

PROCESSOS DE VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA E UMA AVALIAÇÃO SOBRE A ANÁLISE
ASSINTÓTICA APLICADA À PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES

por:

Maristela Sabrina Sant'Ana Carvalho

Projeto de Final de Curso submetido ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
Aplicada como um dos requerimentos para a conclusão do Curso de Mestrado
Profissional de Métodos Matemáticos em Finanças

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA

Rio de Janeiro

2011



INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

MARISTELA SABRINA SANT'ANA CARVALHO

PROCESSOS DE VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA E UMA AVALIAÇÃO SOBRE A
ANÁLISE ASSINTÓTICA APLICADA À PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES

Projeto Final apresentado ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada como um dos requerimentos para conclusão do curso de Mestrado Profissional de Métodos Matemáticos Aplicados a Finanças.

Orientador: Dr. Max Oliveira Souza

Co-Orientador: Dr. Jorge Passamani Zubelli

Rio de Janeiro - 2011

Aluna: Maristela Sabrina Sant'Ana Carvalho

Processos de Volatilidade Estocástica e uma Avaliação sobre a Análise Assintótica Aplicada à Precificação de Opções

81 páginas

Projeto Final (Mestrado Profissional) - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

1. Volatilidade Estocástica
2. Reversão à Média
3. Expansão Assintótica

Dedico este trabalho ao meu amado esposo, Eduardo Marinho, pelos incondicionais apoio e paciência durante o período do mestrado. Aos meus queridos familiares, amigos da vida, amigos de estudo e de trabalho por compreenderem minha ausência em datas tão importantes. E não poderia deixar de dividir este trabalho com meus professores, por me oferecerem a oportunidade de aprimorar aquela que é a maior riqueza do ser humano: o conhecimento.

Agradecimentos

Agradeço a todos os professores e colegas de turma, sempre colaboradores. Aos professores Roberto Imbuzeiro Oliveira, Jorge Passamani Zubelli e Max Oliveira Souza pelo valioso tempo dedicado a acompanhar o desenvolvimento deste projeto e a todo o corpo técnico e administrativo do IMPA. Agradeço aos meus familiares, amigos, colegas de trabalho, ao meu querido esposo e a todos aqueles que me ajudaram na longa caminhada até aqui.

Resumo

Este trabalho está concentrado em modelos de precificação de opções baseados no conceito de volatilidade estocástica sob o regime de reversão à média. Para tal, seguimos a metodologia de análise assintótica e homogenização desenvolvida por J.-P. Fouque, G. Papanicolaou, R. Sircar e K. Solna (FPSS). Esta metodologia proporciona uma correção de primeira ordem para a tradicional fórmula de Black-Scholes que pode ser calibrada para os dados de mercado das opções de forma que o efeito smile seja contemplado. Após uma revisão teórica da metodologia proposta por FPSS, verificamos a mesma empiricamente utilizando dados das opções sobre o índice SP500, principal representante do mercado de ações americano. Em seguida, é apresentada uma comparação estatística detalhada entre os dados de mercado observados e os resultados obtidos a partir do preço corrigido pela calibragem de primeira ordem da expansão assintótica, tendo sido adotado para esta calibragem o método proposto por FPSS. Também implementamos e avaliamos o método proposto em FPSS de calibragem de ordem superior para o modelo assintótico, conseguindo resultados que consideram de forma mais apurada o efeito smile na estrutura a termo da volatilidade das opções.

Palavras-chave: volatilidade estocástica, reversão rápida à média, expansão assintótica

Abstract

We focus on stochastic volatility models for option pricing under a fast mean reversion regime and a long term trend return. We follow the asymptotic analysis and homogenization methodology developed by J.-P. Fouque, G. Papanicolaou, R. Sircar and K. Solna (FPSS). The methodology provides a first order correction to the traditional Black and Scholes formula that can be calibrated to option data and yields a good adjustment to the smile curve. After a review of the literature and of the theoretical background, we verify empirically the FPSS methodology in the context of SP500 index options. This is accomplished by presenting a detailed statistical comparison between the market data and the corrected price expansion up to the first order calibrated by using the FPSS techniques and also a superior order calibrating, achieving refined results for the smile effect of volatility term structure.

Keywords: stochastic volatility, asymptotic expansion, mean-reversion

Lista de Figuras

3.1	Variograma - IBOVESPA	33
3.2	Simulação do Processo OU - IBOVESPA	33
3.3	Variograma - SP500	34
3.4	Simulação do Processo OU - SP500	34
4.1	Parâmetro a - Escala Rápida	52
4.2	Parâmetro b - Escala Rápida	52
4.3	Parâmetro b - Modelo Multi-Escala	53
4.4	Parâmetro m - Modelo Multi-Escala	53
4.5	Janela de Tempo para Estimação da Volatilidade Histórica	57
4.6	Comparação entre Modelos de Volatilidade Histórica	58
4.7	Comparação entre Modelos Assintóticos	59
4.8	Comparação Geral	59
4.9	28/02/2011 - Prazo Vencimento 19 Dias	63
4.10	FPSS - Prazo Vencimento 15 Dias	63
4.11	16/02/2011 - Prazo Vencimento 59 Dias	64
4.12	FPSS - Prazo Vencimento 71 Dias	64
4.13	16/02/2011 - Prazo Vencimento 122 Dias	65
4.14	FPSS - Prazo Vencimento 197 Dias	65
4.15	16/02/2011 - Prazo Vencimento 304 Dias	66

4.16 FPSS - Prazo Vencimento 379 Dias	66
4.17 Parâmetros do polinômio de quarto grau	67
4.18 Amostra de Opções do SP500 - Call Européia	68

Sumário

1	Introdução	5
2	Conceitos Fundamentais	9
2.1	Conceitos Fundamentais	9
2.1.1	Definições Básicas	9
2.1.2	Oportunidade de Arbitragem e Medida Neutra ao Risco	12
2.1.3	O Ativo de Risco na Medida Neutra ao Risco	15
2.1.4	Precificação na Medida Neutra ao Risco	18
2.2	A Fórmula de Black-Scholes	19
2.2.1	Paridade Put-Call	22
2.2.2	A Volatilidade Implícita	23
3	Volatilidade Estocástica	25
3.1	O Conceito de Volatilidade Estocástica	25
3.2	O processo de Ornstein-Uhlenbeck (OU)	27
3.2.1	Estimando os parâmetros do processo de Ornstein-Uhlenbeck	29
3.2.2	Simulações do Processo de Ornstein-Uhlenbeck para o Ibovespa e SP500	31
4	Precificação em Mercados Incompletos e Expansão Assintótica	35
4.1	Precificação de Derivativos em Mercados Incompletos	36

Sumário	4
4.2 O Preço Corrigido de Black-Scholes	40
4.2.1 A Fórmula de Precificação sob a Expansão Assintótica	41
4.2.2 Calibragem do Modelo Assintótico - Uma Escala Rápida	43
4.2.3 Calibragem Considerando o Efeito <i>Smile</i> - Modelo Assintótico Multi-Escala	46
4.2.4 Resultados da Calibragem	50
4.3 Análise Comparativa dos Modelos	55
4.4 Correções de Ordem Superior	61
5 Considerações Finais	69
Referências Bibliográficas	
A Códigos MATLAB	

Capítulo 1

Introdução

Os derivativos podem ser definidos, de maneira simples, como instrumentos financeiros cujo valor oscila em função de outro ativo (podendo este ser financeiro ou não), denominado ativo objeto ou subjacente. Em geral, tais instrumentos são utilizados para construção de mecanismos de proteção contra possíveis flutuações no valor do ativo objeto.

Um derivativo bastante popular é a opção. O contrato de opção representa um acordo entre as partes de venda e compra do ativo objeto no vencimento estabelecido a um preço pré-determinado na data de contratação (strike ou preço de exercício). Este contrato dá ao seu detentor o direito, mas não a obrigação de exercê-la. Existem dois tipos básicos de opções: a opção de compra (dá ao detentor o direito de comprar o ativo objeto pelo valor do strike) e a opção de venda (dá ao detentor o direito de vender o ativo objeto pelo valor do strike). Podemos ainda classificar as opções em dois tipos: americana, que garante ao detentor o direito de exercer a compra/venda a qualquer momento desde a data de emissão do contrato até o seu vencimento, e a européia, que garante ao detentor o direito de exercer seu direito de compra/venda apenas na data de vencimento do contrato.

Existe, portanto, uma assimetria entre as obrigações e os direitos do emissor e

detentor do contrato, respectivamente. Na data de celebração do contrato é fixado um preço ajustado ao risco (prêmio), que o detentor da opção deverá pagar ao seu respectivo emissor, de forma que o prêmio seja ajustado ao risco incorrido pelo emissor por estar assumindo variações futuras no valor do ativo objeto entre as datas de emissão e exercício da opção. Um dos modelos mais difundidos de precificação de opções é o modelo de Black-Scholes, por sua simplicidade e por ser independente do nível de risco do investidor.

Em 1973, foram publicados os artigos *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* por Fischer Black e Myron Scholes e *Theory of Rational Option Pricing* por Robert C. Merton. Uma das principais características do modelo de Black-Scholes é considerar que o preço do ativo segue um Movimento Browniano Geométrico com volatilidade constante. Podemos, a partir da observação dos dados de mercado, concluir que a hipótese da volatilidade constante não se comprova na realidade. Muitos estudos têm sido desenvolvidos atualmente no sentido de detectar o que denominam distorção dos preços das opções calculados a partir da aplicação da fórmula de Black-Scholes em relação aos preços de fato praticados no mercado, [6],[9],[10]. Um exemplo prático de distorção consiste na identificação do efeito *smile* observado para a volatilidade implícita.

Além disso, existem estudos voltados à construção de superfícies de volatilidade, [1],[4]. Estas superfícies são formadas a partir do estabelecimento da relação existente entre a volatilidade implícita de opções de compra (sobre um mesmo ativo objeto), prazo de vencimento e preço de exercício. Estas *calls* devem possuir liquidez suficiente para que uma quantidade de vértices satisfatória à formação de parte da superfície seja extraída a partir da realização de negócios no mercado. Os pontos que correspondem a negociações efetivas são estimados diretamente e os demais são obtidos através do mecanismo de interpolação. Se a hipótese da volatilidade constante assumida em Black-Scholes de fato correspondesse ao que ocorre na prática com o comportamento da volatilidade dos ativos, a superfície de volatilidade deveria ser plana, o que não ocorre.

Além disso, esta superfície apresenta comportamento estocástico.

Em [1] e [4] podem ser encontrados métodos de estimação para a superfície de volatilidade estocástica a partir de dados esparsos e adotando o modelo de precificação sugerido em [2], de modo que estas superfícies satisfaçam determinadas condições de suavidade e a garantia de não existência de oportunidade de arbitragem. O objetivo do presente trabalho concentra-se não exatamente no desenvolvimento do algoritmo de geração destas superfícies, mas na avaliação dos resultados alcançados em termos de ajuste aos preços de mercado quando adotamos a correção para a fórmula de Black-Scholes desenvolvida através da expansão assintótica em [1], [2], [4] e [9].

Vamos apresentar a metodologia desenvolvida por [2], que corresponde a uma possível solução para o apreçamento de derivativos sob o conceito de volatilidade estocástica. Mais especificamente, estaremos interessados em adotar modelos baseados em processos estocásticos caracterizados pelo regime de reversão à média. Em seguida, vamos gerar preços baseados nesta metodologia, que consistem no preço de Black-Scholes submetido a uma correção dada pela volatilidade estocástica, onde esta última é construída a partir da análise assintótica. Após, realizaremos uma comparação entre os preços corrigidos e os preços observados no mercado, a fim de verificar a eficácia deste modelo. Consideraremos ainda, para um melhor ajuste do modelo assintótico ao efeito *smile*, uma expansão que considera duas escalas de tempo de reversão para o processo da volatilidade: uma rápida e outra lenta, e abordaremos uma expansão de ordem superior, conforme sugerido pelos autores em [9]. Maiores detalhes a respeito de cada uma das abordagens aqui mencionadas serão oferecidos nos capítulos a seguir.

Este trabalho está organizado conforme a seguir: no Capítulo 2 apresentaremos um conjunto de conceitos fundamentais necessários ao estudo proposto, discutindo e definindo itens tais como oportunidade de arbitragem, completude de mercados e precificação na medida neutra ao risco.

O Capítulo 3 é dedicado à apresentação do processo que será adotado para modelar

a volatilidade estocástica neste estudo, denominado processo de Ornstein-Uhlenbeck. O mesmo consiste num processo estocástico caracterizado pelo regime de reversão à média. Apresentaremos também os resultados encontrados para a caracterização do regime de reversão à média da volatilidade para o SP500 e para o IBOVESPA.

No quarto capítulo discutiremos o conceito de precificação em mercados incompletos, mais especificamente, estaremos interessados em apresentar métodos de precificação para opções que considerem a volatilidade descrita pelo processo de Ornstein-Uhlenbeck num mercado livre de oportunidade de arbitragem. Analisaremos o método do preço de Black-Scholes corrigido, proposto em [2] e [9], e discutiremos os resultados alcançados através da aplicação deste modelo. Além disso, será avaliado o método proposto em [9] para calibragem do efeito smile na precificação de opções.

O Capítulo 5 apresenta as conclusões finais.

Capítulo 2

Conceitos Fundamentais

2.1 Conceitos Fundamentais

Este capítulo será dedicado ao esclarecimento de alguns conceitos básicos de finanças que são de extrema relevância para o desenvolvimento do nosso objeto de estudo. As seções iniciais contêm definições básicas a respeito de processos estocásticos, Movimento Browniano, martingal, integral estocástica e medida neutra ao risco. Em seguida, definiremos o conceito de mercado livre de oportunidades de arbitragem e precificação neutra ao risco. Em seções posteriores será apresentado modelo de Black-Scholes e sua respectiva fórmula de precificação. A notação utilizada nas próximas seções baseia-se em [8].

