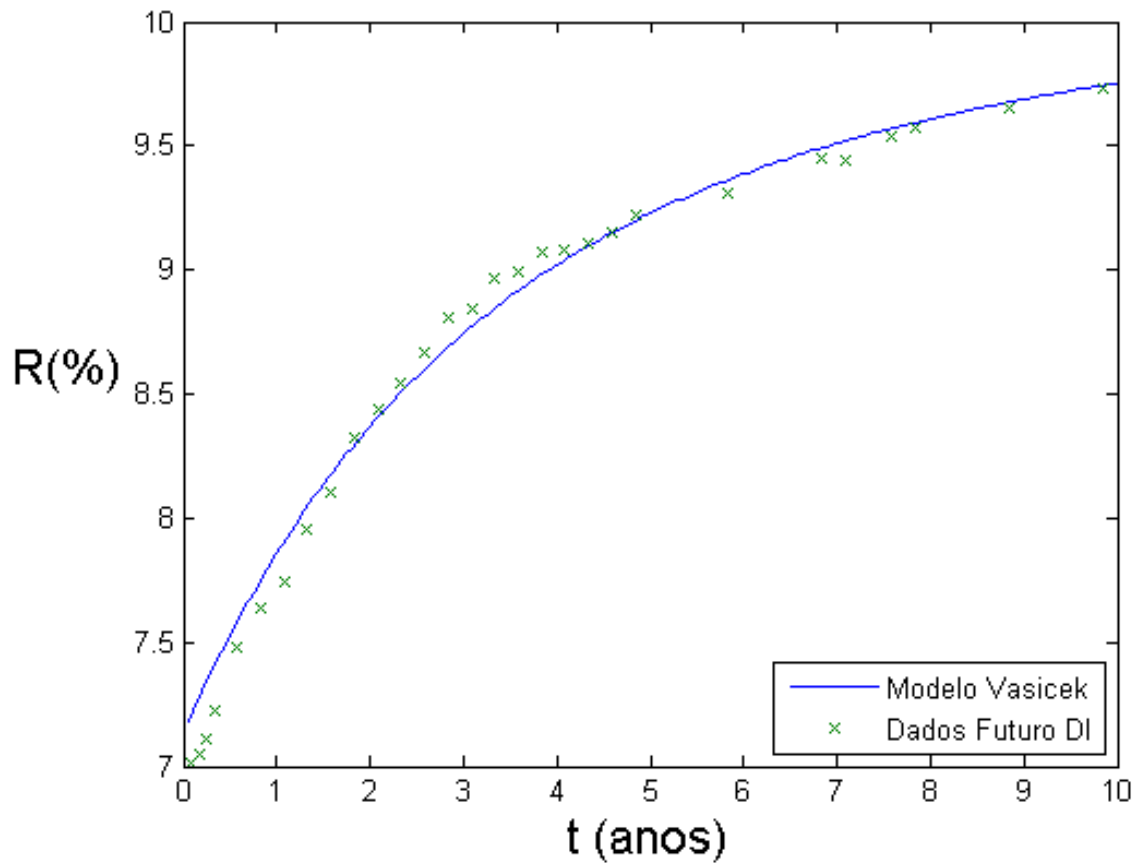


Figura 5.18: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 01/03/2013.

As figura para as datas 01/06/2009, 02/01/2012 e 09/01/2012 não foram exibidas pois o método não convergiu. Na próxima seção veremos gráficos para essas datas e todos apresentam um vale acentuado para maturidades de aproximadamente 1 ano. O modelo de Vasicek, utilizado aqui, aparentemente não consegue captar concavidades acentuadas.

Na Tabela 5.1, são apresentados os erros absoluto máximo, ou seja, a maior distância vertical entre a curva e os pontos, e o erro absoluto médio.

	Erro máximo	Erro médio
01/10/2003	0.7658	0.3492
08/10/2003	0.5863	0.2095
07/07/2004	0.1625	0.0696
12/05/2005	0.1323	0.0529
12/01/2006	0.2346	0.0927
02/08/2006	0.2815	0.1025
02/05/2007	0.0676	0.0214
01/07/2008	0.4769	0.3039
08/07/2008	0.5600	0.2696
01/08/2008	0.3209	0.1518
01/06/2009	-	-
15/03/2010	0.2205	0.1127
01/06/2010	0.1400	0.0533
02/01/2012	-	-
09/01/2012	-	-
17/10/2012	0.2452	0.1125
23/10/2012	0.2422	0.1122
29/01/2013	0.3537	0.1446
05/02/2013	0.3400	0.1464
01/03/2013	0.2331	0.0815

Tabela 5.1: Tabela mostrando o erro máximo e erro médio referente a cada gráfico apresentado para o modelo de Vasicek.

5.3 A curva de *yield* no modelo de Vasicek extendido

O modelo de Vasicek, da maneira proposta no Capítulo 3, possui uma dinâmica mais complexa, além de 3 novos parâmetros a serem estimados. Esperamos que esse modelo produza um ajuste mais preciso aos dados de mercado. De fato, repetindo a minimização de 5.0.1 com o novo vetor de parâmetros $\Theta = (a, \tilde{\sigma}, \tilde{r}, \tilde{V}_0^\delta, \tilde{V}_1^\delta, \tilde{V}_3^\epsilon)$, obtemos as curvas de *yield* mostradas nas Figuras 5.19 à 5.38.

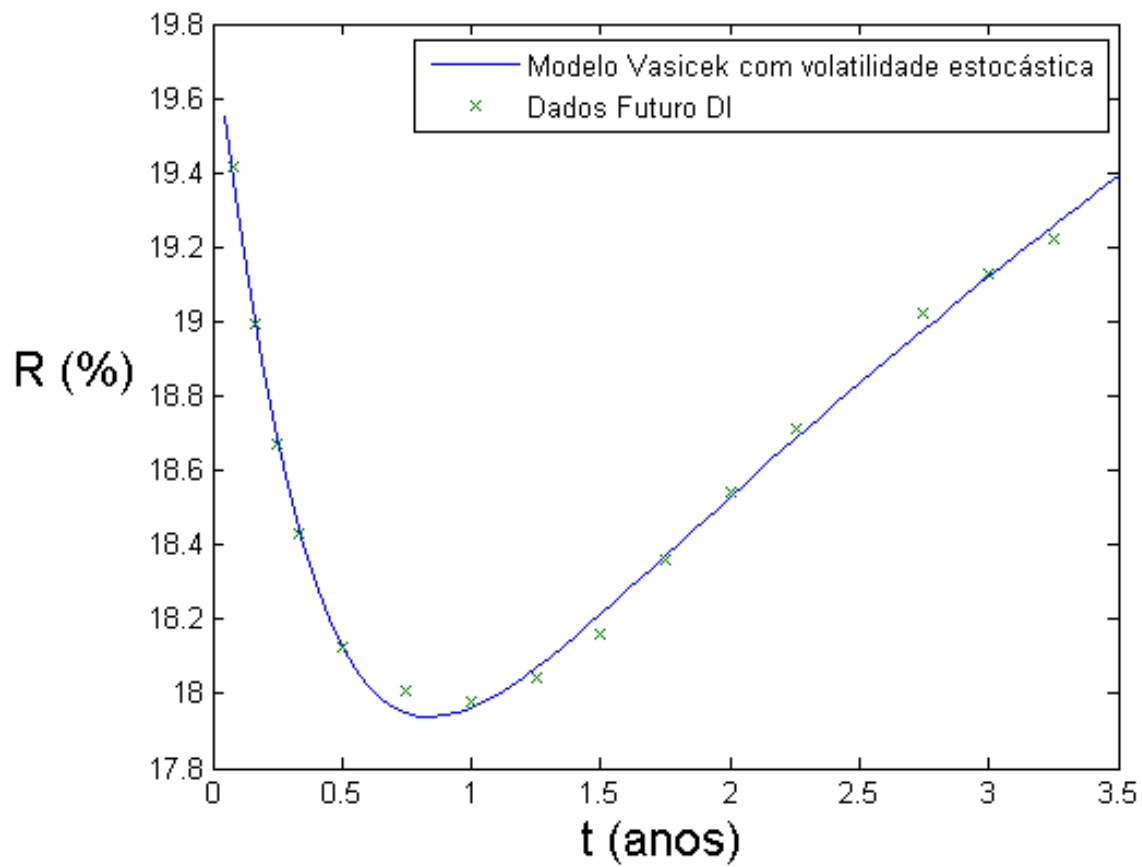


Figura 5.19: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 01/10/2003.