2.1.1 Definições Básicas

Definição 1 (Processo Estocástico) *Um processo estocástico é um par da forma $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in I}$ formado pela filtração $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ e uma família de variáveis aleatórias com valor em \mathbb{R}^n , onde X_t é um processo estocástico \mathcal{F}_t -mensurável. Uma filtração $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ é uma coleção de σ -álgebras onde I é um conjunto ordenado tal que para $s < u$, $s, u \in I$ vale $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_u$.*

Definição 2 (Movimento Browniano) *Seja o espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) . O Movimento Browniano é um processo $\{W_t\}_{t \geq 0}$ com caminhos contínuos tal que valem as propriedades a seguir:*

$$W_0 = 0 \text{ P-qc}$$

$$W_u - W_s \approx N(0, u - s) \text{ com } s < u$$

$(W_t - W_v)$ e $(W_u - W_s)$ são incrementos independentes com $0 \leq s \leq u \leq v \leq t$

Definição 3 (Martingal) *Seja $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in I}$ um conjunto cujo processo toma valores reais tal que $E|X_t| < \infty \forall t \in I$ e seja a filtração $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$. (X_t) é considerado um martingal se $\forall s, t \in I, s < t$ for válido $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ P-qc.*

Definição 4 (Integral Estocástica) *Seja $(X_t)_{t \in I}$ um processo estocástico simples. A integral estocástica pode ser definida, para $t \in [0, t]$, como:*

$$I(X) = \int_0^t X(s) dW(s) \quad (2.1)$$

Seguindo o apresentado em [8], o processo de Itô pode ser definido como um processo estocástico da forma:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \Delta(s) dW(s) + \int_0^t \Theta(s) ds$$

onde $X(0)$ é não estocástico e assumimos que a variância quadrática do processo de Itô é dada por:

$$[X, X](t) = \int_0^t \Delta^2(s) ds$$

A notação diferencial de $X(t)$ é dada por:

$$dX(t) = \Delta(t) dW(t) + \Theta(t) dt$$

Segundo o Teorema 4.4.1 em [8], temos, se f for uma função de classe C^2 , para todo $T \geq 0$ vale:

$$f(T, W(T)) = f(0, W(0)) + \int_0^T f_t(t, W(t))dt + \int_0^T f_x(t, W(t))dW(t) + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, W(t))dt$$

Definição 5 (Fórmula de Itô Bidimensional) *Seja (W_t) um movimento Browniano unidimensional e (X_t) e (S_t) processos de Itô tais que:*

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \quad (2.2)$$

$$dS_t = \alpha_t dt + \beta_t dW_t \quad (2.3)$$

Seja $f \in C^{1,2}([0, \infty), U \subseteq \mathbb{R}_2)$. Para todo $t \geq 0$:

$$df(t, X_t, S_t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dX_t + \frac{\partial f}{\partial s} dS_t + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dX_t dX_t + \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} dS_t dS_t + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial s} dX_t dS_t \right) \quad (2.4)$$

Onde:

$$dX_t dX_t = \sigma^2 dt,$$

$$dS_t dS_t = \beta^2 dt$$

$$dX_t dS_t = \sigma \beta dt.$$

Como consequência, vale a seguinte igualdade:

$$d(X_t S_t) = S_t dX_t + X_t dS_t + dX_t dS_t$$

Nas próximas seções abordaremos o conceito de medida neutra ao risco e em seguida demonstraremos a fórmula de Black-Scholes a partir do método de precificação num modelo onde o mercado é livre de oportunidades de arbitragem.

2.1.2 Oportunidade de Arbitragem e Medida Neutra ao Risco

Definição 6 (Oportunidade de Arbitragem) *Uma oportunidade de arbitragem pode ser definida através de um portfólio cujo valor é dado pelo processo $X(t)$ satisfazendo $X(0) = 0$ e também, para algum instante de tempo $T > 0$: $P(X(T) \geq 0) = 1$ e $P(X(T) > 0) > 0$.*

A interpretação que deve ser atribuída a esta definição é a seguinte: uma oportunidade de arbitragem é uma possibilidade de realização de negócios tais que o capital inicial necessário é zero e existe a certeza de que não haverá perda de capital em $T > 0$. Além disso, existe uma probabilidade maior que zero de haver ganhos financeiros no tempo $T > 0$.

Apresentamos a seguir o Teorema de Girsanov, que possibilita a troca entre medidas equivalentes. Para os propósitos deste estudo, podemos interpretar este teorema como um mecanismo que possibilita transferirmos o modelo de uma medida histórica para uma medida neutra ao risco de tal sorte que estas medidas são equivalentes entre si. Duas medidas são consideradas equivalentes quando os eventos improváveis são os mesmos para ambas.

Vamos utilizar neste teorema uma variável aleatória positiva Z para trocar de medidas de probabilidade no espaço Ω , partindo de uma medida histórica P para uma medida de probabilidade neutra ao risco \tilde{P} .

Teorema 1 (Mudança de Medida) *Seja (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade e Z uma variável aleatória quase certamente não negativa com $EZ = 1$. Para A , defina:*

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z(\omega) dP(\omega) \quad (2.5)$$

Então, \tilde{P} é medida de probabilidade. Além disso, se X é uma variável aleatória não negativa, então:

$$\tilde{E}X = E[XZ] \quad (2.6)$$

Se Z é quase certamente estritamente positivo, então temos:

$$E[X] = \tilde{E} \left[\frac{X}{Z} \right] \quad (2.7)$$

Para toda variável aleatória não negativa X . (\tilde{E} é a esperança na medida \tilde{P}).

Podemos denominar Z como a derivada de Radon-Nikodým de \tilde{P} com respeito a P , ou seja:

$$Z = \frac{d\tilde{P}}{dP}, \quad (2.8)$$

Cujo processo é dado por:

$$Z(t) = E[Z|\mathcal{F}(t)], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.9)$$

Vamos adotar o conceito de mudança de medida para mover a média de uma variável aleatória distribuída normalmente. Em particular, se X é uma variável aleatória governada por uma distribuição normal padrão no espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) , θ uma constante e definimos:

$$Z = \exp \left\{ -\theta X - \frac{1}{2}\theta^2 \right\} \quad (2.10)$$

Então, sob a medida de probabilidade \tilde{P} , a variável aleatória $Y = X + \theta$ é normal padrão. Em particular, $\tilde{E}Y = 0$, logo $EY = EX + \theta = 0$. Através da troca de medida, modificamos a média de Y .

Teorema 2 (Girsanov) *Seja W_t , $0 \leq t \leq T$, um Movimento Browniano no espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) , e seja $\mathcal{F}(t)$, $0 \leq t \leq T$ uma filtração para este Movimento Browniano. Seja $\theta(t)$, $0 \leq t \leq T$, um processo adaptado. Definindo:*

$$Z(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \theta(u) dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \theta^2(u) du \right\} \quad (2.11)$$

$$\widetilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \theta(u) du \quad (2.12)$$

Assuma que $E \int_0^T \theta^2(u) Z^2(u) du < \infty$. Fixe $Z = Z(T)$. Então $EZ = 1$ e sob a medida \widetilde{P} , o processo $\widetilde{W}(t)$, $0 \leq t \leq T$, é um Movimento Browniano.

Demonstração: O processo \widetilde{W} inicia com valor zero em $t = 0$ e é contínuo. Além disso:

$$d\widetilde{W}(t)d\widetilde{W}(t) = (dW(t) + \theta(t)dt)^2 = dW(t)dW(t) = dt$$

Desta forma, $\widetilde{W}(t)$ é martingale na medida \widetilde{P} . Observamos que $Z(t)$ é martingale na media P . Com:

$$X(t) = - \int_0^t \theta(u) dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \theta^2(u) du$$

E $f(x) = e^x$ e $f'(x) = f''(x) = e^x$. Temos:

$$\begin{aligned} dZ(t) &= df(X(t)) \\ &= f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f''(X(t))dX(t)dX(t) \\ &= e^{X(t)}(-\theta(t)dW(t) - \frac{1}{2}\theta^2(t)dt) + \frac{1}{2}e^{X(t)}\theta^2(t)dt \\ &= -\theta(t)Z(t)dW(t) \end{aligned}$$

Integrando ambos os lados:

$$Z(t) = Z(0) - \int_0^t \theta(u)Z(u)dW(u)$$

Como a integral de Itô é um martingal, $Z(t)$ é um martingal. Em particular: $EZ = EZ(T) = Z(0) = 1$. Como $Z(t)$ é martingal e $Z = Z(T)$, vale:

$$Z(t) = E[Z(T)|\mathcal{F}(t)] = E[Z|\mathcal{F}(t)], 0 \leq t \leq T.$$

Resta mostrar que $Z(t)\widetilde{W}(t)$ é um martingale na medida P . Para tal, vamos aplicar a regra do produto de Itô e observar seu valor descontado:

$$\begin{aligned} d(\widetilde{W}(t)Z(t)) &= \widetilde{W}(t)dZ(t) + d\widetilde{W}(t)Z(t) + d\widetilde{W}(t)dZ(t) \\ &= -\widetilde{W}(t)\theta(t)Z(t)dW(t) + Z(t)dW(t) + Z(t)\theta(t)dt + (dW(t) + \theta(t)dt)(-\theta(t)Z(t)dW(t)) \\ &= (-\widetilde{W}(t)\theta(t) + 1)Z(t)dW(t) \end{aligned}$$

Como esta equação não apresenta o termo dt , o processo $Z(t)\widetilde{W}(t)$ é um martingal na medida P . Desta forma:

$$\widetilde{E}[\widetilde{W}(t)|\mathcal{F}(s)] = \frac{1}{Z(s)}E[\widetilde{W}(t)|\mathcal{F}(s)] = \frac{1}{Z(s)}\widetilde{W}(s)Z(s) = \widetilde{W}(s)$$

O que mostra que \widetilde{W} é martingal na medida \widetilde{P} .

2.1.3 O Ativo de Risco na Medida Neutra ao Risco

Seja $W(t)$, $0 \leq t \leq T$, um movimento Browniano no espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) e $\mathcal{F}(t)$, $0 \leq t \leq T$ uma filtração para este Browniano. T é o vencimento fixado. Considere a seguinte equação para o processo do ativo com risco:

$$S(t) = S(0)\exp\left(\int_0^t \sigma(s)dW(s) + \int_0^t \left(\alpha(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)ds\right)$$

Cuja diferencial é dada por:

$$dS(t) = \alpha(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.13)$$

Vamos assumir que para todo $t \in [0, T]$, $\sigma(t)$ é quase certamente diferente de zero. O preço deste ativo é um movimento Browniano geométrico. Além disso, suponha o seguinte processo adaptado à filtração do Browniano para a taxa de juros $R(t)$:

$$D(t) = e^{-\int_0^t R(s)ds} \quad (2.14)$$

$$dD(t) = -R(t)D(t)dt \quad (2.15)$$

Vamos considerar $D(t)$ como sendo o processo de desconto pela taxa livre de risco. Aplicando a regra do produto de Itô para encontrar a equação diferencial do preço do ativo descontado temos:

$$\begin{aligned} d(D(t)S(t)) &= (\alpha(t) - R(t))D(t)S(t)dt + \sigma(t)D(t)S(t)dW(t) \\ &= \sigma(t)D(t)S(t)[\theta(t)dt + dW(t)] \end{aligned} \quad (2.16)$$

E o prêmio de risco é:

$$\theta(t) = \frac{(\alpha(t) - R(t))}{\sigma(t)} \quad (2.17)$$

Anteriormente, apresentamos o movimento Browniano na medida neutra ao risco \tilde{P} , como na Equação (2.12). Substituindo $dW(t) = d\tilde{W}(t) - \theta(t)dt$ na Equação (2.16), teremos o preço do ativo de risco descontado, como a seguir:

$$d(D(t)S(t)) = \sigma(t)D(t)S(t)d\tilde{W}(t) \quad (2.18)$$

Chamamos \tilde{P} , a medida definida através do teorema de Girsanov, de medida neutra

ao risco porque é equivalente à medida P e garante que o preço descontado é um martingale, uma vez que o termo de *drift* neste caso é nulo.

Na medida neutra ao risco o preço não descontado $S(t)$ tem taxa média de retorno que equivale à taxa de juros em \tilde{P} . Isto pode ser verificado ao substituirmos $dW(t) = -\theta(t)dt + d\tilde{W}(t)$, a diferencial da Equação (2.12), em (2.13) para encontrar:

$$dS(t) = R(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)d\tilde{W}(t) \quad (2.19)$$

Considere agora um agente que possui um capital inicial $X(0)$ e que a cada $t \in [0, t]$ reavalia a quantidade $\Delta(t)$ de cotas do ativo com risco que participam do seu portfolio. A diferença entre a riqueza disponível no instante t e o valor aplicado no ativo de risco é aplicada à taxa $R(t)$, que é a taxa de juros na medida \tilde{P} . Desta forma, as variações no valor do capital detido pelo agente podem ser descritas através da equação:

$$dX(t) = \Delta(t)dS(t) + R(t)(X(t) - \Delta(t)S(t))dt \quad (2.20)$$

Denominamos $X(t)$ como portfolio auto-financiado.

E o valor do portfólio descontado, pela regra do produto de Itô e utilizando a Equação (2.19) será:

$$d(D(t)X(t)) = \Delta(t)d(D(t)S(t)) \quad (2.21)$$

Disto concluímos que variações no portfolio descontado dependem estritamente das variações no valor do ativo descontado. Desta forma, na medida neutra ao risco o rendimento médio deste portfólio será $R(t)$, logo, o valor do portfolio descontado considerado nesta demonstração é um martingale.