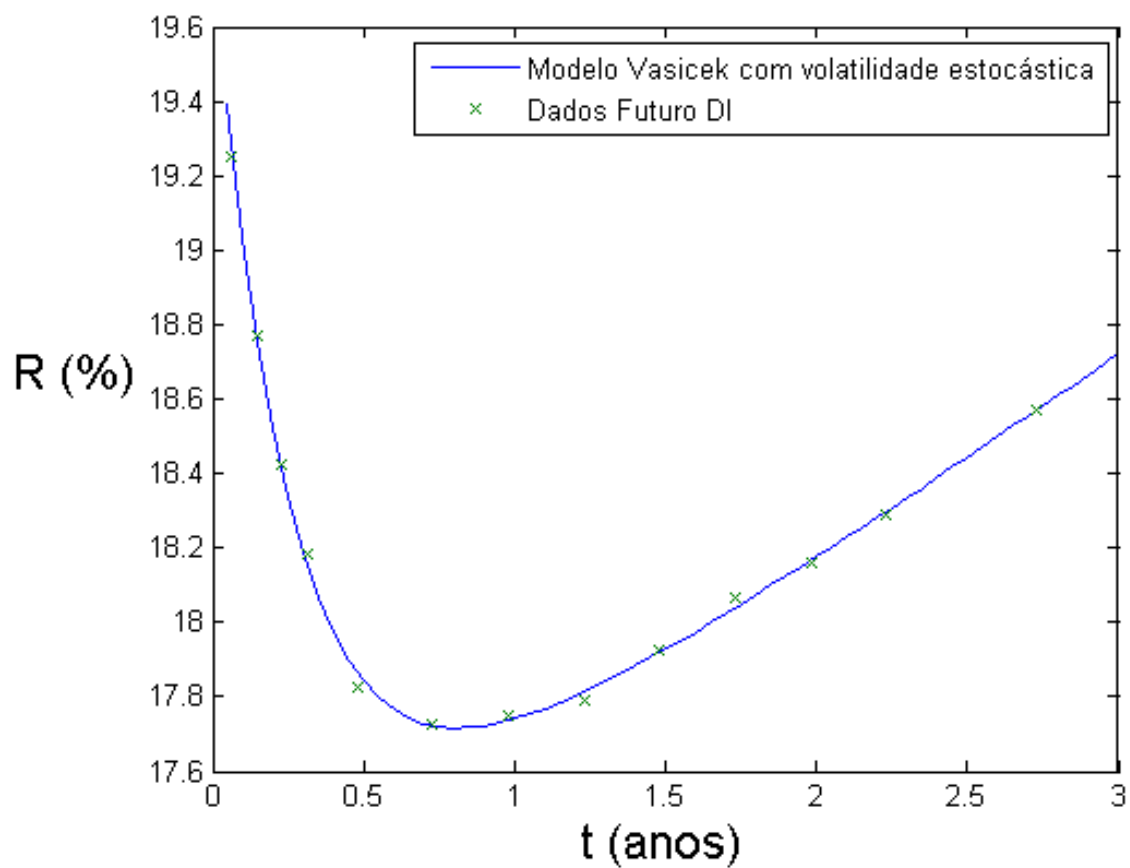


Figura 5.20: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 08/10/2003.

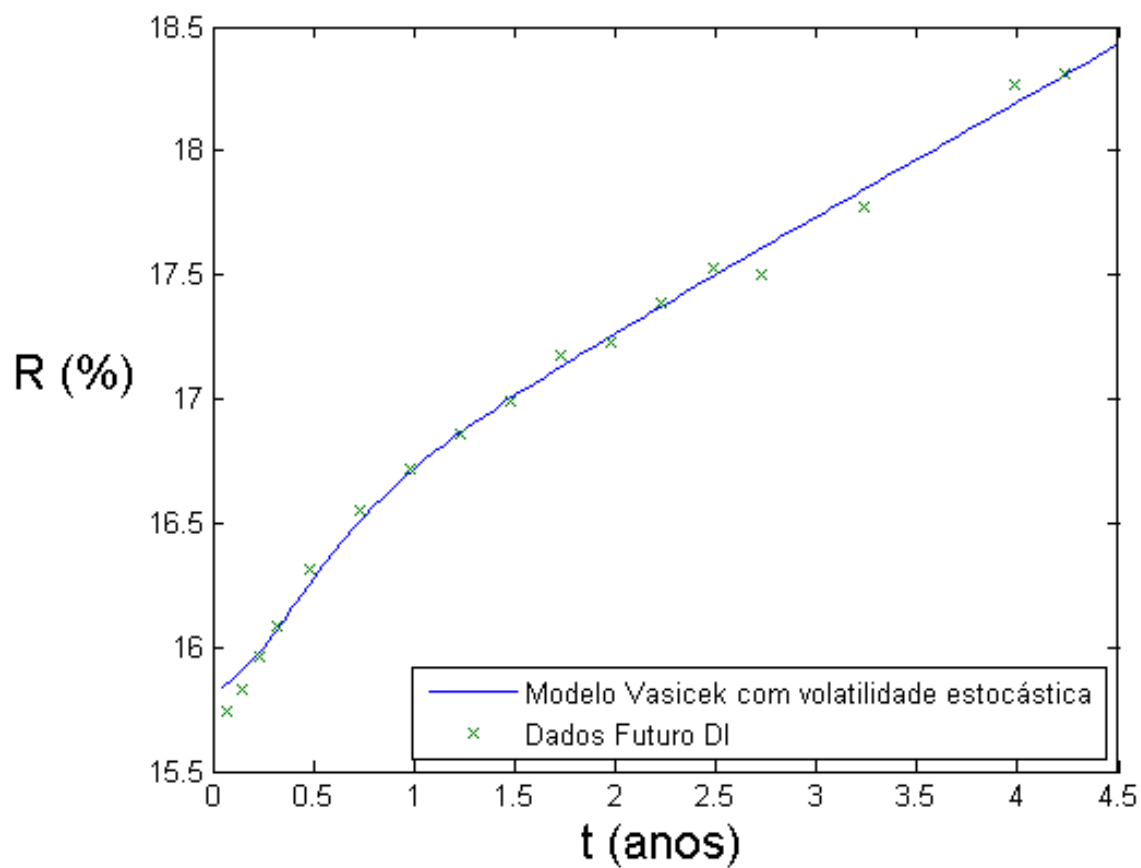


Figura 5.21: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 07/07/2004.

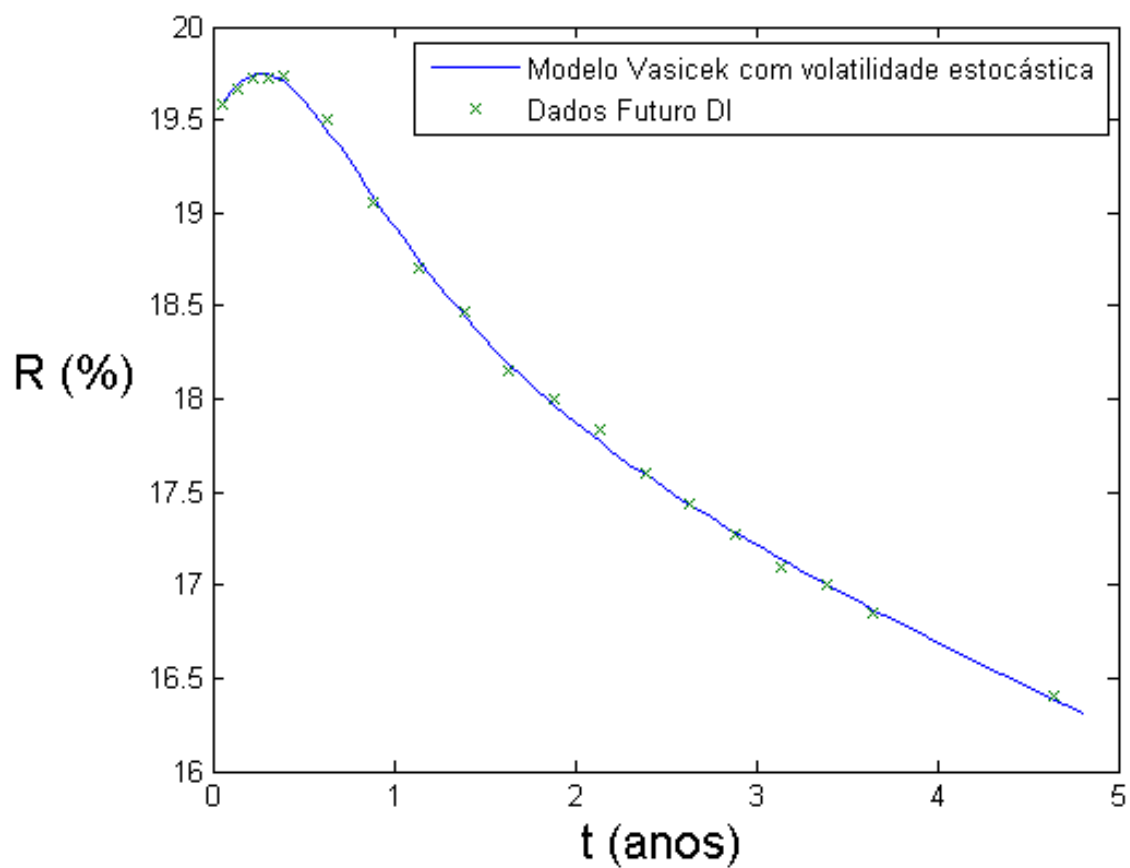


Figura 5.22: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 12/05/2005.

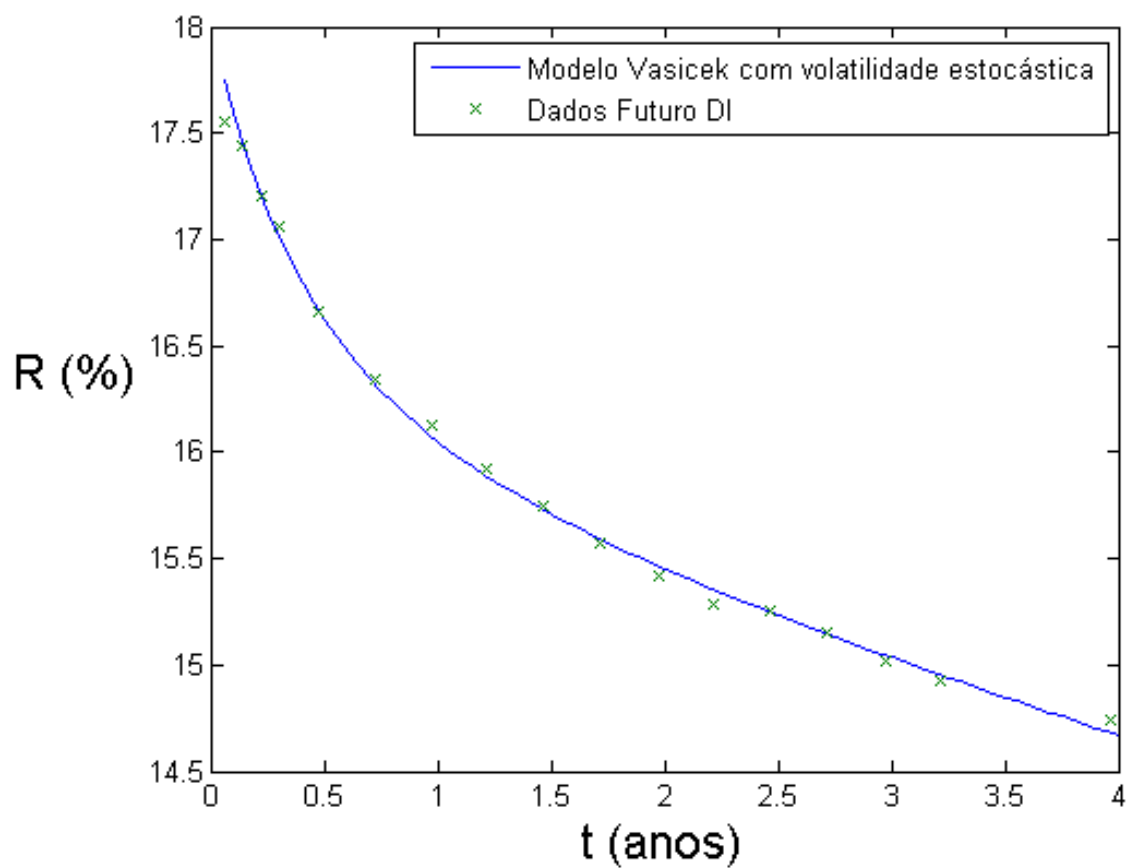


Figura 5.23: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 12/01/2006.

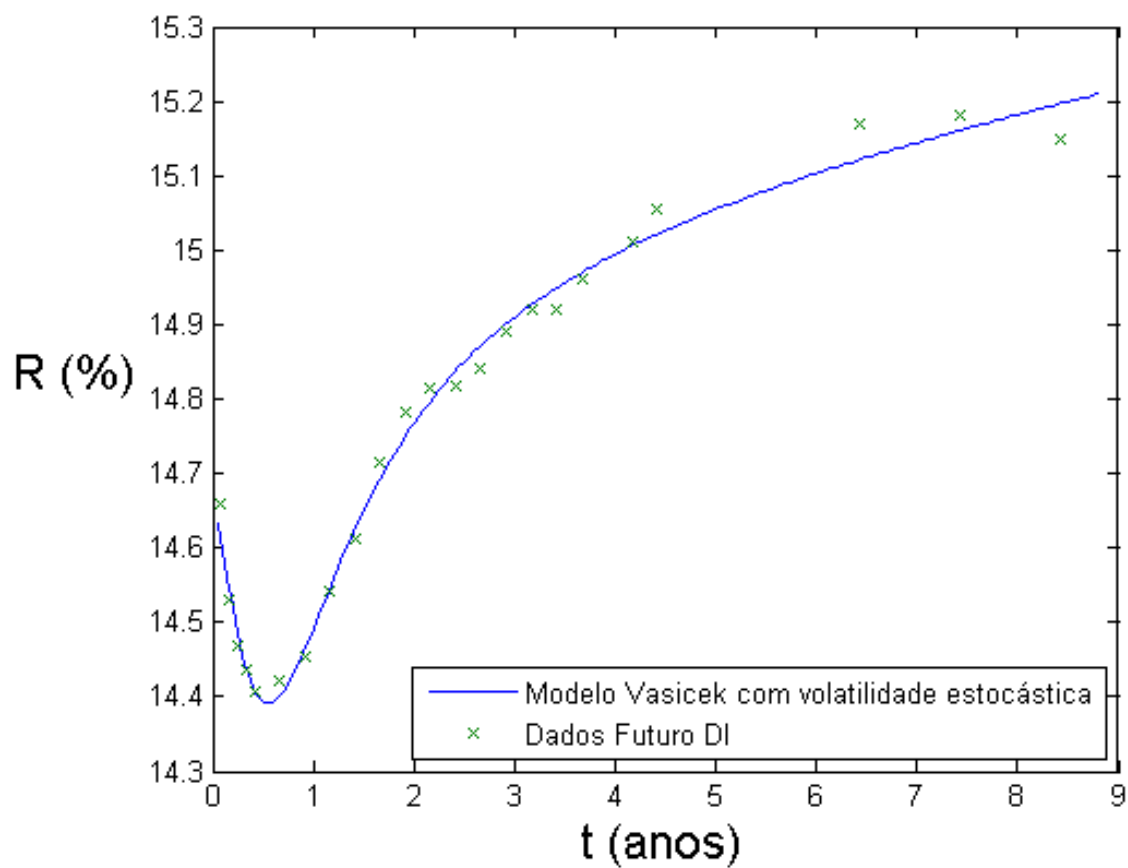


Figura 5.24: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 02/08/2006.

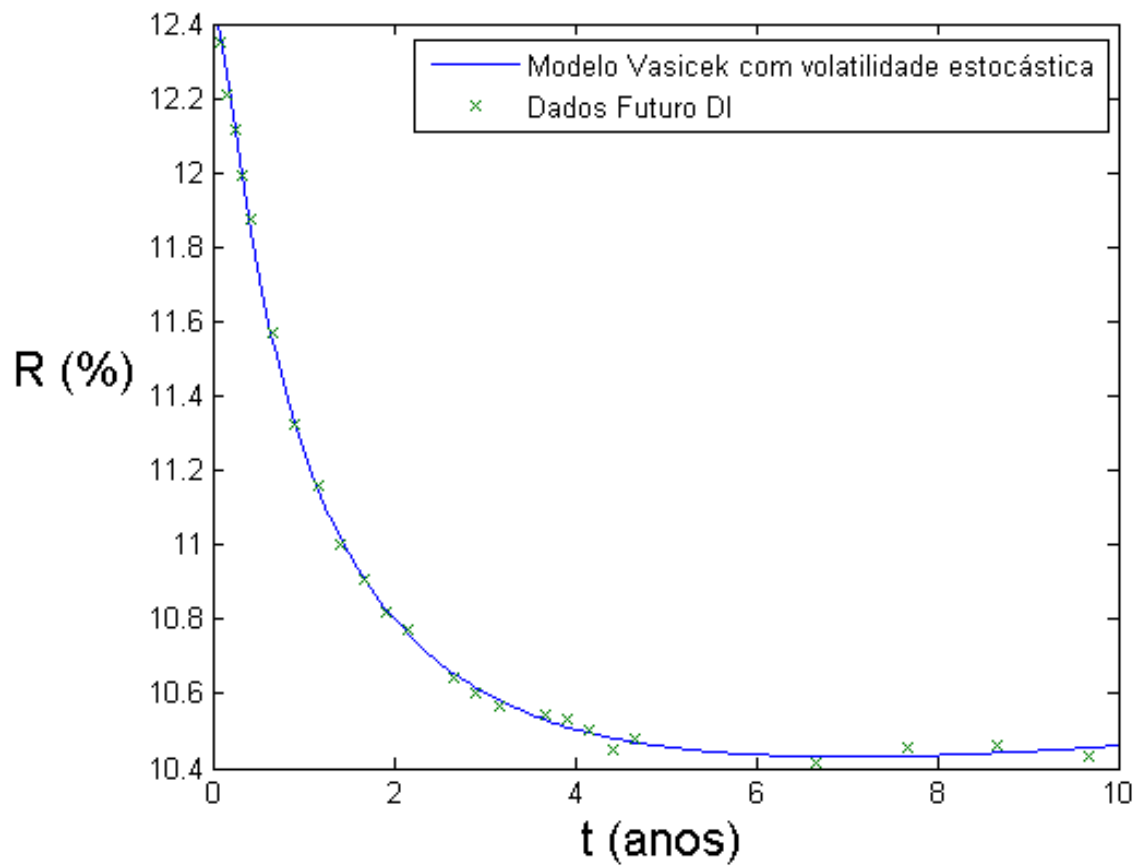


Figura 5.25: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 02/05/2007.