2.1.4 Precificação na Medida Neutra ao Risco

Definição 7 (Mercado Completo) *Um mercado é completo se, e somente se, todo ativo negociável neste mercado pode ser replicado por um portfolio auto-financiado composto apenas por ativos do mercado.*

Definição 8 (Payoff da Call) *Seja uma opção de compra européia sobre o ativo S . Este derivativo dá ao seu detentor o direito, mas não a obrigação, de comprar o ativo S pelo valor K no vencimento T . Chamamos K de strike da opção, sendo o mesmo fixado na emissão do contrato. No vencimento, se o valor do ativo S for maior que K , então o detentor tem estímulo a exercer seu direito de compra. Caso contrário, a opção expira sem exercício. Desta forma, o payoff de uma call européia pode ser definido por:*

$$V(T) = (S(T) - K)^+ \quad (2.22)$$

A fórmula de precificação de Black-Scholes, tema da próxima seção deste capítulo, foi deduzida a partir de uma modelagem que considera o mercado completo. Desta forma, vamos nos concentrar nesta etapa em estabelecer qual o valor do capital inicial $X(0)$ que um agente precisaria para neutralizar uma posição vendida (*short*) numa opção de compra européia. Isto equivale a estabelecermos a seguinte relação:

$$X(T) = V(T) \text{ P-qc.} \quad (2.23)$$

Vamos considerar a taxa média de retorno e a volatilidade do ativo objeto, bem como a taxa de juros, não constantes no tempo. A riqueza inicial $X(0)$ bem como a estratégia de investimento no ativo de risco $\Delta(t)$ deverão ser tais que a Equação (2.23) seja válida. Fixado isto, o fato do valor do portfolio descontado ser considerado martingal na medida neutra ao risco implica:

$$D(t)X(t) = \tilde{E} [D(T)X(T)|\mathcal{F}] = \tilde{E} [D(T)V(T)|\mathcal{F}(t)], \quad (2.24)$$

Ou seja, o valor de $X(t)$ é o capital necessário no tempo t para neutralizar a posição vendida na opção de compra, cujo payoff no vencimento é $V(T)$. Logo, podemos estabelecer que $X(t)$ corresponde ao preço $V(t)$ da call no tempo t . Assim:

$$V(t) = \tilde{E} \left[e^{-\int_t^T R(u)du} V(T) | \mathcal{F} \right], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.25)$$

Esta é a fórmula de precificação neutra ao risco em tempo contínuo. A seção a seguir é dedicada ao desenvolvimento da fórmula de Black-Scholes, sob o modelo de um mercado completo e assumindo a hipótese de volatilidade e taxa de juros constantes, a partir dos conceitos até aqui apresentados.

2.2 A Fórmula de Black-Scholes

Esta seção concentra-se na apresentação da derivação da Equação de Black-Scholes, baseada num modelo de mercado completo que, portanto, admite que o ativo com risco possa ter seu *payoff* replicado a partir de um portfólio auto-financiado, como abordado na seção anterior. Vamos nos concentrar em deduzir a fórmula de precificação para a opção de compra européia. O desenvolvimento para a opção de venda (*put*) é análogo. Vamos representar o preço da *call* através de uma função de $S(t)$ (valor do ativo objeto no instante t) e de t . Das Equações (2.22) e (2.25):

$$c(t, S(t)) = \tilde{E} \left[e^{-r(T-t)} (S(T) - K)^+ | \mathcal{F}(t) \right] \quad (2.26)$$

Na medida neutra ao risco, o preço do ativo objeto pode ser dado por:

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \sigma \tilde{W}(t) + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right\} \quad (2.27)$$

Para T , vencimento da opção:

$$S(T) = S(t) \exp \left\{ \sigma (\widetilde{W}(T) - \widetilde{W}(t)) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau \right\} \quad (2.28)$$

Estabelecendo $Y = -\frac{\widetilde{W}(T) - \widetilde{W}(t)}{\sqrt{T-t}}$ e $\tau = T - t$, podemos definir:

$$S(T) = S(t) \exp \left\{ -\sigma\sqrt{\tau}Y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau \right\} \quad (2.29)$$

Desta forma, podemos interpretar que $S(T)$ é um produto de $S(t)$ (\mathcal{F}_t -mensurável) e da variável aleatória $\exp \left\{ -\sigma\sqrt{\tau}Y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau \right\}$, que é independente de $\mathcal{F}(t)$. Desta forma, podemos escrever:

$$c(t, x) = \widetilde{E} \left[e^{-r\tau} \left(x \exp \left\{ -\sigma\sqrt{\tau}Y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau \right\} - K \right)^+ \right] \quad (2.30)$$

$$c(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r\tau} \left(x \exp \left\{ -\sigma\sqrt{\tau}Y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau \right\} - K \right)^+ e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \quad (2.31)$$

Desta forma, a opção continuará válida do ponto de vista do detentor se, e somente se, o integrando da equação anterior for positivo. Ou seja:

$$\left(x \exp \left\{ -\sigma\sqrt{\tau}Y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau \right\} - K \right)^+ \quad (2.32)$$

É positivo se, e somente se,

$$y < d_-(\tau, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[\log \frac{x}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau \right] \quad (2.33)$$

Desta forma:

$$c(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(x, \tau)} e^{-r\tau} \left(x \exp \left\{ -\sigma\sqrt{\tau}y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau \right\} - K \right) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(x,\tau)} x \exp\left(-\frac{y^2}{2} - \sigma\sqrt{\tau}y - \frac{\sigma^2\tau}{2}\right) dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(x,\tau)} e^{-r\tau} K e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\
&= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(x,\tau)} \exp\left(-\frac{1}{2}(y + \sigma\sqrt{\tau})^2\right) dy - e^{-r\tau} K N(d_-(x,\tau)) \\
&= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(x,\tau) + \sigma\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz - e^{-r\tau} K N(d_-(x,\tau)) \\
&= xN(d_+(x,\tau)) - e^{-r\tau} K N(d_-(x,\tau)), \tag{2.34}
\end{aligned}$$

onde:

$$d_+(x,\tau) = d_-(x,\tau) + \sigma\sqrt{\tau} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[\log \frac{x}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau \right]$$

$$N(x) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

O que nos traz a forma tradicional da fórmula de Black-Scholes para a opção de compra européia:

$$C_{BS}(x,\tau,\sigma,K,r) = xN(d_+(x,\tau)) - e^{-r\tau} K N(d_-(x,\tau)), \tag{2.35}$$

Com os seguintes limites válidos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} C_{BS}(x,t) = 0 \tag{2.36}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{C_{BS}(x,t)}{x - e^{-r\tau}K} = 1 \tag{2.37}$$

2.2.1 Paridade Put-Call

Sejam $C_{BS}(X(t), t)$ e $P_{BS}(X(t), t)$ os preços para as opções de compra e venda respectivamente, segundo a fórmula de Black-Scholes. Suponha que as opções possuam a mesma data de vencimento, preço de exercício e ativo objeto. Então, a relação a seguir é válida:

$$C_{BS}(X(t), t) + e^{-r\tau}K = P_{BS}(X(t), t) + X(t), \quad (2.38)$$

onde $\tau = T - t$.

Esta relação é conhecida como paridade put-call e refere-se ao caso em que o ativo objeto não paga dividendos. Vamos demonstrar sua validade a seguir em $t = T$.

$$C_{BS}(X(t), t) + e^{-r\tau}K = (X(T) - K)^+ + K = K1_{X(T) < K} + X(T)1_{X(T) \geq K} \quad (2.39)$$

De onde podemos concluir que, para $t = T$:

$$P_{BS}(X(t), t) + X(t) = (K - X(T))^+ + X(t) = K1_{X(T) < K} + X(T)1_{X(T) \geq K} \quad (2.40)$$

Na Equação (2.38) temos duas estratégias: do lado direito a estratégia corresponde a comprar uma opção de venda e uma unidade do ativo objeto. Do lado esquerdo, a estratégia é comprar uma opção de compra e investir $e^{-r\tau}K$ unidades monetárias no ativo sem risco. Com o desenvolvimento das Equações (2.39) e (2.40) podemos concluir que em $t = T$ o retorno oferecido por ambas estratégias é o mesmo. E esta mesma relação será válida para todo $t < T$, $t \in [0, T]$. Caso não o fosse, existiria oportunidade de arbitragem, o que não é admitido na modelagem de Black-Scholes, uma vez que o mercado é completo.

Através da paridade put-call é possível e simples estabelecermos o preço da opção de venda, segundo a Fórmula de Black-Scholes:

$$P_{BS}(x, \tau, \sigma, K, r) = e^{-r\tau} KN(-d_-(x, \tau)) - xN(-d_+(x, \tau)) \quad (2.41)$$

Com os seguintes limites válidos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_{BS}(x, t)}{e^{-r\tau}K - x} = 1 \quad (2.42)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P_{BS}(x, t) = 0 \quad (2.43)$$

2.2.2 A Volatilidade Implícita

Definição 9 (Volatilidade Implícita) *Seja $C_t(T, K)$ o preço de mercado de uma opção de compra no instante t , dado em função do seu prazo de vencimento e strike (preço de exercício). A volatilidade implícita é o número real $\sigma(\tau, K)$ que satisfaz a seguinte equação:*

$$C_t(T, K) = C_{BS}(S_t, \tau, K, r, \sigma(\tau, K)),$$

onde $\tau = T - t$ e C_{BS} é o preço da opção dado pela fórmula de Black-Scholes.

Teorema 3 (Existência e Unicidade) *Supondo os preços de mercado $C_t(T, K)$ livres de arbitragem para todo T e K positivos e $0 \leq t \leq T$, então as volatilidades implícitas $\sigma(\tau, K)$ existem e são únicas.*

Demonstração¹:

Inicialmente, vamos calcular a primeira derivada de C_{BS} com relação a σ :

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma} = S_t \sqrt{\tau} N'(d_+(x, \tau)) > 0$$

¹Esta demonstração pode ser consultada em [4]

A partir desta fórmula podemos estabelecer que o preço da opção de compra de Black-Scholes é uma função estritamente crescente da volatilidade. Tomando os limites a seguir:

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} C_{BS}(S_t, \tau, K, r, \sigma) = S_t$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} C_{BS}(S_t, \tau, K, r, \sigma) = (S_t - e^{-r\tau}K)^+, \text{ o que garante:}$$

$$(S_t - e^{-r\tau}K)^+ \leq C_{BS}(S_t, \tau, K, r, \sigma) \leq S_t.$$

Considerando a estratégia de vender uma call e comprar seu respectivo ativo objeto e o argumento de não arbitragem temos que, em $t = T$:

$$S_T - C_T(T, K) = S_T - (S_T - K)^+ = \min(S_T, K)$$

Assim, $0 \leq (S_T - C_T(T, K)) \leq K$ e portanto $0 \leq S_t - C_t(T, K) \leq Ke^{-r\tau}$, o que garante:

$$(S_t - e^{-r\tau}K)^+ \leq C_t(T, K) \leq S_t.$$

O fato de $C_{BS}(S_t, \tau, K, r, \sigma)$ ser estritamente crescente em relação a σ completa a demonstração.

Capítulo 3

Volatilidade Estocástica

3.1 O Conceito de Volatilidade Estocástica

Segundo Machado [1], assumir a volatilidade governada por um processo estocástico é uma hipótese consistente, pois ao introduzirmos esta nova fonte de incerteza no cenário que sustenta a modelagem, podemos descrever o comportamento do preço da opção num mercado mais complexo que aquele considerado pelo modelo de Black-Scholes. Sob a hipótese da volatilidade estocástica, a distribuição dos retornos deixa de ser estritamente log-normal e o efeito *smile* passa a ser considerado. Segundo [10], o efeito *smile* decorre da observação empírica de que a volatilidade implícita das opções com mesmo prazo de vencimento e diferentes preços de exercício varia, gerando uma curva em forma de U .

Uma das dificuldades encontradas em considerar a volatilidade descrita como um processo estocástico reside no fato de que, ao introduzirmos uma nova fonte de incerteza em nosso modelo, o mercado deixa de ser completo e isto dificulta a precificação da opção, uma vez que a volatilidade instantânea não é um ativo negociável e não pode ser replicada por um portfólio auto-financiado.

Neste trabalho, além de considerarmos a hipótese de que a volatilidade de um ativo

segue um processo estocástico, vamos avaliar a hipótese de reversão rápida à média.

Segundo a hipótese de reversão à média, alguns processos estocásticos apresentam o seguinte comportamento: dado um choque, após um determinado intervalo de tempo, os processos retornam a seus níveis históricos (ou seja, de longo prazo). Comparativamente aos movimentos observados no mercado, o mecanismo de reversão à média (aplicado ao estudo da volatilidade dos ativos) sugere que durante períodos de grande incerteza e estresse do mercado a volatilidade acompanha este estado e atinge níveis maiores, retornando a níveis mais estáveis ao final do período de crise e recuperação da estabilidade.

Neste capítulo vamos apresentar o modelo de Ornstein-Uhlenbeck (OU), amplamente utilizado em estudos de processos estocásticos sob o regime de reversão à média e, mais especificamente, considerado nas referências selecionadas nesta dissertação. Como um dos objetivos principais deste estudo é comparar os resultados obtidos pelo modelo proposto por [2] com os preços de mercado, a fim de avaliarmos a eficácia do ajuste proposto para o preço da opção, torna-se necessário e também coerente que o processo estocástico selecionado para a volatilidade seja o mesmo proposto pela nossa fonte de pesquisa comparativa.