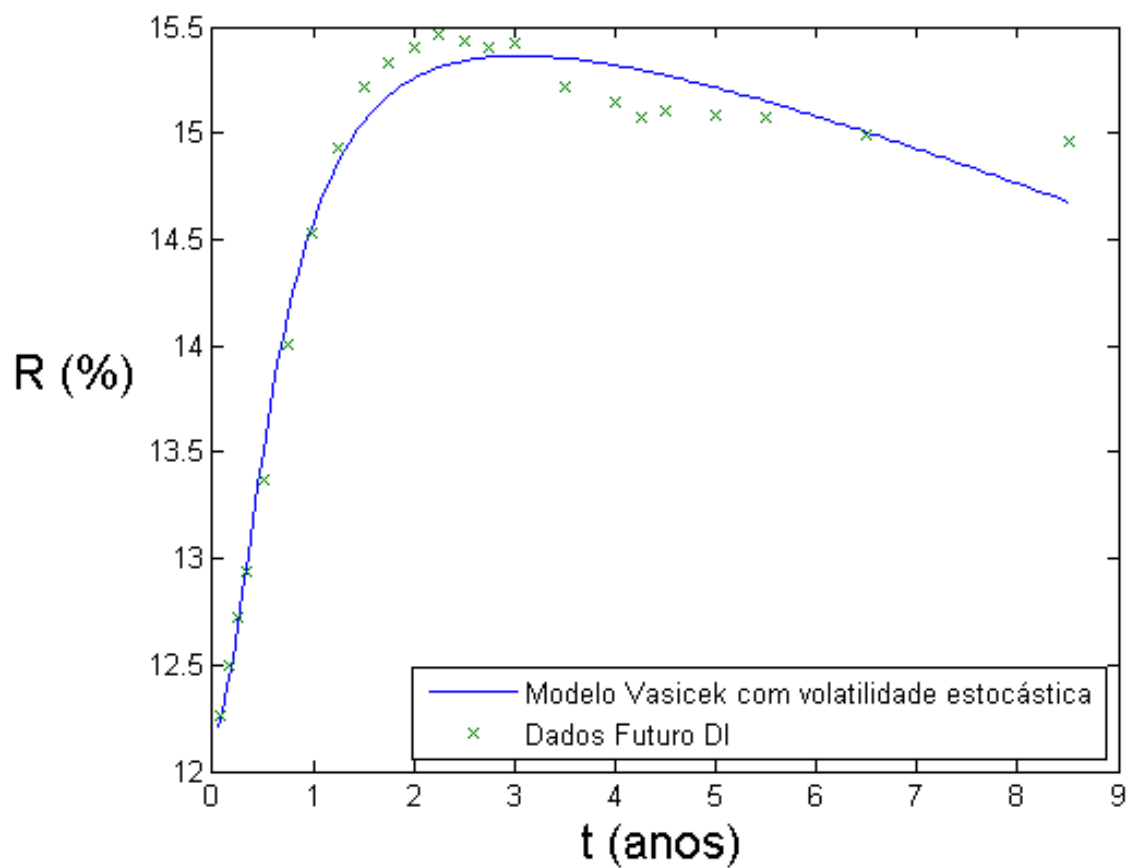


Figura 5.26: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 01/07/2008.

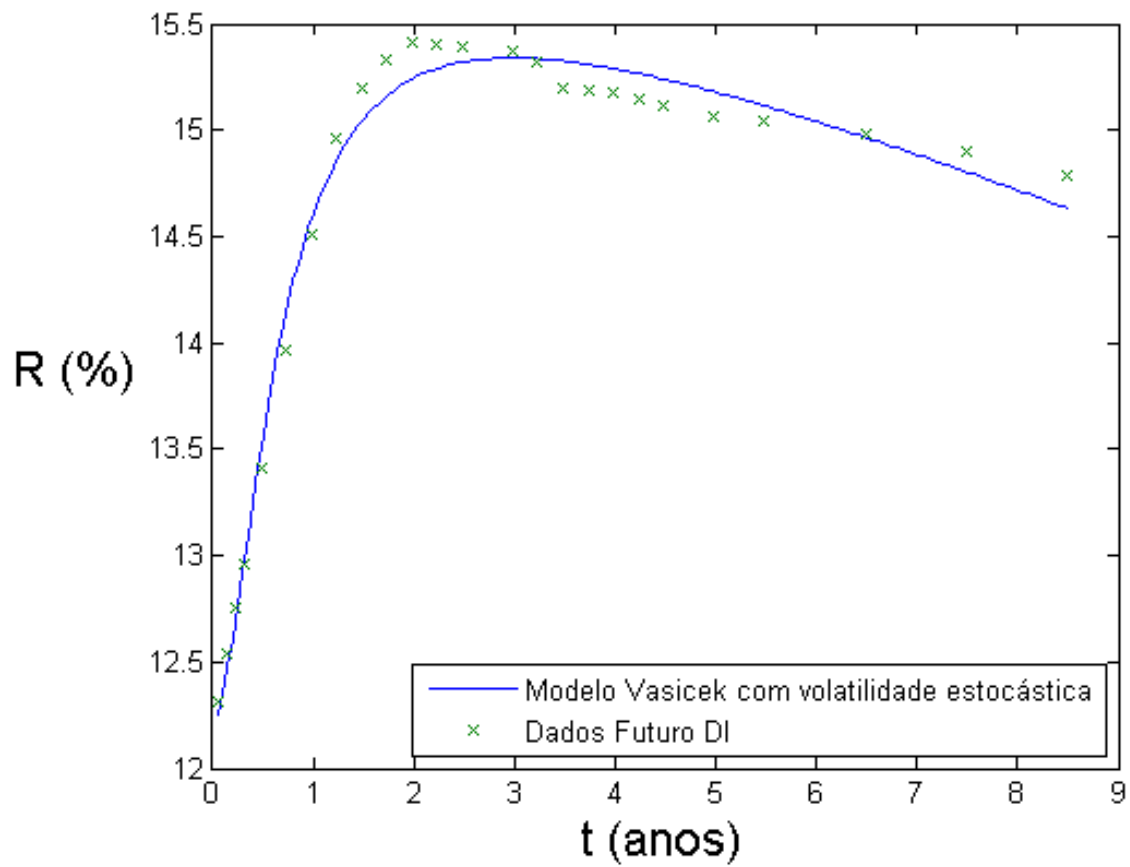


Figura 5.27: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 08/07/2008.

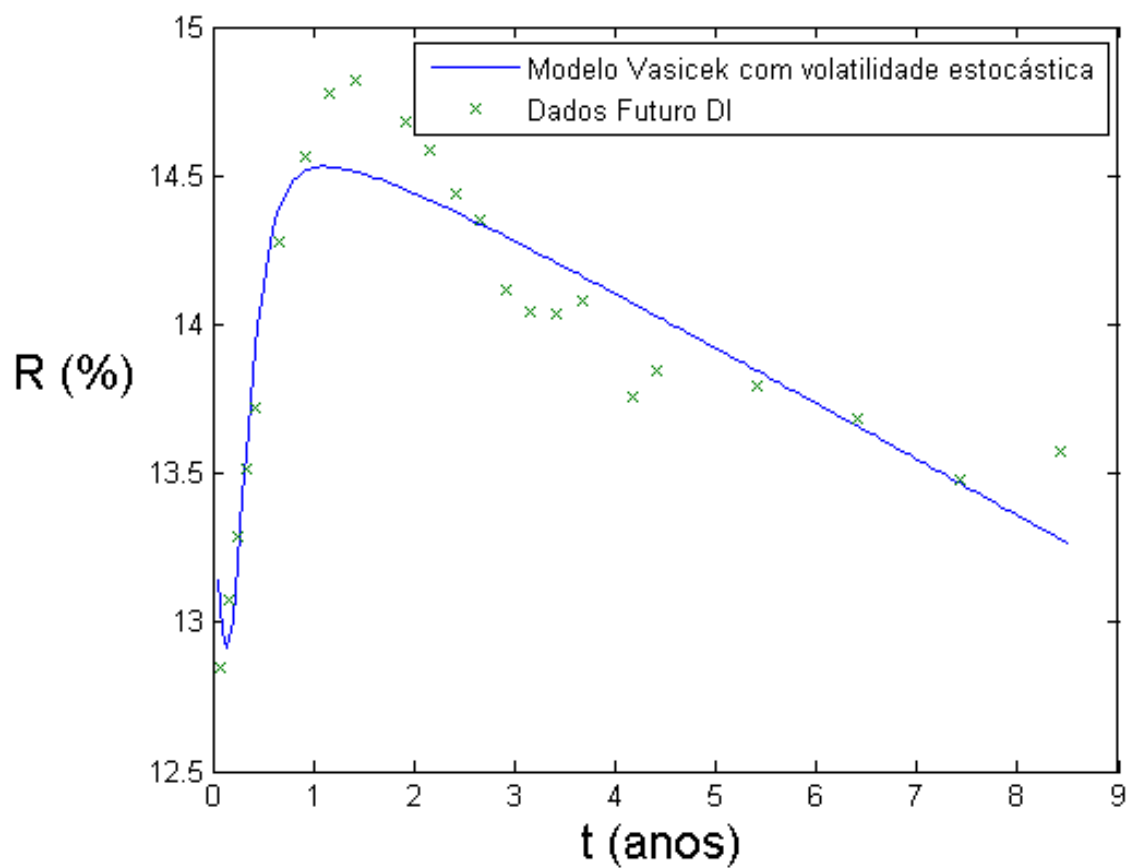


Figura 5.28: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 01/08/2008.