Considere a seguinte equação diferencial para o processo do ativo X_t :

$$dX_t = \mu X_t dt + f(Y_t) X_t dW_t \quad (3.1)$$

De uma forma geral, um processo estocástico sob o regime de reversão à média pode ser representado conforme a seguir:

$$dY_t = \alpha(m - Y_t)dt + g(t, Y_t)d\hat{Z}_t \quad (3.2)$$

onde:

$f(Y_t)$ é o processo de volatilidade do ativo, tal que existem m_1 e $m_2 \in \mathfrak{R}$, com $0 <$

$m_1 \leq f(y) \leq m_2 < \infty$ para todo $y \in \mathbb{R}$,

α representa a taxa de reversão à média de Y_t ,

m é a média da distribuição de Y ,

$g(t, Y_t)$ é função que representa a volatilidade da volatilidade,

Z_t é um movimento Browniano correlacionado com W_t através de:

$$d\hat{Z}_t = \rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t \quad (3.3)$$

Com (Z_t) e (W_t) dois movimentos Brownianos independentes e $\langle dW_t, d\hat{Z}_t \rangle = \rho dt$,

$\rho \in [-1, 1]$, onde $\langle \rangle$ representa a covariância quadrática.

3.2 O processo de Ornstein-Uhlenbeck (OU)

O processo de Ornstein-Uhlenbeck (OU) é uma das abordagens mais utilizadas para modelar componentes financeiros como taxas de juros, taxas de câmbio, entre outros processos estocásticos. Sua dinâmica é similar àquela na Equação (3.2), com $g(t, Y_t)$ representada por uma constante:

$$dY_t = \alpha(m - Y_t)dt + \beta d\hat{Z}_t \quad (3.4)$$

onde β é constante e representa a volatilidade da volatilidade.

Dentre as propriedades, temos que o OU é um exemplo de processo Gaussiano de variância limitada e admite uma distribuição de probabilidades estacionária. O termo de *drift* da equação deste processo pode ser interpretado da seguinte forma: se o valor atual do processo (Y_t) é menor que a sua média de longo prazo m , o *drift* será positivo, em contrapartida, para valores correntes do processo maiores que a média de longo prazo, o *drift* será negativo. Assim, quando a volatilidade está alta, a reversão à média faz com que o seu *drift* tenha tendência negativa e quando está baixa, a reversão à

média faz com que o seu *drift* tenda a ser positivo. Assim, através deste mecanismo de compensação, ao longo do tempo, a volatilidade do ativo é atraída para algum nível médio.

Vamos calcular a solução da Equação (3.4), cujo desenvolvimento pode ser encontrado em [1]:

$$dY_t = \alpha(m - Y_t)dt + \beta d\hat{Z}_t,$$

$$dY_t + \alpha Y_t dt = \alpha m dt + \beta d\hat{Z}_t,$$

$$d(e^{\alpha t} Y_t) = \alpha m e^{\alpha t} + \beta e^{\alpha t} d\hat{Z}_t,$$

integrando em t :

$$\int_0^t d(e^{\alpha s} Y_s) ds = \int_0^t \alpha m e^{\alpha s} ds + \beta \int_0^t e^{\alpha s} d\hat{Z}_s,$$

e

$$Y_t e^{\alpha t} - Y_0 = m e^{\alpha t} - m + \beta \int_0^t e^{\alpha s} d\hat{Z}_s.$$

Assim:

$$Y_t = m + (Y_0 - m)e^{-\alpha t} + \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} d\hat{Z}_s, \quad (3.5)$$

e logo:

$$Y_t \approx N(m + (Y_0 - m)e^{-\alpha t}, v^2(1 - e^{-2\alpha t})) \text{ onde } v = \frac{\beta^2}{2\alpha}.$$

A distribuição invariante pode ser obtida tomando-se o limite $Y_{t(t \rightarrow \infty)}$: $N(m, v^2)$. A Equação (3.5) é a solução explícita de (3.4).

A seguir, apresentamos simulações construídas para o processo de Ornstein-Uhlenbeck, cujos parâmetros de entrada foram estimados especialmente para as séries de dados de alta frequência dos preços dos índices Ibovespa e SP500. Iniciaremos discutindo o algoritmo para estimação de α sugerido por [2], baseado no método do variograma e

estimaremos os valores de m e β . e construiremos simulações para o processo OU para os dois ativos considerados.

3.2.1 Estimando os parâmetros do processo de Ornstein-Uhlenbeck

A Taxa de Reversão à Média

O método descrito a seguir pode ser encontrado também em [1], [4] e [2].

Considere X_n a n -ésima média de 5 minutos de negociação do ativo (ou seja, a média dos preços de negociação do ativo numa janela de 5 minutos consecutivos). Esta média será correspondente ao instante de tempo $t_n = n\Delta t$, onde o valor de $\Delta t = 5$ minutos. A seguir, calculamos os retornos padronizados do ativo, representados por R_n , o n -ésimo retorno é dado por:

$$R_n = \frac{2(X_n - X_{n-1})}{\sqrt{\Delta t}(X_n + X_{n-1})} \quad (3.6)$$

Discretizando a Equação (3.1) temos:

$$R_n = f(Y_t) \frac{\Delta W_t}{\sqrt{\Delta t}} + \mu \sqrt{\Delta t}. \quad (3.7)$$

Considerando o termo $\mu \sqrt{\Delta t}$ suficientemente pequeno, podemos fazer:

$$R_n = f(Y_t) \epsilon_n, \quad (3.8)$$

onde (ϵ_n) é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição normal padrão.

A seguir, é analisado o logaritmo dos valores absolutos dos retornos:

$$L_n = \log |R_n| = \log |f(Y_t)| + \log |\epsilon_n|. \quad (3.9)$$

Podemos observar que a utilização do logaritmo dos retornos transforma o ruído mul-

tiplicativo em aditivo. Para extrair os ruídos aditivos da série de retornos, recomenda-se a aplicação do filtro da mediana.

Seja a estrutura empírica do variograma de L_n :

$$V_j^N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (L_{n+j} - L_n)^2, \quad (3.10)$$

onde j é o número de defasagens (*lags*) entre os retornos e N o número total de retornos da amostra que apresentam *lags* de tamanho j entre si.

O variograma expressa uma medida do grau de dependência entre os dados da amostra. Quando a distância entre os dados da amostra é zero, o valor em cada ponto é comparado com ele próprio, o que implica que as diferenças têm valor zero e o valor da variância também é nulo neste caso. Se a distância j entre os pontos da amostra é pequena, então os pontos são semelhantes e relacionados entre si, o que faz com que o valor da variância seja reduzido. À medida que a distância j entre os pontos aumenta, aumenta também a variância, até que, a partir de determinado ponto, o valor da variância torna-se estável, aproximadamente igual à variância da população considerada.

A justificativa do uso do variograma se dá na medida em que V_j^N é um estimador para $2c^2 + 2v^2(1 - \exp(-\alpha j \Delta t))$ onde $c^2 = \text{var} \{\log |\epsilon|\}$. Assumindo que os ruídos sejam não-correlacionados:

$$E[(L_{n+j} - L_n)^2] = E[(L_j - L_0)^2]$$

Pela estacionariedade,

$$\begin{aligned} &= E \{ (\log(f(Y_j)) - \log(f(Y_0)))^2 \} + E \{ (\log |\epsilon_j| - \log |\epsilon_0|)^2 \} \\ &= 2E \{ (\log(f(Y)))^2 \} - 2E \{ \log(f(Y_j)) \log(f(Y_0)) \} + 2\text{var} \{ \log(|\epsilon|) \} \\ &\approx 2v^2(1 - e^{-j\alpha\Delta t}) + 2c^2 \end{aligned}$$

Para estimar a taxa de reversão à média α , calcule o variograma da série de dados de alta frequência como na Equação (3.10), seguindo as etapas propostas nas Equações (3.6) a (3.10). A seguir, calcule a média temporal do variograma e estime os parâmetros v^2 e c^2 através da observação de seu gráfico, onde estes parâmetros representam a assíntota do gráfico à direita e seu intercepto à esquerda, respectivamente. Finalmente, estime a taxa de reversão à média através do método dos mínimos quadrados não linear, conforme na fórmula a seguir:

$$\operatorname{argmin}_{(\alpha)} = \left\| 2c^2 + 2v^2(1 - e^{(-\alpha j \Delta t)}) - V_j^N \right\|_2 \quad (3.11)$$

Demais Parâmetros

Com relação à variável v , podemos observar que o variograma nos oferece seu valor. Adotando o sugerido em [2], assumimos que o valor de β corresponde a $v\sqrt{2\alpha}$. Logo, de posse dos valores de α e v podemos calcular o valor de β , que é a constante que representa a volatilidade da volatilidade no modelo adotado.

Com relação à média de longo prazo m , seguindo o recomendado por [2], podemos estimá-la a partir da série de dados históricos, de tal forma que seu estimador será a média dos retornos padronizados ao quadrado:

$$\bar{\sigma}^2 = E[R_n^2] = e^{2m+2v^2},$$

ou seja: $m = \frac{1}{2} \log [\bar{\sigma}^2] - v^2$.

3.2.2 Simulações do Processo de Ornstein-Uhlenbeck para o Ibovespa e SP500

Encerraremos este capítulo apresentando os resultados encontrados para simulações realizadas com base no modelo de Ornstein-Uhlenbeck para as séries de dados do Ibovespa e SP500.

Foram selecionados dados de alta frequência, com preços divulgados a cada minuto, no período de 02/03/2010 a 13/09/2010. Não constam na amostra feriados, finais de semana e dados de negócios realizados no *after market*. Para cálculo dos retornos padronizados como na Equação (3.6) foram utilizadas janelas deslizantes, desta forma, considerando que no Brasil temos 7 horas de negociação por dia, o total de retornos padronizados calculados numa janela diária é de 421. No mercado americano o período de negociação diária possui duração de 6 horas e trinta minutos, desta forma, foram apurados 391 retornos padronizados por dia de negociação. Como a janela de dados é composta de 134 dias de negociação no caso do Ibovespa, para o índice brasileiro temos o total de 56.414 dados de retornos de alta frequência padronizados. Para a mesma janela de datas o SP500 tem 135 dias de negociação, conforme critérios estabelecidos, totalizando 52.785 dados de retornos padronizados de alta frequência. Para cálculo do filtro da mediana, a fim de extrairmos os ruídos aditivos da série de retornos, adotamos *lag* 10.

Para o índice Ibovespa encontramos $\alpha = 421.4046$, se dividirmos a janela de tempo utilizada para apuração deste parâmetro por seu respectivo valor encontraremos o tempo de reversão à média, neste caso, correspondente a $134/421.4046$, ou seja, 0.32 dia, o que pode ser considerado razoavelmente rápido. O valor de estimado de v foi de 0.34, $\beta = 22.17$ e $m = -9.28$.

Para o SP500 os resultados dos parâmetros estimados foram $\alpha = 94.2967$, que numa janela de 135 dias de dados corresponde a um tempo de reversão de 1.4 dias, o que também é razoavelmente rápido, embora não tanto quanto o estimado para o Ibovespa. O valor encontrado para v foi 0.31, $\beta = 10.25$ e $m = -9.27$.

Desenvolvemos a solução para o processo de Ornstein-Uhlenbeck, conforme a Equação (3.5), para os ativos selecionados. Quando mencionamos resultados para o processo OU estamos nos referindo aos valores estimados para o processo (Y_t) ¹. Os gráficos do vari-

¹Nestas simulações estamos considerando $\rho = 0$ na Equação (3.3). Segundo testes estatísticos real-

ograma e resultados do processo de OU estimados para o Ibovespa e SP500 podem ser observados a seguir:

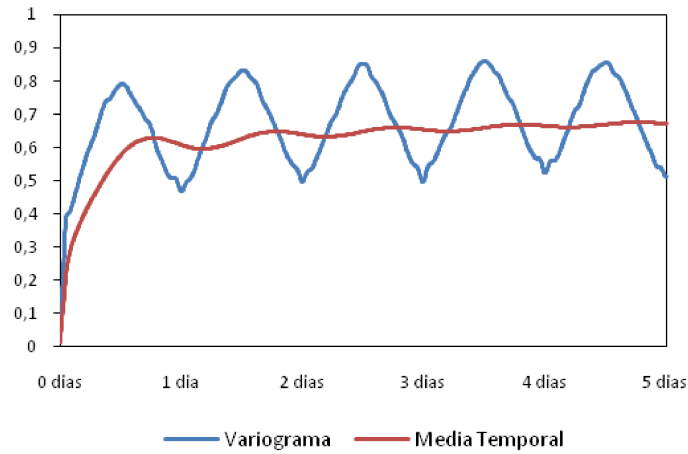


Figura 3.1: Variograma - IBOVESPA

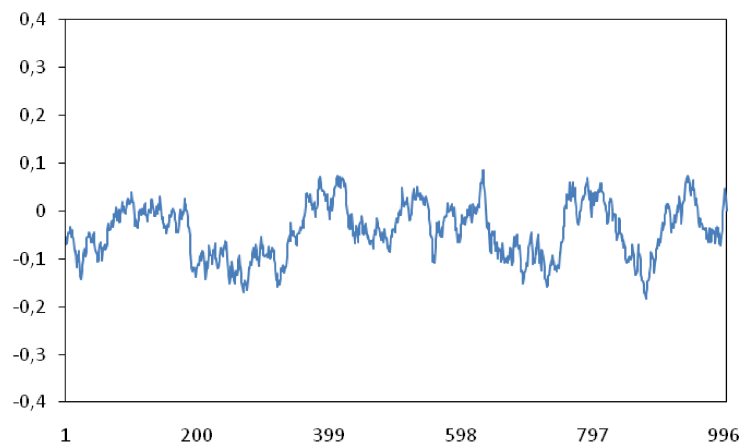


Figura 3.2: Simulação do Processo OU - IBOVESPA

izados em [2], a consideração desta premissa para a correlação entre os movimentos Brownianos do ativo e da sua respectiva volatilidade não afeta a estimação dos demais parâmetros de forma significativa.

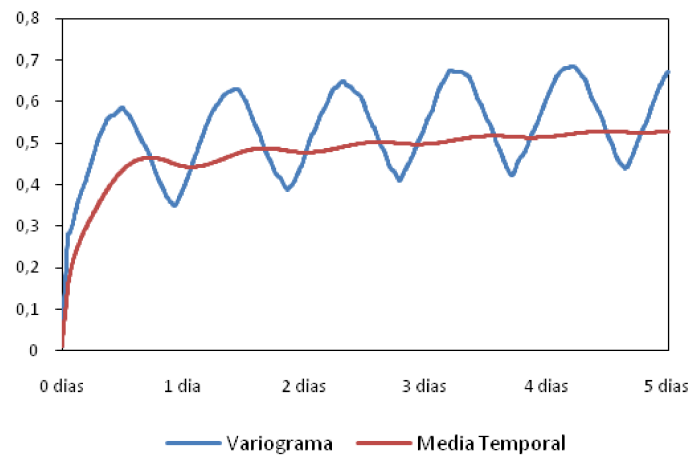


Figura 3.3: Variograma - SP500

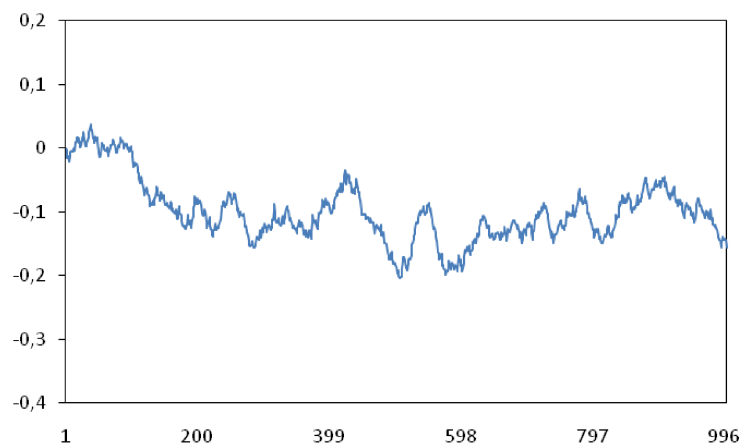


Figura 3.4: Simulação do Processo OU - SP500

Capítulo 4

Precificação em Mercados Incompletos e Expansão Assintótica

Como abordado no Capítulo 2, o modelo de Black-Scholes requer, como uma de suas principais premissas, que o mercado seja completo e que, portanto, todo ativo possa ser replicado através de um portfolio auto-financiado. Também observamos que a introdução do conceito de volatilidade estocástica na modelagem de precificação de ativos financeiros implica na inclusão de uma nova fonte de incerteza no modelo, que faz com que a hipótese de mercado completo não seja válida como antes.

A primeira seção deste capítulo concentra-se na solução proposta para contornar o problema de incompletude dos mercados diante da inserção da volatilidade estocástica. Vamos apresentar aqui um mecanismo que possibilita a precificação de opções num mercado incompleto, mas que mantém a hipótese de não arbitragem. Maiores detalhes podem ser consultados em [1].

4.1 Precificação de Derivativos em Mercados Incompletos

Sejam os processos $X(t)$ e $Y(t)$ conforme as Equações (3.1) e (3.2). Sejam $P^{(1)}(t, X_t, Y_t)$ e $P^{(2)}(t, X_t, Y_t)$ duas opções do tipo européia, sobre o mesmo ativo objeto, porém com datas de vencimento distintas tal que $T_2 > T_1 > t$. No Capítulo 2 demonstramos que o preço de uma opção, sob a hipótese do mercado completo, poderia ser gerado a partir de um portfólio auto-financiado. Para circunstâncias em que o mercado é incompleto, não é mais possível replicar opções a partir de portfólios compostos somente por um ativo com risco e outro sem risco. A solução proposta é completar o portfólio Π_t incluindo no mesmo, além do ativo com risco (neste caso, a opção européia $P^{(1)}$) e do ativo sem risco, uma nova opção $P^{(2)}$, com o objetivo de completarmos o mercado para apreamento da opção. Desta forma, o novo portfólio será:

$$\Pi_{T_1} = P^{(1)}(T_1, X_{T_1}, Y_{T_1}) \quad (4.1)$$

$$P^{(1)}(T_1, X_{T_1}, Y_{T_1}) = a_{T_1} X_{T_1} + b_{T_1} B_{T_1} + c_{T_1} P^{(2)}(T_1, X_{T_1}, Y_{T_1}) \quad (4.2)$$

onde:

a é a quantidade do ativo de risco X que compõem o portfólio,

b é a quantidade do ativo sem risco que compõem o portfólio,

c é a quantidade da opção $P^{(2)}$ que compõem o portfólio,

$B_t = e^{rt}$.

Assim, para que não haja oportunidade de arbitragem, a Equação (4.2) deve valer para todo $t < T_1$. Além disso, como o portfólio deve ser auto-financiado, a seguinte equação deve ser verdadeira:

$$d\Pi_t = a_t dX_t + b_t r e^{rt} dt + c_t dP^{(2)}(t, X_t, Y_t) \quad (4.3)$$

Para calcularmos $dP^{(i)}(t, X_t, Y_t)$ e encontrar a equação do preço, faremos uso da

fórmula de Itô bidimensional:

$$dP^{(i)}(t, X_t, Y_t) = \frac{\partial P^{(i)}}{\partial t} dt + \frac{\partial P^{(i)}}{\partial x} dX_t + \frac{\partial P^{(i)}}{\partial y} dY_t + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 P^{(i)}}{\partial x^2} dX_t dX_t + \frac{\partial^2 P^{(i)}}{\partial y^2} dY_t dY_t + 2 \frac{\partial^2 P^{(i)}}{\partial x \partial y} dX_t dY_t \right),$$

Substituindo as Equações (3.1) e (3.4) na equação acima, alcançamos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial P^{(i)}}{\partial t} dt + \frac{\partial P^{(i)}}{\partial x} dX_t + \frac{\partial P^{(i)}}{\partial y} dY_t + \left(\frac{1}{2} x^2 f(y)^2 \frac{\partial^2 P^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2 P^{(i)}}{\partial y^2} + x \beta \rho f(y) \frac{\partial^2 P^{(i)}}{\partial x \partial y} \right) dt \\ &= \frac{\partial P^{(i)}}{\partial t} dt + M_1 P^{(i)} dt + \frac{\partial P^{(i)}}{\partial x} dX_t + \frac{\partial P^{(i)}}{\partial y} dY_t, \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde

$$M_1 = \frac{1}{2} x^2 f(y)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x \beta \rho f(y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (4.5)$$

Substituindo a Equação (4.4) em (4.3) temos:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} + M_1 \right) P^{(1)} dt + \frac{\partial P^{(1)}}{\partial x} dX_t + \frac{\partial P^{(1)}}{\partial y} dY_t = \\ &= a_t dX_t + b_t r e^{rt} dt + c_t \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + M_1 \right) P^{(2)} dt + \frac{\partial P^{(2)}}{\partial x} dX_t + \frac{\partial P^{(2)}}{\partial y} dY_t \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Igualando os termos dX_t e dY_t na equação acima podemos definir os valores de a_t e c_t :

$$c_t = \left(\frac{\partial P^{(1)}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial P^{(2)}}{\partial y} \right)^{-1}, \quad (4.7)$$

$$a_t = \frac{\partial P^{(1)}}{\partial x} - \left(\frac{\partial P^{(1)}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial P^{(2)}}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial P^{(2)}}{\partial x}, \quad (4.8)$$

e temos que

$$b_t = \left(P^{(1)} - a_t X_t - c_t P^{(2)} \right) / e^{rt}. \quad (4.9)$$

Substituindo as Equações (4.7), (4.8) e (4.9) em (4.6) e comparando os termos dt temos, conforme desenvolvido em [1]:

$$\left(\frac{\partial P^{(1)}}{\partial y} \right)^{-1} M_2 P^{(1)} = \left(\frac{\partial P^{(2)}}{\partial y} \right)^{-1} M_2 P^{(2)}, \quad (4.10)$$

onde

$$M_2 = \frac{\partial}{\partial t} + M_1 + r \left(x \frac{\partial}{\partial x} - 1 \right) \quad (4.11)$$

M_2 corresponde ao operador diferencial de Black-Scholes com volatilidade estocástica $f(y)$, somado aos termos de segunda ordem do processo de difusão de Y .

Como o lado esquerdo da Equação (4.10) depende apenas do vencimento T_1 , enquanto o lado direito depende somente de T_2 , para que a igualdade seja válida, dado que os vencimentos fixados são distintos, devemos observar que ambos os lados devem ser iguais a uma função que não dependa da data de vencimento. Vamos manter aqui a notação oferecida em [1] e [2] e estabelecer que esta função seja representada por $\Gamma(t, y)$, que pode ser escrita como:

$$\Gamma(t, y) = \alpha(m - y) - \beta \left(\rho \frac{(\mu - r)}{f(y)} + \gamma(t, y) \sqrt{1 - \rho^2} \right), \quad (4.12)$$

onde $\gamma(t, y)$ é uma função arbitrária que representa o preço de mercado do risco.

Ao omitirmos a data de vencimento, podemos concluir que a função do preço deve satisfazer a seguinte equação diferencial, como em [5]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} x^2 f(y)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + r \left(x \frac{\partial P}{\partial x} - P \right) + \dots \\ & \dots + x \beta \rho f(y) \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \alpha(m - y) \frac{\partial P}{\partial y} - \beta \Lambda(t, x, y) \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Aqui, definimos

$$\Lambda(t, x, y) = \rho \frac{\mu - r}{f(y)} + \gamma(t, x, y) \sqrt{1 - \rho^2}$$

A Equação (4.13) pode ser representada de forma simplificada:

$$(\mathcal{L}_{BS} + \mathcal{L}_{OU} + \mathcal{L}_*)P = 0 \quad (4.14)$$

com os operadores definidos como:

$$\mathcal{L}_{OU} = \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \alpha(m - y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad (4.15)$$

$$\mathcal{L}_* = x\beta\rho f(y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \beta\Lambda \frac{\partial}{\partial y}, \quad (4.16)$$

$$\mathcal{L}_{BS}(f(y)) = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}x^2 f(y)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + r \left(x \frac{\partial}{\partial x} - 1 \right), \quad (4.17)$$

As Equações (4.15), (4.16) e (4.17) representam, respectivamente: o operador correspondente ao processo de Ornstein-Uhlenbeck, o operador do fator de correlação entre o preço do ativo e sua volatilidade e também do fator de risco de mercado da volatilidade, e o operador de Black-Scholes com a volatilidade dada pela função $f(y)$.

Na próxima seção apresentaremos a solução assintótica para o preço corrigido de Black-Scholes usando o método proposto por [2]. O desenvolvimento teórico deste método está demonstrado em detalhes nos trabalhos de [1] e [4]. Apresentaremos também, em complemento, a sugestão oferecida por [9], incluindo a escala longa na modelagem. As seções posteriores dedicam-se à calibragem dos parâmetros e apresentação dos resultados da precificação proposta por cada modelo. Além disso, foi construída uma análise comparativa entre os modelos assintótico e de Black-Scholes, utilizando como referência para comparação o erro relativo de cada um destes modelos quando confrontados com os preços de mercado das opções.

4.2 O Preço Corrigido de Black-Scholes

A¹ análise assintótica adotada para o fim desta pesquisa viabiliza um método de precificação através do qual, no limite, o mercado será capaz de avaliar o preço da opção dado por uma volatilidade considerada efetiva mais um termo de correção desenvolvido com base na análise assintótica.

No Capítulo 3 demonstramos que a volatilidade de um ativo financeiro pode ser modelada segundo um processo estocástico com regime de reversão à média, representado por (Y_t) na Equação (3.5). Desta forma, a volatilidade seria dada em função de Y , ou seja: $\sigma_t = f(Y_t)$. Particularmente, foi demonstrado que três parâmetros principais influenciam o comportamento da volatilidade desta forma estimada:

(1) A volatilidade efetiva: $\bar{\sigma}$, definida por $\bar{\sigma}^2 = \langle f^2 \rangle$ onde $\langle \cdot \rangle$ denota a função do valor esperado.

(2) A taxa de reversão à média α ou sua inversa, que corresponde ao tempo típico de decorrelação de (Y_t) , que, como verificado, é razoavelmente pequeno: $\epsilon = 1/\alpha$

(3) A variância da distribuição invariante de Y , denotada por v^2 , que controla a magnitude da oscilação da volatilidade.

No processo de OU, dado pela Equação (3.5), a variância v^2 pode ser dada em termos de ϵ por: $\beta = v\sqrt{2}/\sqrt{\epsilon}$. Desta forma, o modelo de OU para o par de processos (X, Y) descrito nas Equações (3.1) e (3.4), pode ser rerepresentado em termos de ϵ na medida neutra ao risco:

$$dX_t^\epsilon = rX_t^\epsilon dt + f(Y_t^\epsilon)X_t^\epsilon d\tilde{W}_t \quad (4.18)$$

$$dY_t^\epsilon = \left[\frac{1}{\epsilon}(m - Y_t^\epsilon) - \frac{v\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}}\Lambda(Y_t^\epsilon) \right] + \frac{v\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}}d\tilde{Z}_t \quad (4.19)$$

onde \tilde{W}_t e \tilde{Z}_t são movimentos Brownianos independentes na medida neutra ao risco, relacionados conforme $\tilde{Z}_t = \rho\tilde{W}_t + \sqrt{1 - \rho^2}Z_t$ com $|\rho| < 1$.

¹O desenvolvimento desta seção está baseado no Capítulo 5 de *Derivatives in financial markets with stochastic volatility*.