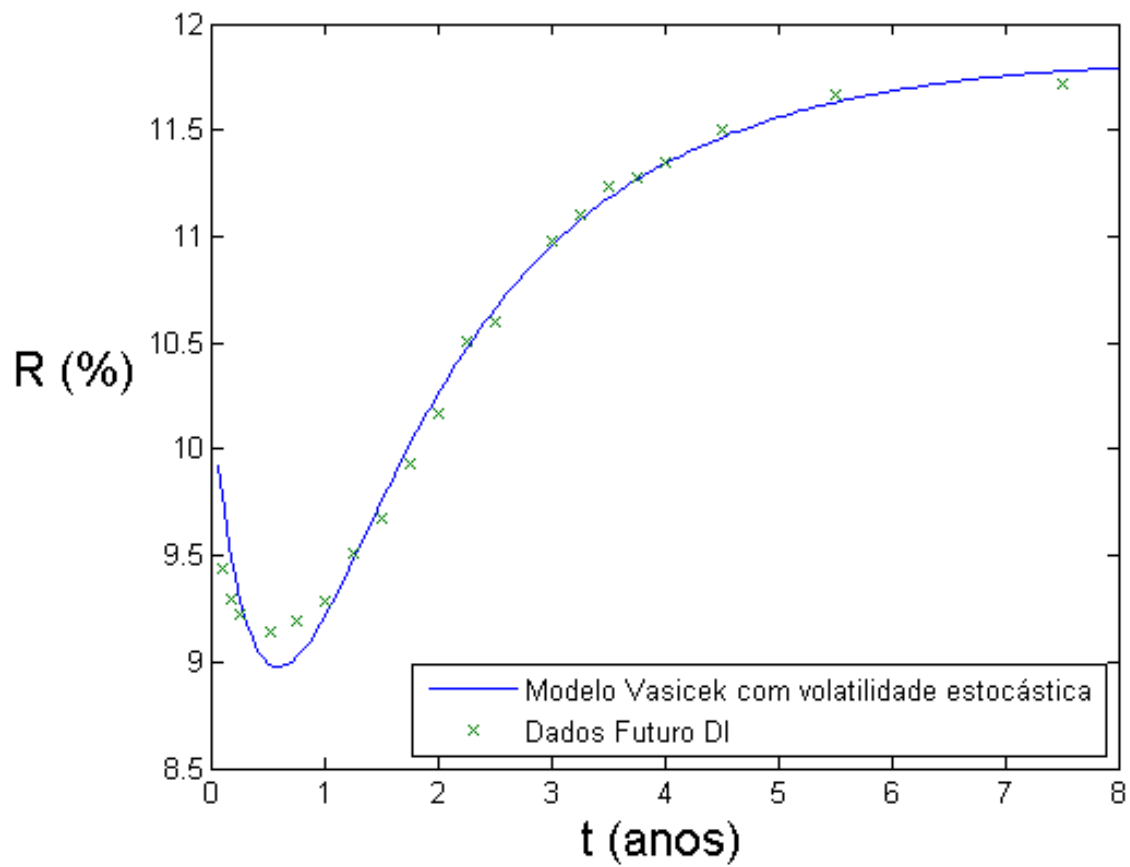


Figura 5.29: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 01/06/2009.

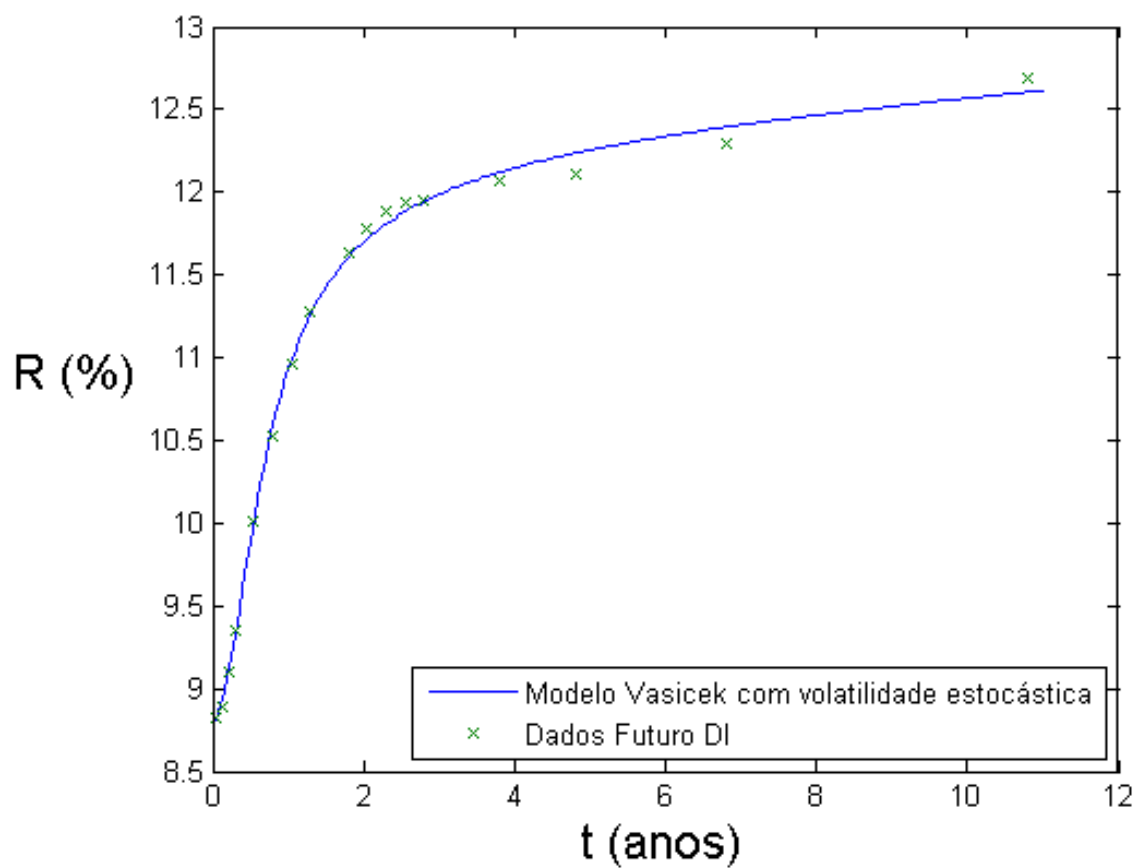


Figura 5.30: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 15/03/2010.

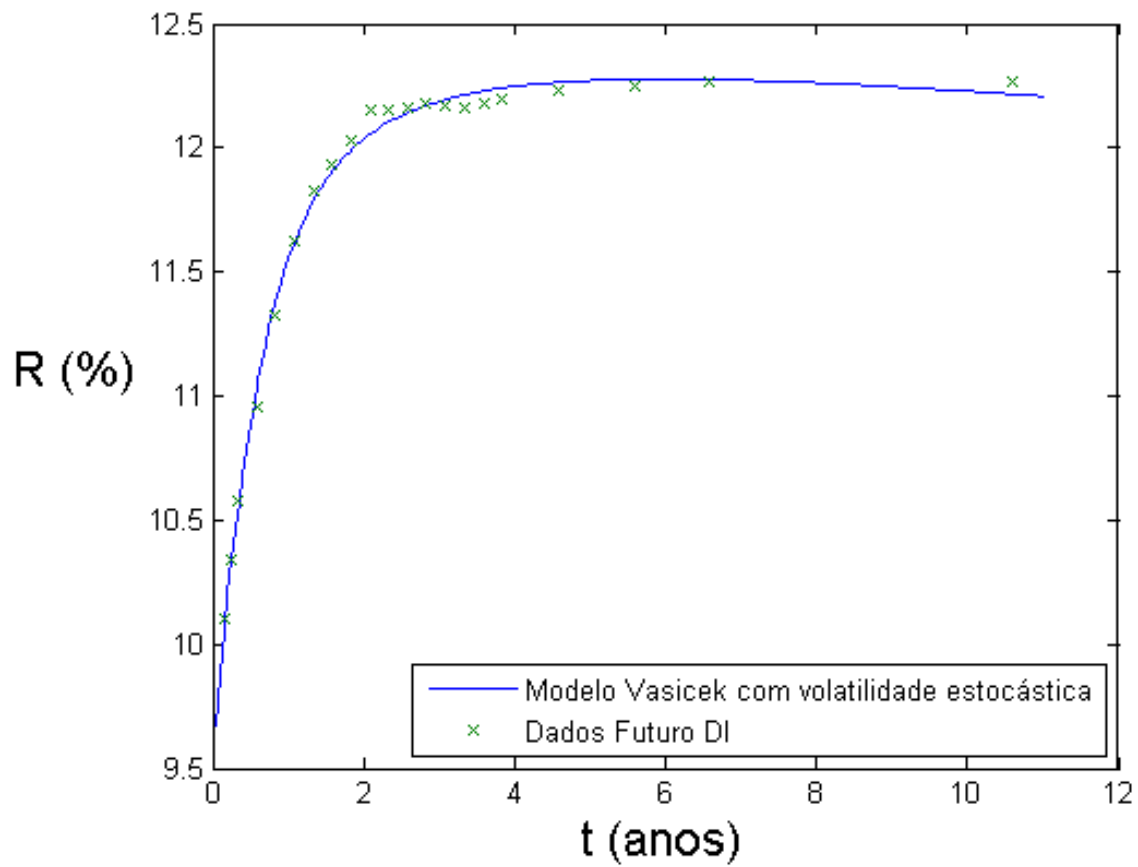


Figura 5.31: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 01/06/2010.