Seguindo [2], a função Λ é dada por:

$$\Lambda(y) = \rho \frac{(\mu - r)}{f(y)} + \gamma(y) \sqrt{1 - \rho^2} \quad (4.20)$$

onde assumimos que o preço do risco de mercado é dado apenas em função de y .

4.2.1 A Fórmula de Precificação sob a Expansão Assintótica

Seja $h(x)$ a função não negativa do payoff de uma opção de vencimento T . O preço desta opção no tempo $t < T$, como visto anteriormente, é função dos valores presentes do ativo objeto $X_t^\epsilon = x$ e do processo de volatilidade deste ativo $Y_t^\epsilon = y$. Vamos denotar este preço por $P^\epsilon(t, x, y)$:

$$P^\epsilon(t, x, y) = \tilde{E}^\gamma \left[e^{-r(T-t)} h(X_T^\epsilon) | X_t^\epsilon = x, Y_t^\epsilon = y \right], \quad (4.21)$$

cuja condição final é: $P^\epsilon(T, x, y) = h(x)$.

Substituindo na Equação (4.13) os valores de α e β em função de ϵ temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{2} x^2 f(y)^2 \frac{\partial^2 P^\epsilon}{\partial x^2} + r \left(x \frac{\partial P^\epsilon}{\partial x} - P^\epsilon \right) + x \rho \frac{v\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}} f(y) \frac{\partial^2 P^\epsilon}{\partial xy} + \\ + \frac{v^2}{\epsilon} \frac{\partial^2 P^\epsilon}{\partial y^2} + \left[\frac{1}{\epsilon} (m - y) - \frac{v\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}} \Lambda(y) \right] \frac{\partial P^\epsilon}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Podemos observar que o preço do derivativo depende da volatilidade, que não é diretamente observável, e do preço de mercado do risco da volatilidade, que não pode ser extraído a partir da série histórica de preços do ativo.

Prosseguindo, a expansão assintótica da solução P^ϵ será escrita em potências de $\sqrt{\epsilon}$:

$$P^\epsilon = P_0 + \sqrt{\epsilon} P_1 + \epsilon P_2 + \epsilon \sqrt{\epsilon} P_3 + \dots \quad (4.23)$$

Onde os P_i s são funções de (t, x, y) que deverão ser determinadas tal que $P_0(T, x, y) =$

$h(x)$. Nesta análise, estaremos interessados apenas nos dois primeiros termos da expansão $P_0 + \sqrt{\epsilon}P_1$. A condição final para o segundo termo será $P_1(T, x, y) = 0$. A análise de cada um dos termos da expansão pode ser encontrada desenvolvida em detalhes em [1] e [4]. Vamos nos concentrar em demonstrar o desenvolvimento dos termos da solução encontrada para o preço corrigido e também sua calibragem.

A partir do desenvolvimento da expansão assintótica, temos que o preço corrigido é dado por:

$$P \approx P_0(t, x) - (T - t) \left(V_2 x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} + V_3 x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3} \right) \quad (4.24)$$

onde P_0 corresponde ao preço dado pela fórmula de Black-Scholes utilizando a volatilidade efetiva e $(T - t) (V_2 x^2 (\partial^2 P_0 / \partial x^2) + V_3 x^3 (\partial^3 P_0 / \partial x^3))$ corresponde ao termo de correção.

Além disso, as derivadas de segunda e terceira ordem do preço P_0 em relação a x são dadas por:

$$\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} = \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{x \bar{\sigma} \sqrt{2\pi(T-t)}} \quad (4.25)$$

conhecida como Gamma. E Epsilon:

$$\frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3} = -\frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{x^2 \bar{\sigma} \sqrt{2\pi(T-t)}} \left(1 + \frac{d_1}{\bar{\sigma} \sqrt{(T-t)}} \right) \quad (4.26)$$

Substituindo as Equações (4.25) e (4.26) em (4.24) temos que o preço corrigido é dado por:

$$P \approx P_0(t, x) + \frac{x e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\bar{\sigma} \sqrt{2\pi}} \left(V_3 \frac{d_1}{\bar{\sigma}} + (V_3 - V_2) \sqrt{T-t} \right), \quad (4.27)$$

onde V_3 e V_2 são definidos como:

$$V_2 = \frac{1}{v \sqrt{2\alpha}} \left\langle [-2F + \rho(\mu - r)\tilde{F} + \sqrt{1 - \rho^2} \Gamma](f^2 - \langle f^2 \rangle) \right\rangle \quad (4.28)$$

e

$$V_3 = \frac{-\rho}{v\sqrt{2\alpha}} \langle F(f^2 - \langle f^2 \rangle) \rangle, \quad (4.29)$$

onde, assim como no Capítulo 3, definimos $f(y) = e^y$.

Vale notar que a paridade put-call discutida na Seção 2.2.1 é preservada ao adotarmos o preço corrigido.

Sejam \tilde{C}_t e \tilde{P}_t os preços corrigidos para a *call* e a *put*, respectivamente. Desta forma:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_t - \tilde{P}_t &= -(T-t) \left(V_3 x^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + V_2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (C_0 - P_0) \\ &= -(T-t) \left(V_3 x^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + V_2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (x - Ke^{-r(T-t)}) = 0, \end{aligned}$$

como resultado temos:

$$(C_0(t, x) + \tilde{C}_t(t, x)) - (P_0(t, x) + \tilde{P}_t(t, x)) = x - Ke^{-r(T-t)}$$

De onde concluímos que a paridade é preservada.

4.2.2 Calibragem do Modelo Assintótico - Uma Escala Rápida

Segundo [2], os parâmetros V_2 e V_3 da fórmula do preço corrigido podem ser estimados a partir da volatilidade implícita observada através dos preços de mercado das opções negociadas [Definição 9, Capítulo 2]. A volatilidade implícita pode ser representada por uma função da forma $I = I(t, S, K, T, \bar{\sigma}, r)$ que depende de todas as variáveis envolvidas na determinação do preço da opção.

Nesta seção vamos desenvolver a forma de cálculo para a superfície de volatilidade implícita para uma opção de compra européia em termos da expansão assintótica da forma $P_0 + \sqrt{\epsilon}P_1$. A volatilidade implícita deve ser aquela que torna a igualdade a

seguir válida:

$$C_{BS}(t, x, K, T, I) = P_0 + \sqrt{\epsilon}P_1 + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (4.30)$$

assim, temos que:

$$I = \bar{\sigma} + \sqrt{\epsilon}I_1 + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (4.31)$$

aplicando o teorema da função implícita temos:

$$C_{BS}(t, x, K, T, \bar{\sigma}) + \sqrt{\epsilon}I_1 \frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma}(t, x, K, T, \bar{\sigma}) = P_0(t, x) + \sqrt{\epsilon}P_1(t, x) + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (4.32)$$

assim:

$$I_1 = P_1(t, x) \left[\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma}(t, x, K, T, \bar{\sigma}) \right]^{-1}, \quad (4.33)$$

e a volatilidade implícita é dada por:

$$I = \bar{\sigma} + \sqrt{\epsilon}P_1(t, x) \left[\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma}(t, x, K, T, \bar{\sigma}) \right]^{-1} + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (4.34)$$

Sabemos que a derivada do preço da opção em relação a σ , denominada Vega, é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_0}{\partial \sigma} &= \frac{x e^{-\frac{d_1^2}{2}} \sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}} \\ &= (T-t) \sigma x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde:

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}} \quad (4.36)$$

Substituindo o termo de correção do preço nas Equações (4.24), (4.35) e (4.36) em (4.34), temos o seguinte resultado:

$$I = \bar{\sigma} + \sqrt{\epsilon} \left[\frac{V_3}{\bar{\sigma}^3} \left(r + \frac{3}{2} \bar{\sigma}^2 \right) - \frac{V_2}{\bar{\sigma}} - \frac{V_3}{\bar{\sigma}^3} \left(\frac{\log\left(\frac{K}{x}\right)}{T-t} \right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (4.37)$$

Vale notarmos que o erro da expansão assintótica é da ordem de $1/\sqrt{\alpha}$ e, dado que o regime de reversão rápida à média esteja comprovado para o ativo em questão, a ordem do erro será consideravelmente pequena, uma vez que α é equivalentemente alto neste caso.

Podemos então escrever a volatilidade implícita, conforme recomendado em [2], como função da *log-moneyness-maturity-ratio* (LMMR):

$$I = a \left[\frac{\log \left(\frac{K}{x} \right)}{T - t} \right] + b, \quad (4.38)$$

com

$$V_3 = -\bar{\sigma}^3 a$$

e

$$V_2 = \bar{\sigma} \left((\bar{\sigma} - b) - a \left(r + \frac{3}{2} \bar{\sigma}^2 \right) \right).$$

O sinal negativo para a significa que a correlação ρ tem o mesmo sinal, desta forma, podemos concluir que a correlação entre o valor do ativo e sua respectiva volatilidade é negativa.

O procedimento de calibragem para I neste trabalho foi baseado no método descrito em [2] e [4], através da estimativa de uma regressão linear simples. Este procedimento requer que a liquidez das opções seja alta o suficiente para que a quantidade de preços disponíveis no mercado gere um conjunto de pontos necessário ao método da regressão. Desta forma, exibiremos os resultados da calibragem apenas para as opções sobre o SP500, uma vez que opções sobre o Ibovespa são de baixa liquidez.

Métodos de calibragem para o caso de opções ilíquidas podem ser consultados em [1] e [4].

A respeito da Equação (4.38), para ajustar a regressão, devemos selecionar conjuntos de opções sobre um mesmo ativo objeto e numa mesma data de negociação, com

diferentes preços de exercício e prazos até o vencimento.

4.2.3 Calibragem Considerando o Efeito *Smile* - Modelo Assintótico Multi-Escala

Conforme apresentado neste capítulo, no modelo assintótico com apenas uma escala rápida para o processo que governa a volatilidade, este processo necessita de um prazo curto de tempo para retornar ao seu nível médio de longo prazo após a ocorrência de um choque. No limite, o fator do processo de volatilidade seria mantido num nível constante, denominado efetivo, determinado pela média das volatilidades ao quadrado, ou seja:

$$\bar{\sigma}^2 \approx \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma^2(s) ds \quad (4.39)$$

Segundo os mesmos autores do modelo apresentado no decorrer deste capítulo, em [9], a introdução de uma escala lenta para o processo de volatilidade proporcionaria uma melhor captura do comportamento da estrutura a termo da volatilidade implícita para prazos de vencimento mais longos. O modelo considerado desta forma (uma escala lenta e outra rápida) também baseia-se no método de expansão assintótica, cujo desenvolvimento em detalhes pode ser consultado em [4]. Uma das principais diferenças entre o modelo que considera apenas a escala rápida e o que considera duas escalas diz respeito à fonte de informações geradoras da volatilidade efetiva: σ^* . No modelo que considera apenas a escala rápida, a volatilidade efetiva é estimada a partir de estatísticas baseadas em dados históricos dos retornos dos ativos. Com a introdução da escala lenta no modelo assintótico, estatísticas a respeito dos dados históricos tornam-se desnecessárias. Neste caso, os preços das opções e as volatilidades implícitas apuradas através das observações de mercado estão diretamente ligados, como veremos adiante.

Vamos denominar este modelo que considera as escalas lenta e rápida simultanea-

mente como multi-escala. No caso do modelo multi-escala, o problema de precificação será resolvido como uma função de (t, T, K) . A idéia é que a calibragem dos parâmetros seja mantida estável e eficiente ao longo do tempo de vida das opções.

Segundo [9], considerando as escalas lenta e rápida na expansão assintótica de primeira ordem, temos a seguinte fórmula de precificação para as opções:

$$P \approx P_{BS}(\sigma^*) + (T - t) \{v_0 \mathcal{V} + v_1 S \Delta(\mathcal{V}) + v_3 S \Delta(S^2 \Gamma)\}, \quad (4.40)$$

onde

$$\mathcal{V} = \frac{\partial P_{BS}}{\partial \sigma}(\sigma^*), \text{ denominada Vega,}$$

$$S \Delta(\mathcal{V}) = S \frac{\partial^2 P_{BS}}{\partial S \partial \sigma}(\sigma^*),$$

$$S \Delta(S^2 \Gamma) = S \frac{\partial}{\partial S} \left(S^2 \frac{\partial^2 P_{BS}}{\partial S^2} \right) (\sigma^*).$$

Os termos que envolvem os parâmetros v_0 e v_1 são referentes aos termos de correção provenientes da escala lenta do fator de volatilidade. O termo que envolve v_3 refere-se à escala rápida do fator de volatilidade. Estes três parâmetros são calibrados a partir das volatilidades implícitas observadas nos dados de mercado. A volatilidade efetiva σ^* inclui uma correção gerada a partir dos preços de mercado do risco de volatilidade em escala rápida. σ^* também pode ser entendido como o valor corrigido para a volatilidade média $\bar{\sigma}$, na Equação (4.39).

Podemos observar que para as opções européias a seguinte relação é válida:

$$\mathcal{V} = (T - t) \sigma S^2 \Gamma, \quad (4.41)$$

desta forma, podemos representar o preço corrigido da opção, dado pela Equação (4.40), como:

$$P \approx P_{BS}(\sigma^*) + (T - t) v_0 \mathcal{V} + \{(T - t) v_1 + (v_3 / \sigma^*)\} S \Delta(\mathcal{V}) \quad (4.42)$$

Para calibragem dos parâmetros envolvidos na fórmula de precificação acima, através

da observação das volatilidades implícitas extraídas a partir dos preços de mercado, adotaremos o método da regressão simples, como sugerido em [9]. Lembramos que são quatro os parâmetros que precisaremos estimar: σ^* , v_0 , v_1 e v_3 . Para tal, adotaremos a seguinte aproximação para a volatilidade implícita:

$$I(t, S, T, K) \approx b_0 + b_1(T - t) + \{m_0 + m_1(T - t)\} LMMR, \quad (4.43)$$

onde o termo $LMMR$ refere-se a *log-moneyness-to-maturity ratio*, exatamente como na Equação (4.38):

$$LMMR = \frac{\log(K/S)}{(T - t)}$$

Na Equação (4.43), os coeficientes b_0 e m_0 referem-se ao fator de volatilidade de escala rápida, enquanto os coeficientes b_1 e m_1 dizem respeito ao fator de escala lenta, sendo importantes para casos em que o vencimento das opções é longo.