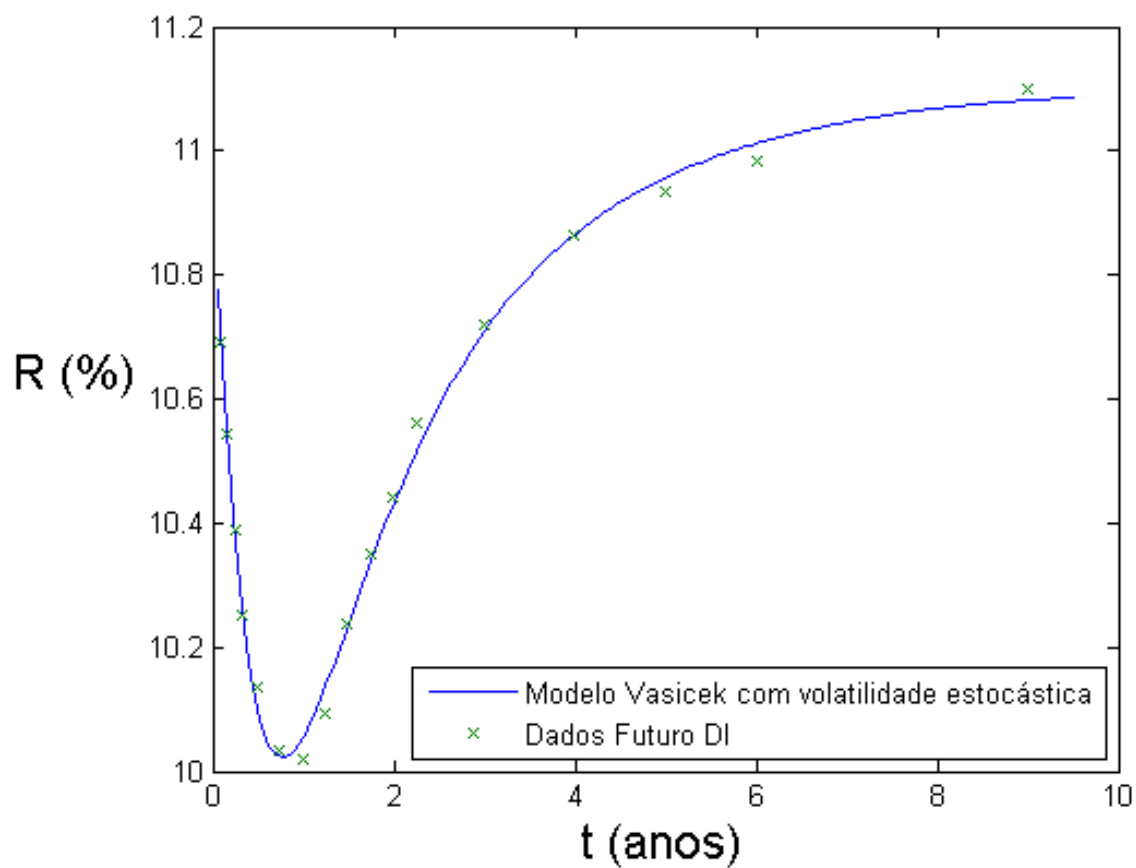


Figura 5.32: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 02/01/2012.

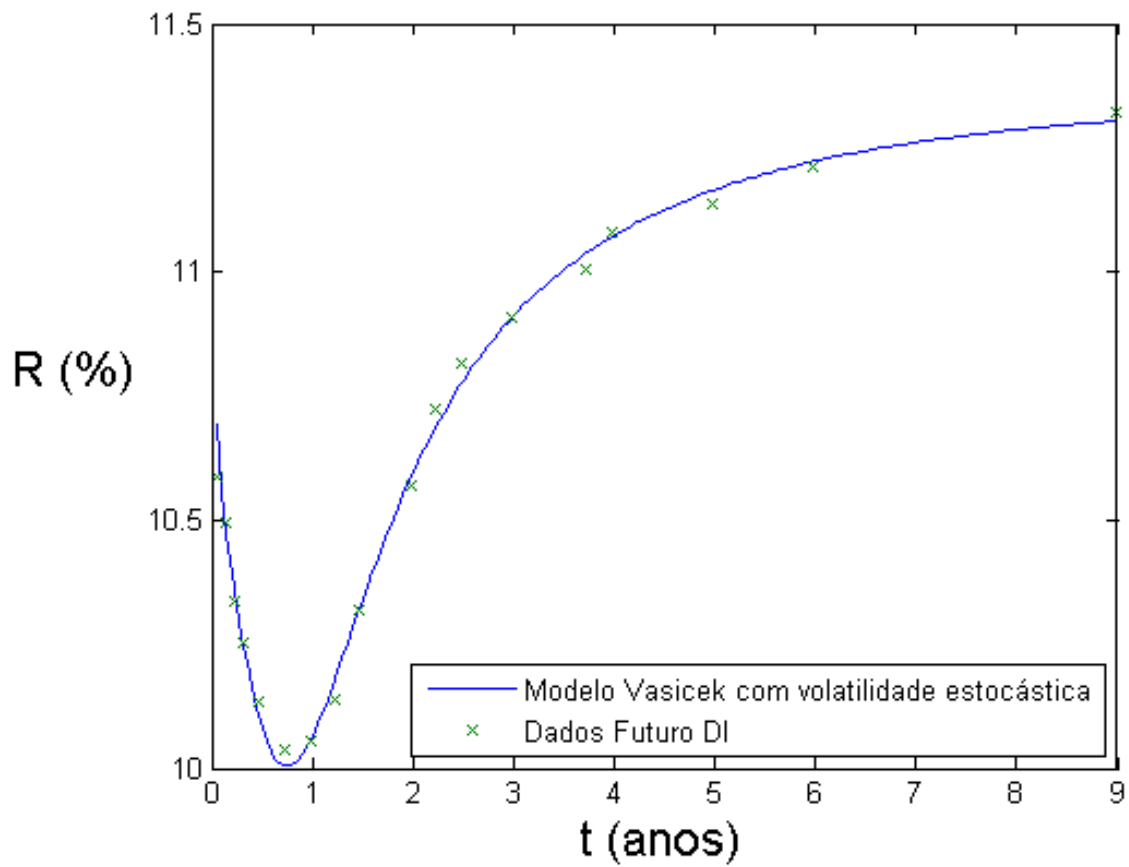


Figura 5.33: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 09/01/2012.

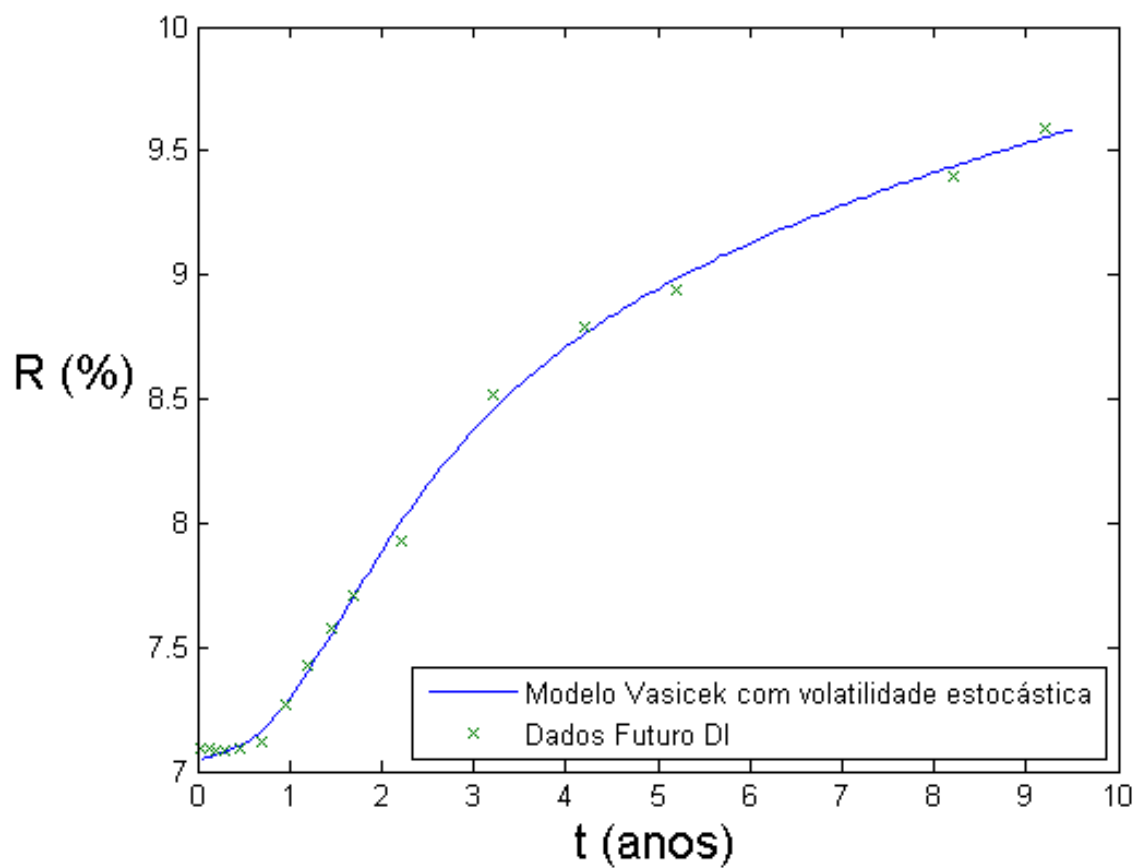


Figura 5.34: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 17/10/2012.

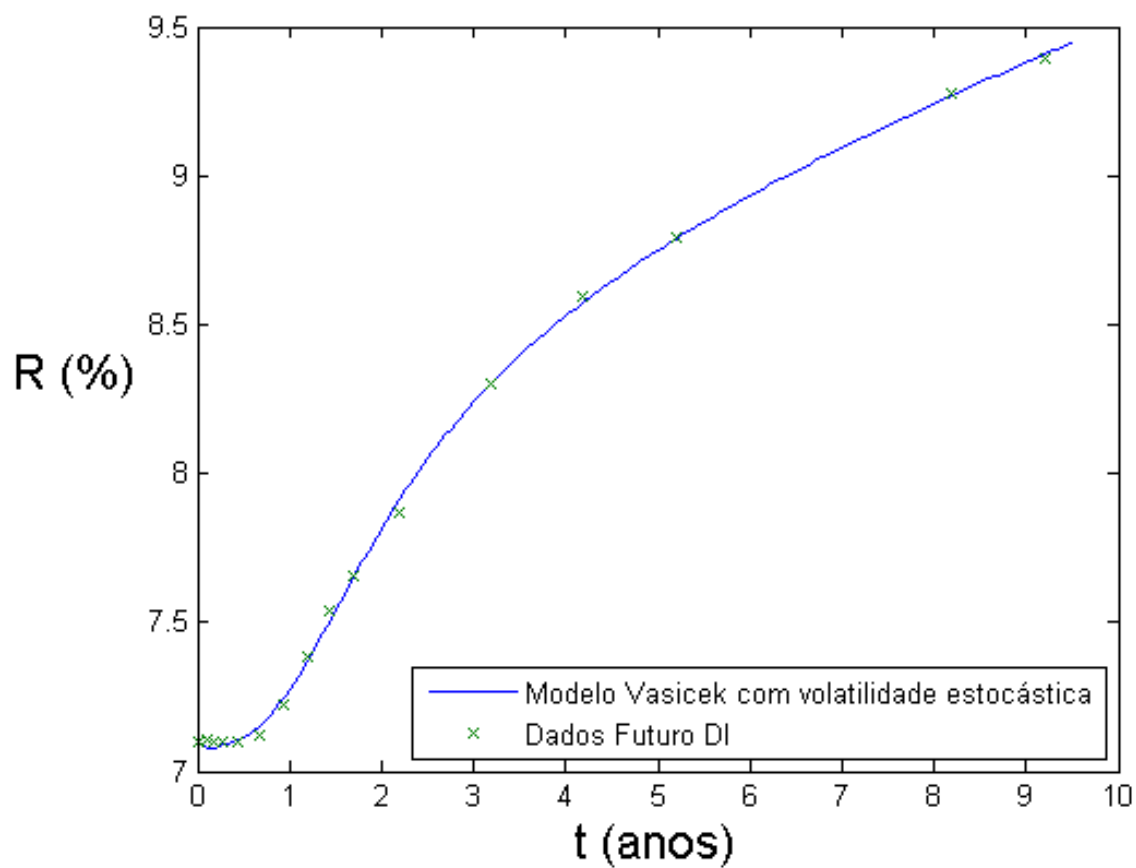


Figura 5.35: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 23/10/2012.

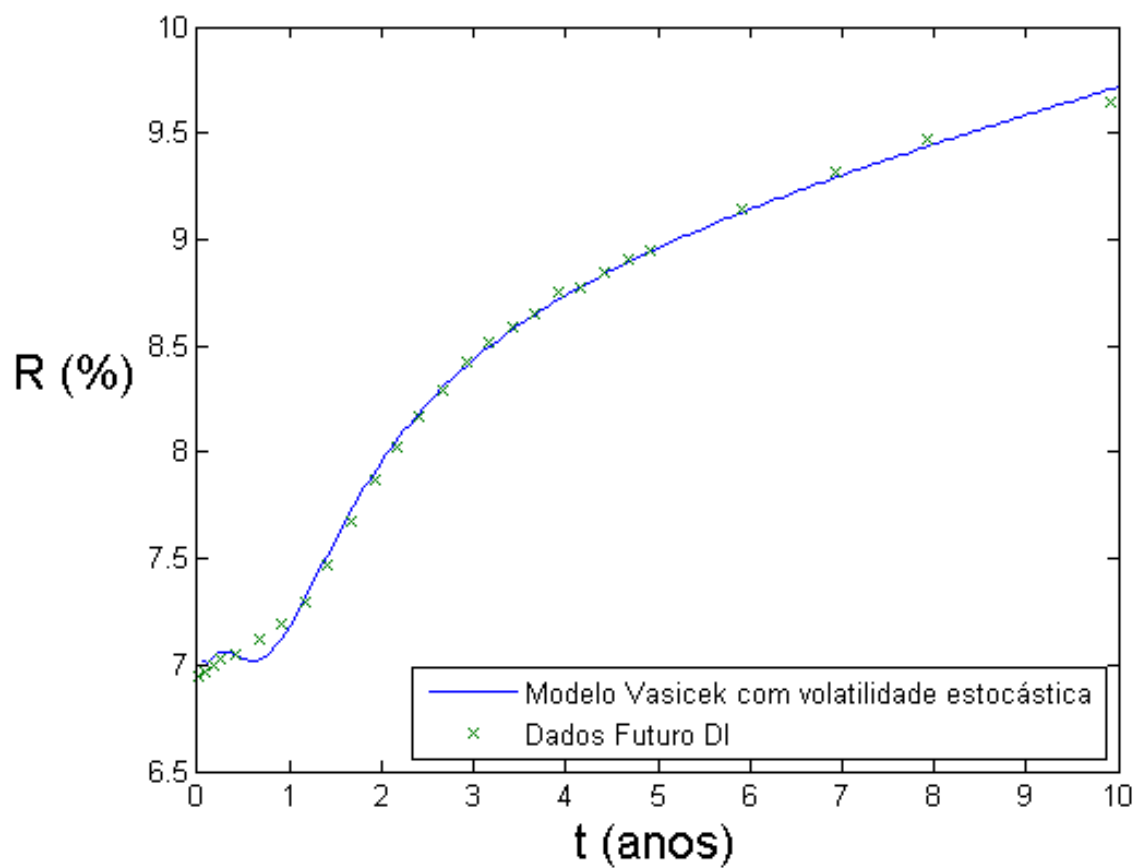


Figura 5.36: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 29/01/2013.

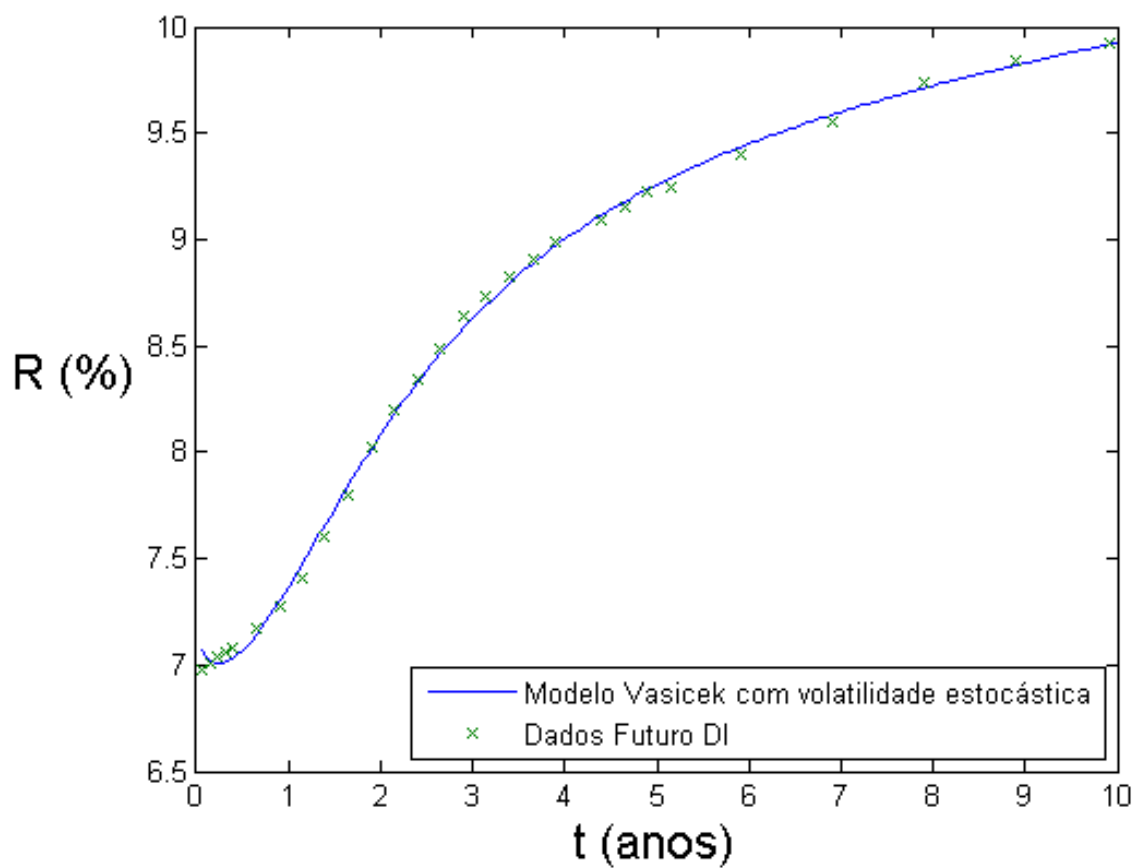


Figura 5.37: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 05/02/2013.