Para calibragem destes parâmetros primeiramente ajustaremos a regressão linear para b e m :

$$I(t, S, T, K) \approx b + m LMMR, \quad (4.44)$$

onde, a cada conjunto de opções com mesmo prazo até o vencimento, estimamos os valores de b e m . Em seguida, ajustamos:

$$b = b_0 + b_1(T - t) \quad (4.45)$$

e

$$m = m_0 + m_1(T - t), \quad (4.46)$$

e de posse dos valores de b_0 , m_0 , b_1 e m_1 , podemos estimar os parâmetros da fórmula de precificação:

$$\sigma^* = b_0 + m_0 \left(r - \frac{b_0^2}{2} \right), \quad (4.47)$$

$$v_0 = b_1 + m_1 \left(r - \frac{b_0^2}{2} \right), \quad (4.48)$$

$$v_1 = m_1 b_0^2, \quad (4.49)$$

$$v_3 = m_0 b_0^3, \quad (4.50)$$

onde r é a taxa de juros constante em pontos percentuais ao ano.

Observe que no regime para o qual a aproximação sugerida é válida é esperado que os parâmetros v_0 , v_1 e v_3 sejam pequenos e σ^* da mesma magnitude apresentada pela volatilidade efetiva.

Finalizando esta seção, vamos apresentar um breve desenvolvimento da equação de precificação (4.42), conforme Seção 3.3 de [9].

A aproximação dada pelo lado direito da Equação (4.42) pode ser escrita como:

$$P_{BS}(\sigma^*) + P_1(\sigma^*),$$

onde $P_1(\sigma^*)$, o termo de correção, é dado por:

$$P_1(\sigma^*) = (T - t)v_0\mathcal{V} + \{(T - t)v_1 + (v_3/\sigma^*)\} S\Delta(\mathcal{V}).$$

O termo $P_{BS}(\sigma^*)$ representa o preço dado pela fórmula de Black-Scholes sob a volatilidade constante σ^* , que é solução da equação diferencial parcial a seguir:

$$\mathcal{L}_{BS}(\sigma^*)P_{BS} = 0,$$

cuja condição terminal é $P_{BS}(T, S) = h(S)$.

Relembrando o operador de Black-Scholes, dado pela Equação (4.17):

$$\mathcal{L}_{BS}(\sigma^*) = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}S^2(\sigma^*)^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + r \left(S \frac{\partial}{\partial S} - \cdot \right) \quad (4.51)$$

O termo de correção $P_1(\sigma^*)$ resolve a seguinte equação diferencial parcial:

$$\mathcal{L}_{BS}(\sigma^*)P_1(\sigma^*) = - \left(2v_0 \frac{\partial P_{BS}}{\partial \sigma} + 2v_1 S \frac{\partial^2 P_{BS}}{\partial S \partial \sigma} + v_3 S \frac{\partial}{\partial S} \left(S^2 \frac{\partial^2 P_{BS}}{\partial S^2} \right) \right) (\sigma^*), \quad (4.52)$$

com condição terminal $P_1(\sigma^*)(T, S) = 0$. Note que as gregas são calculadas em relação à volatilidade efetiva (σ^*) .

Na próxima seção apresentaremos os resultados encontrados através das calibrações discutidas nesta seção e na 4.2.2. Em seguida, faremos um comparativo entre os modelos assintótico de escala rápida, assintótico multi-escala e Black-Scholes, através de testes de precificação para uma amostra de opções de compra sobre o SP500.

4.2.4 Resultados da Calibragem

Conforme descrito nas Seções 4.2.2 e 4.2.3, os modelos assintóticos de escala rápida e multi-escala apresentam métodos de calibragem baseados na regressão linear, embora com algumas diferenças em relação a estimação dos parâmetros. Apresentaremos a amostra inicialmente selecionada para estimação dos parâmetros e também o passo a passo adotado na calibragem para cada um dos modelos.

A amostra inicial era composta por 1374 preços de opções européias de compra sobre o SP500, negociadas durante os dias 01/02/2011 e 28/02/2011 (fevereiro de 2011). A distribuição de prazos para vencimento, strikes e relação K/S apresentada pela amostra pode ser consultada no quadro ao final deste capítulo.

Para calcular as volatilidades implícitas, conforme Definição 9 do Capítulo 2, adotamos a fórmula de Black-Scholes, de forma que a volatilidade implícita fosse que aquela que igualava os preços dados pela fórmula aos preços de mercado em cada opção testada.

Com relação ao ajuste da regressão linear para os modelos tratados nesta seção, foram observadas as estatísticas referentes à significância dos parâmetros (p-valor, estatística F) assim como a qualidade do ajuste oferecida pelo modelo (observação do

R-quadrado). Para o modelo assintótico de escala rápida, cuja calibragem é dada pela Equação (4.38), os grupos de opções foram separados por data de negociação. Para o modelo multi-escala os grupos de opções foram separados por data de vencimento e a regressão foi ajustada através das Equações (4.44), inicialmente, e (4.45) e (4.46) posteriormente. Após a avaliação da qualidade dos resultados das regressões e consequente eliminação da parcela que não apresentava bom ajuste, a amostra tinha tamanho 998.

Cabe aqui observarmos que, de fato, para o modelo assintótico multi-escala poderíamos sem perda de qualidade das estimativas utilizar uma amostra para calibragem dos parâmetros e outra, independente da primeira, para estimar os preços (dado que a amostra de calibragem é selecionada por data de vencimento das opções). Ocorre que para o modelo assintótico que considera somente a escala rápida isto não é possível, pois a amostra adotada para estimar os preços apresenta dependência em relação à amostra de preços de datas anteriores e consideravelmente próximas, uma vez que a calibragem é realizada por data de negociação e esta data deve estar razoavelmente próxima da data de precificação.

Com relação à estabilidade dos parâmetros estimados sugerida pelos autores em [2] e [9], a mesma pôde ser comprovada através dos testes realizados. A seguir, podemos observar o comportamento dos parâmetros a e b estimados através do ajuste da Equação (4.38) para o modelo assintótico que considera somente a escala rápida. Os respectivos desvios padrão encontrados para os parâmetros foram 0.014 e 0.013. Seus valores médios eram -0.06 para o parâmetro a e 0.15 para b . Note que, como esperado, o valor de a é menor que zero, indicando a relação negativa entre a volatilidade e o preço do ativo objeto. Ainda, o valor de b estava próximo do nível de volatilidade efetiva para o ativo objeto de estudo.

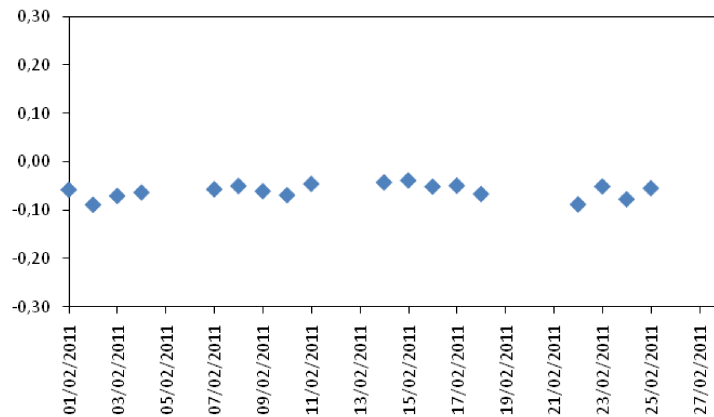


Figura 4.1: Parâmetro a - Escala Rápida

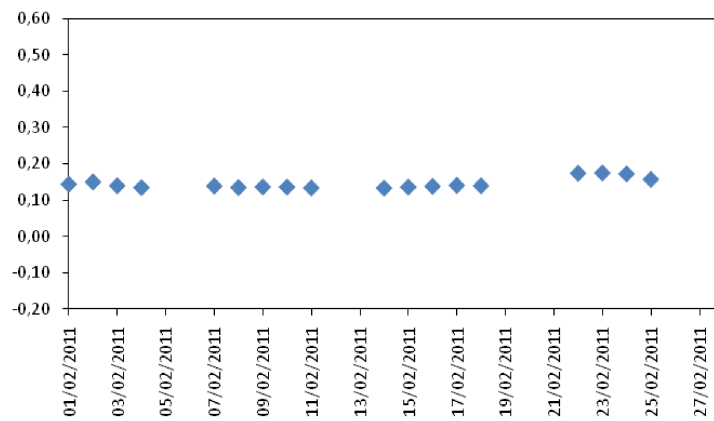
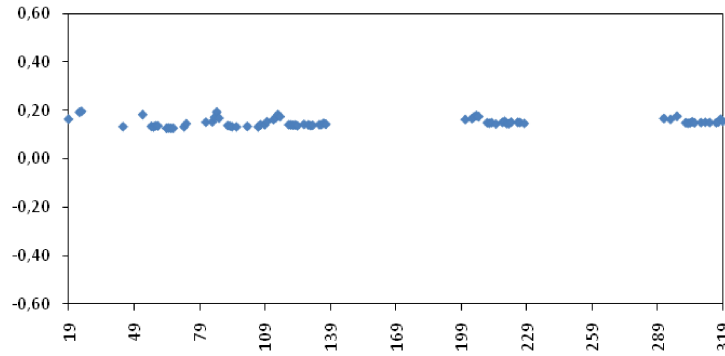
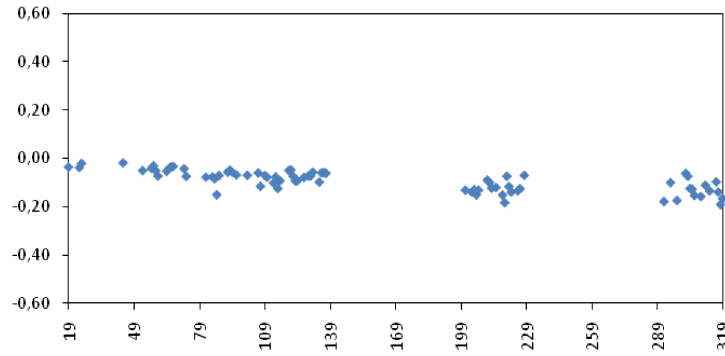


Figura 4.2: Parâmetro b - Escala Rápida

Para o modelo multi-escala, os parâmetros b e m estimados também apresentaram condições estáveis conforme o vencimento das opções aumentava, sendo seus respectivos desvios padrão 0.01 e 0.06, e valores médios 0.15 e -0.10 (no eixo das abscissas a escala está em dias corridos, representando prazo até o vencimento):

Figura 4.3: Parâmetro b - Modelo Multi-EscalaFigura 4.4: Parâmetro m - Modelo Multi-Escala

Podemos interpretar que os resultados encontrados para os parâmetros estimados estão consistentes em ambos modelos. Os parâmetros b (que representam o valor da volatilidade efetiva aproximadamente) dos modelos assintóticos com apenas uma escala rápida e multi-escala apresentavam valores próximos à volatilidade histórica média estimada para o SP500, da ordem de 15 por cento. Os parâmetros a e m correspondem à inclinação da reta que relaciona o eixo da volatilidade implícita com o eixo da $LMMR$ e apresentaram resultados sistematicamente negativos, indicando que esta relação é negativa. Deste último resultado podemos concluir que o modelo corrobora que a relação

entre o preço do ativo objeto e sua respectiva volatilidade é negativa.

Cabe observar que no caso do modelo assintótico de escala rápida a amostra de opções adotada na estimação dos parâmetros considerava apenas as opções que estavam relativamente próximas ao dinheiro, conforme recomendado em [2]. Para que esta seleção fosse possível, estabelecemos o critério de considerar nesta estimativa apenas opções que apresentassem valor para a relação K/S entre 0.95 e 1.05. No caso do modelo assintótico multi-escala, segundo [9], este critério não se faz necessário, podendo ser incluídas na amostra opções fora do dinheiro.

Especialmente para o caso do modelo assintótico que considera apenas a escala rápida, a parcela $P_0(t, x)$ do preço corrigido da opção (dado pela Equação (4.24)) representa o preço dado pela fórmula de Black-Scholes calculado utilizando a volatilidade histórica do ativo objeto. Em nosso estudo, o ativo é o SP500 e para calcular sua volatilidade histórica utilizamos o seguinte método: apurar a série histórica de log-retornos diários dos preços de fechamento do índice, calcular o desvio padrão destes retornos diários numa janela de tamanho pré-estabelecido, e finalmente anualizar a volatilidade diária, multiplicando o desvio padrão encontrado pela raiz quadrada de 252. Com relação ao tamanho da janelas de desvios considerado, realizamos os testes de precificação utilizando duas janelas diferentes: 21 e 63 dias, correspondentes a 1 e 3 meses de negócios, aproximadamente.

No caso do modelo assintótico multi-escala, conforme sugerido em [9] e abordado na seção anterior, não há a necessidade de utilizarmos dados históricos para estimar a volatilidade efetiva, uma vez que a mesma é extraída a partir dos dados de mercado (Equação (4.47)).