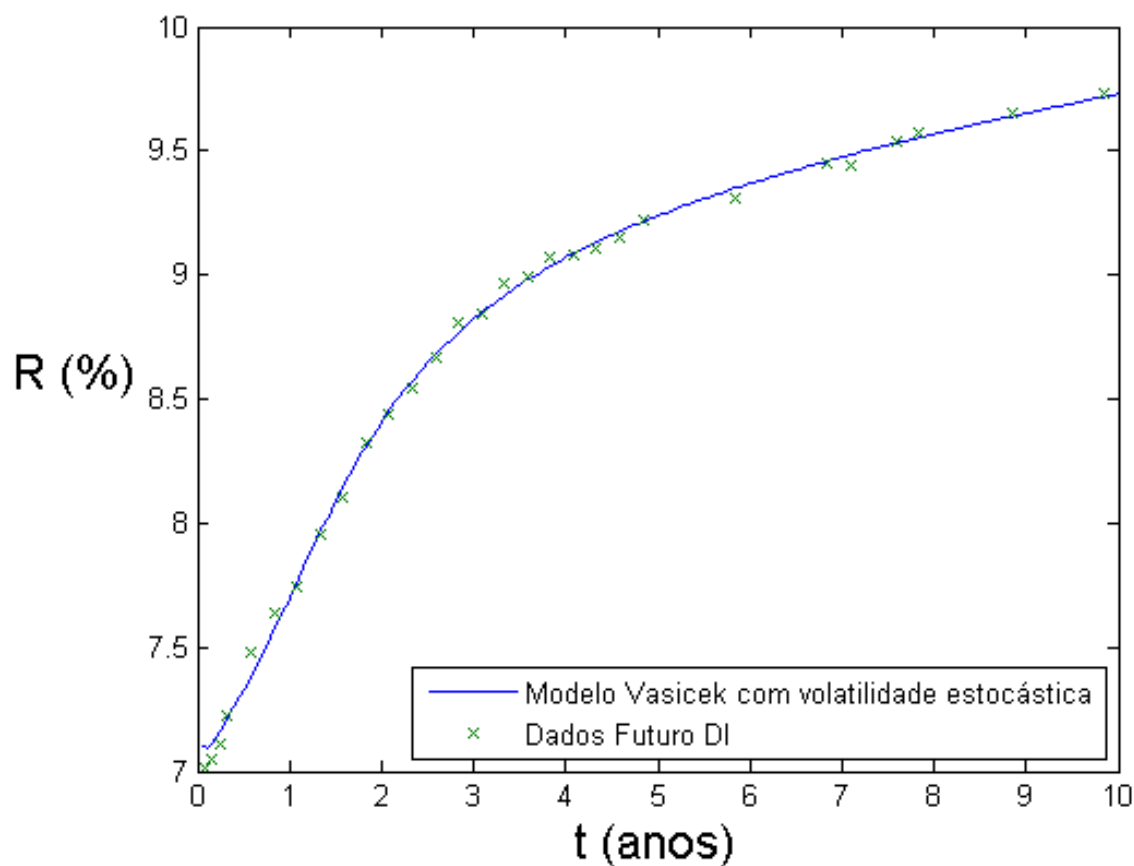


Figura 5.38: Gráfico da curva de *yield* obtido utilizando-se o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica com o parâmetro Θ ótimo. Os dados são do dia 01/03/2013.

Na Tabela 5.2, são apresentados os erros absoluto máximo, ou seja, a maior distância vertical entre a curva e os pontos, e o erro absoluto médio.

	Erro máximo	Erro médio
01/10/2003	0.0591	0.0266
08/10/2003	0.0515	0.0197
07/07/2004	0.1392	0.0548
12/05/2005	0.0623	0.0245
12/01/2006	0.1970	0.0489
02/08/2006	0.0791	0.0223
02/05/2007	0.0597	0.0216
01/07/2008	0.2792	0.1111
08/07/2008	0.2398	0.1055
01/08/2008	0.3601	0.1525
01/06/2009	0.3462	0.0818
15/03/2010	0.1503	0.0654
01/06/2010	0.2460	0.0546
02/01/2012	0.0439	0.0180
09/01/2012	0.0781	0.0237
17/10/2012	0.1211	0.0452
23/10/2012	0.0299	0.0135
29/01/2013	0.1613	0.0349
05/02/2013	0.0999	0.0287
01/03/2013	0.1189	0.0407

Tabela 5.2: Tabela mostrando o erro máximo e erro médio referente a cada gráfico apresentado para o modelo de Vasicek com volatilidade estocástica.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho foram analisados os modelos de Vasicek e CIR para a taxa de juros. O primeiro foi ajustado aos dados de futuros de DI do mercado brasileiro. O segundo não foi testado devido à sua maior complexidade computacional, portanto menos adequado às práticas de mercado. Descrevemos os modelos mencionados acima, bem como apresentamos suas soluções analíticas. Em seguida, apresentamos uma extensão com volatilidade estocástica, proposta por Fouque *et al.* em [3], e refizemos uma análise assintótica afim de obter fórmulas fechadas para o preço de uma *bond*, de grande interesse para aplicações do mercado devido à sua simplicidade, nesse novo modelo. Por fim, ajustamos esses modelos aos dados de diversos períodos da economia brasileira. Observou-se que, devido à maior complexidade do modelo estendido, que possui três novos parâmetros, uma melhoria significativa nos ajustes obtidos. Porém, o ganho em precisão não significou um grande aumento no custo computacional, devido às fórmulas fechadas obtidas, que simplificam o ajuste.

Após feitos os ajustes, fizemos uma análise do erro em cada data. Calculamos o erro médio para cada data, e também o erro máximo. Comparando os valores nas Tabelas 5.1 e 5.2, percebe-se uma diferença significativa. Na maioria dos casos, o erro médio caiu uma ordem de grandeza. Considerando que foram feitos vários ajustes, é seguro concluir que realmente o modelo estendido capta melhor as diversas estruturas a termo da taxa de juros brasileira, apresentando também um erro menor em sua previsão. Além disso, como comentado no fim da Seção 5.2, o modelo de Vasicek não convergiu para os casos em que a estrutura da taxa de juros apresentava um vale acentuado, uma deficiência não apresentada no modelo estendido, que convergiu em todos os casos analisados.

Outro objetivo do trabalho é mostrar que o modelo de Vasicek, apesar de complicado, pode ser útil para o mercado, visto que são obtidas fórmulas fechadas, relativamente simples de serem implementadas. Portanto é um modelo que se mostra adequado a instituições financeiras. O mesmo não pode ser dito do modelo CIR, que depende da solução de um sistema de EDO's, que juntamente com a rotina de minimização se torna um programa lento, portanto inadequado para ser usado por instituições financeiras. Simulações feitas por Fouque *et al.* mostram que o ganho desse modelo em relação ao de Vasicek não é significativo. Ele foi apresentado pois sua

solução é semelhante à do modelo de Vasicek e a análise assintótica feita anteriormente pode ser aplicada de maneira análoga.

Apêndice A

Código Principal

```
%data input
%DI: interest rate
%texto: dates in text format
[DI, texto] = xlsread('DI18.xlsx');
DI=DI/100;
%transform dates to date format
data = datenum(texto, 'dd/mm/yyyy');
today = datenum('02-jul-2009');

%counting date difference in days
data = data-today;
t=data/365;

%initia value for parameters
x = [ 2 0.08 0.15 -0.2 -0.2 -0.8];

%minimization routine
options = optimset('MaxFunEvals',10000000,'MaxIter',1000000);
fit = @(x) fit_vasSV(x,t,DI);
lambda = fminsearch(fit,x,options);

%plot
T=0:0.05:9.9;
yield = yield_vasSV(lambda,T);
plot(T,yield*100,'-',t,DI*100,'x');
xlabel('t (anos)', 'FontSize',16)
ylabel('R (%)', 'FontSize',16, 'Rotation',0, 'HorizontalAlignment', 'right')
```

```
legend('Modelo Vasicek com volatilidade estocástica',2,'Location','southEast')
```


Apêndice B

Função fitvasSV

```
%this function returns de objective function res

%lambda(1) = a : rate of mean reversion
%lambda(2) = r* : risk-adjusted mean-reverting level for the interest rate
%lambda(3) = sigma : effective volatility
%lambda(4) = V1
%lambda(5) = V2
%lambda(6) = V3
%x = spot interest rate

function [res yield] = fit_vasSV(lambda,t,DI)
%initializing spot rate
x=10.16/100; %01/06/2009

%renaming parameters
a=lambda(1);
r = lambda(2);
sigma = lambda(3);
sigma2 = sigma^2;
V1=lambda(4);
V2=lambda(5);
V3=lambda(6);

%useful variables
Rinf = r - sigma2/(2*a^2);
B = ( 1 - exp(-a*t) )/a;
```

```
for i=1:length(t)
R0(i,1) = Rinf + (x-Rinf)*B(i,1)/t(i,1) + sigma2*B(i,1)^2/(4*a*t(i,1));
end
for i=1:length(t)
D(i,1) = (1 - B(i,1)/t(i,1) - (0.5*a*B(i,1)^2)/t(i,1) - (a*a*B(i,1)^3)/(3*t(i,1)));
end

yield = R0 - D;

%residual to be minimized
res = norm(yield - DI);
```

Apêndice C

Função yieldvasSV

```
%this function calculates a vector of yield to be plotted  
function yield = yield_vasSVmod(lambda,t)
```

```
t=t';
```

```
%initializing spot rate  
x=10.16/100; %01/06/2009
```

```
%renaming parameters
```

```
a=lambda(1);
```

```
r = lambda(2);
```

```
sigma = lambda(3);
```

```
sigma2 = sigma^2;
```

```
V1=lambda(4);
```

```
V2=lambda(5);
```

```
V3=lambda(6);
```

```
%usefull variables
```

```
Rinf = r - sigma2/(2*a^2);
```

```
B = ( 1 - exp(-a*t) )/a;
```

```
for i=1:length(t)
```

```
R0(i,1) = Rinf + (x-Rinf)*B(i,1)/t(i,1) + sigma2*B(i,1)^2/(4*a*t(i,1));
```

```
end
```

```
for i=1:length(t)
```

```
D(i,1) = (1 - B(i,1)/t(i,1) - (0.5*a*B(i,1)^2)/t(i,1) - (a*a*B(i,1)^3)/(3*t(i,1)));
```

```
end
```

```
%return yield vector  
yield = R0 - D;
```

Referências Bibliográficas

- [1] Peter Cotton, J.-P. Fouque, G. Papanicolaou, and R. Sircar, *Stochastic volatility corrections for interest rate derivatives*, (2003).
- [2] John C Cox, Jonathan E. Ingersoll Jr., and Stephen A. Ross, *A theory of the term structure of interest rates*, *Econometrica* **53** (1985), 385.
- [3] Jean-Pierre Fouque, George Papanicolaou, Ronnie Sircar, and Knut Solna, *Multiscale stochastic volatility for equity, interest rate, and credit derivatives*, Cambridge University Press, 2011.
- [4] M. R Grasseli and T. R Hurd, *Credit risk modeling*, Department of Mathematics and Statistics, 2008.
- [5] Ralf Korn and Elke Korn, *Option pricing and portfolio optimization*, American Mathematical Society, 2001.
- [6] Oldrich Vasicek, *An equilibrium characterization of the term structure*, *Journal of Financial Economics* (1977), 177–188.