Ainda sobre o modelo assintótico multi-escala, a partir dos valores de m e b estimados para cada prazo de vencimento considerado na amostra (entre 19 e 690 dias corridos), foram estimados os valores para os demais parâmetros: v_0 , v_1 , v_3 e σ^* , conforme nas Equações (4.47) a (4.50). Seus respectivos valores estimados foram: 0.000028,

-0.000007 , -0.000123 e 0.1450 . Conforme sugerido em [9], os valores de v_0 , v_1 e v_3 eram de fato pequenos e σ^* da mesma magnitude apresentada pela volatilidade efetiva. O valor adotado para a taxa de juros ao ano constante foi de 0.0025 , baseado no valor da taxa de juros divulgada para os EUA pelo FED (Federal Reserve) e os valores estimados através das Equações (4.45) e (4.46) foram: $b_0 = 0.1446$, $b_1 = 0.000026$, $m_0 = -0.0407$ e $m_1 = -0.0003$.

4.3 Análise Comparativa dos Modelos

Após a calibragem dos parâmetros, conforme descrito na seção anterior, utilizando as características das opções contidas na amostra de 998 preços de mercado (que restou após o ajuste das regressões), aplicamos a cada uma das opções as metodologias de precificação discutidas ao longo deste trabalho: fórmula de Black-Scholes sob a volatilidade histórica constante (com janelas de 21 e 63 dias para estimar a volatilidade histórica), modelo assintótico com apenas uma escala rápida (onde a parcela do preço corrigido referente à fórmula de Black-Scholes considera a volatilidade histórica estimada com janelas de 21 e 63 dias) e o modelo assintótico multi-escala (uma escala rápida e outra lenta).

No caso dos modelos de Black-Scholes e assintótico com apenas a escala rápida de volatilidade, o método para estimar a volatilidade histórica utilizando para tal janelas de 21 e 63 dias considerava, em cada data de precificação (ou seja, a data para a qual o preço de mercado era válido) a janela de tempo como um intervalo dos últimos 21 ou 63 dias, a contar a partir do dia imediatamente anterior à data de precificação. Além disso, especificamente para o modelo assintótico com apenas a escala rápida de volatilidade, os valores dos parâmetros b e a , referenciados na Equação (4.38), foram estimados, para cada data de precificação, com base nos dados de mercado disponíveis no dia de negociação imediatamente anterior. Estas considerações se fazem necessárias

uma vez que, na prática, na abertura do mercado em cada data de negociação, os dados disponíveis mais recentes são os do dia de negociação imediatamente anterior.

Separamos a avaliação comparativa entre modelos sob três aspectos principais: comparativo entre a utilização de janelas de 21 e 63 dias para estimar a volatilidade histórica, análise da qualidade dos modelos de precificação em termos de ajuste aos preços de mercado, avaliação do perfil do erro relativo ao preço de mercado a respeito da relação entre os valores de K e S (dentro, no e fora do dinheiro) e do prazo para o vencimento das opções $(T - t)$.

Com relação ao indicador utilizado para comparar os modelos entre si, foi selecionado o erro relativo ao preço de mercado, dado por $|P_{mod} - P_{mer}| / P_{mer}$ onde P_{mod} é o preço dado pelo modelo e P_{mer} é o preço de mercado da opção. Desta forma, o critério adotado mede a distorção do preço calculado pelo modelo em relação ao preço de mercado por data e opção selecionada na amostra de teste. Utilizamos o valor absoluto no numerador porque, a priori, queremos identificar a distorção, não importando se o preço dado pelo modelo está acima ou abaixo do preço de mercado, mas o quanto se distancia do mesmo.

A respeito do comparativo da utilização de janelas de 21 e 63 dias para estimar a volatilidade histórica, podemos concluir com base nos resultados do quadro a seguir que utilizar uma janela de 63 dias de retornos diários para estimar a volatilidade histórica aumenta consideravelmente a qualidade dos modelos analisados em relação à adoção de uma janela de 21 dias. Neste caso, foram verificados apenas os modelos de Black-Scholes e assintótico de escala rápida, uma vez que o modelo assintótico multi-escala não utiliza a volatilidade histórica.

Modelo Assintótico de Escala Rápida (Tamanho da amostra = 998)	Tamanho da Janela	número de vezes em que o modelo apresentou melhor ajuste	% de vezes em que o modelo apresentou melhor ajuste
	21 dias	447	45%
	63 dias	551	55%

Fórmula de Black-Scholes (Tamanho da amostra = 998)	Tamanho da Janela	número de vezes em que o modelo apresentou melhor ajuste	% de vezes em que o modelo apresentou melhor ajuste
	21 dias	343	34%
	63 dias	655	66%

Figura 4.5: Janela de Tempo para Estimação da Volatilidade Histórica

Desta forma, a partir deste ponto da nossa análise, consideraremos apenas a janela de 63 dias para estimar a volatilidade histórica para os resultados dos modelos de Black-Scholes e assintótico de escala rápida.

Prosseguindo, numa primeira etapa foi realizada a comparação direta entre os modelos de Black-Scholes e assintótico de escala rápida, que pode ser consultada no quadro a seguir:

(Tamanho da Amostra = 998 – Janela 63 dias para volatilidade histórica)	Modelo Assintótico de Escala Rápida	Fórmula de Black-Scholes
número de vezes em que o modelo apresentou melhor ajuste	559	439
% de vezes em que o modelo apresentou melhor ajuste	56%	44%
Erro Médio do modelo quando apresentou melhor ajuste	0.09	0.20

Figura 4.6: Comparação entre Modelos de Volatilidade Histórica

Podemos concluir que, segundo a amostra analisada, de fato o modelo assintótico apresenta uma melhora significativa da qualidade de ajuste do modelo de precificação em relação aos preços de mercado, uma vez que o mesmo se demonstrou superior (considerando a quantidade de vezes em que apresentou menor erro relativo ao preço de mercado que aquele oferecido pela Fórmula de Black-Scholes) em 56 por cento dos casos observados. Além disso, é importante observar que o erro médio apresentado pelo modelo assintótico de escala rápida foi de 0.09, enquanto o erro médio apresentado pela Fórmula de Black-Scholes foi de 0.2, aproximadamente o dobro.

Segundo [9], o modelo assintótico que considera apenas a escala rápida pode apresentar algumas distorções conforme o prazo para vencimento das opções aumenta, e um avanço no sentido de amenizar esta limitação seria a introdução de uma escala lenta na expansão assintótica. Assim, a próxima etapa da nossa investigação consistiu, (uma vez que o modelo assintótico de escala rápida se mostrou melhor que o de Black-Scholes), em compararmos os modelos assintóticos de escala rápida e multi-escala, a fim de verificar se realmente este segundo apresenta benefícios para a qualidade do ajuste aos preços de mercado em relação ao primeiro.

(Tamanho da Amostra = 998 – Janela 63 dias para volatilidade histórica)	Modelo Assintótico de Escala Rápida	Modelo Assintótico Multi-Escala
número de vezes em que o modelo apresentou melhor ajuste	325	673
% de vezes em que o modelo apresentou melhor ajuste	33%	67%
Erro Médio do modelo quando apresentou melhor ajuste	0.08	0.12

Figura 4.7: Comparação entre Modelos Assintóticos

Conforme podemos observar no quadro anterior, sem dúvidas a associação entre as escalas rápida e lenta na expansão assintótica aumenta significativamente a qualidade de ajuste do modelo de precificação aos preços praticados no mercado. Note que o modelo multi-escala, além superar em número de casos testados o modelo que considera somente a escala rápida, mantém estável a magnitude do erro médio. Também foi realizada uma análise comparativa que englobava simultaneamente os três modelos considerados:

(Tamanho da Amostra = 998 – Janela 63 dias para volatilidade histórica)	Fórmula de Black-Scholes	Modelo Assintótico de Escala Rápida	Modelo Assintótico Multi-Escala
número de vezes em que o modelo apresentou melhor ajuste	217	261	520
% de vezes em que o modelo apresentou melhor ajuste	22%	26%	52%
Erro Médio do modelo quando apresentou melhor ajuste	0.09	0.05	0.09

Figura 4.8: Comparação Geral

Uma vez comprovada a eficácia do modelo assintótico multi-escala quando comparado às outras metodologias de precificação aqui consideradas, torna-se interessante avaliar o perfil do erro apresentado pelo mesmo. Podemos interpretar esta etapa da nossa análise como uma tentativa de identificar possíveis limitações oferecidas pelo modelo multi-escala, em termos de capacidade de ajuste dos resultados oferecidos pelo mesmo aos preços de mercado.

Inicialmente, calculamos a correlação entre a magnitude do erro apresentado pelo modelo multi-escala nos 998 casos testados e a relação (K/S) . O valor encontrado foi de 0.3, indicando que há uma relação positiva entre o status fora do dinheiro e aumento do erro relativo ao preço de mercado gerado pelo modelo. Avaliando somente os casos em que o modelo multi-escala não apresentou melhor ajuste que os demais modelos considerados, a correlação assim considerada aumenta para 0.35.

Com relação ao prazo para vencimento das opções, considerando os 998 casos testados, o modelo multi-escala apresentou correlação de -0.2 , indicando que conforme o prazo para vencimento das opções diminui, o erro relativo ao preço de mercado aumenta. Isto nos permite concluir que a tentativa de calibragem do modelo assintótico multi-escala para prazos mais longos foi bem sucedida.

Finalmente, consideramos a direção do erro relativo ao preço de mercado apresentado pelo modelo assintótico multi-escala. Desta vez, calculamos o erro como a seguir: $(P_{mod} - P_{mer})/P_{mer}$. Observamos que em 53 por cento dos 998 casos testados o erro relativo ao preço de mercado era maior que zero e em 47 por cento dos casos menor que zero. (Note que consideramos diferente de zero qualquer valor percentual não nulo até a nona casa decimal, não importando o quão próximo de zero o mesmo pudesse estar). Além disso, calculamos o valor médio do erro relativo ao preço de mercado nos casos em que o erro era positivo, apresentando valor médio de 0.14, e nos casos em que o erro era negativo -0.13 . Assim, concluímos que o modelo não apresenta tendência à sub ou super-precificação das opções.

Vale ainda destacarmos que o erro médio relativo aos preços de mercado apresentado pelo modelo multi-escala, seja este considerado em módulo ou não, é da ordem de 0.10 o que, de fato, sinaliza que a metodologia ainda requer ajustes. Mas conseguimos corroborar, através da nossa análise, que o modelo sugerido pelos autores em [9] de fato representa um avanço considerável para as metodologias de precificação de opções.

4.4 Correções de Ordem Superior

Ainda segundo [9], para um melhor ajuste do modelo assintótico aos preços de mercado, em termos de consideração mais apurada do efeito smile, expansões de ordem superior são recomendáveis. Vamos nos limitar nesta seção a replicar o exercício fornecido pelos autores na referência citada, que consiste basicamente em ajustar um polinômio de quarto grau aos valores de volatilidade implícita extraídos dos preços de mercado observados para as opções. Desta forma, a volatilidade passa a ser representada pela aproximação a seguir:

$$I \approx \sum_{j=0}^4 a_j(\tau)(LM)^j + \frac{1}{\tau}\Phi_t, \quad (4.53)$$

onde τ representa o prazo para vencimento da opção ($t - t$), LM denota a *moneyness* e Φ_t é um componente relacionado ao fator de escala rápida da volatilidade. A escolha de utilizar LM em lugar de $LMMR$ é arbitrária, segundo os autores.

Para calibragem dos parâmetros deste polinômio adotamos o seguinte:

- A amostra de preços de mercado, através dos quais foram extraídas as volatilidades implícitas, foram selecionadas da mesma amostra mencionada na seção anterior. Para o dia 16/02/2011 as opções com prazo de vencimento em dias corridos de 59, 122 e 304, e para o dia 28/02/2011 as opções com prazo de 19 dias.
- Optamos por utilizar, sem perda de qualidade do ajuste, $LM + 1$ em lugar de

LM , conforme recomendado em [9], para evitar valores muito próximos de zero

- Numa primeira etapa, foi ajustado um polinômio de grau 1, de forma a estimarmos os valores de a_0 e a_1 :

$$I \approx a_0 + a_1(LM + 1), \text{ note que o valor de } \Phi_t \text{ está incluído em } a_0 \quad (4.54)$$

- Num segundo estágio, de posse dos valores de a_0 e a_1 para cada data de negociação e vencimento selecionados, estimamos

$$\hat{I} \approx \frac{I - a_0 - a_1(LM + 1)}{(LM + 1)^2} \quad (4.55)$$

- E a partir de \hat{I} , utilizando a função polyfit do MATLAB, ajustamos o polinômio a seguir:

$$\hat{I} \approx a_2 + a_3(LM + 1) + a_4(LM + 1)^2 \quad (4.56)$$

Os gráficos para cada data de negociação e vencimento selecionados, bem como os dados a respeito do ajuste do polinômio podem ser consultados a seguir (o eixo das ordenadas apresenta os valores da volatilidade implícita e o eixo das abscissas os valores de $LM + 1$). Para cada um dos gráficos exibimos o seu correspondente em termos de proximidade do vencimento, conforme apresentado em [9], referência central desta seção.

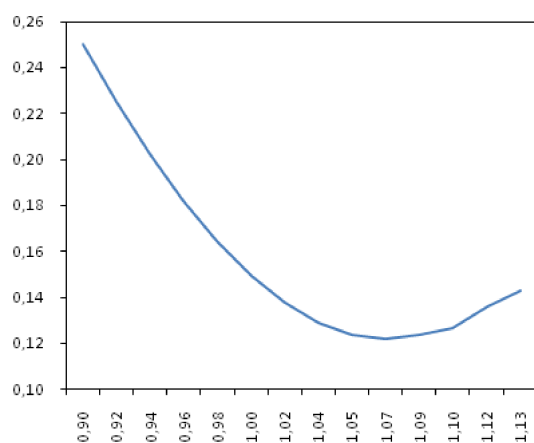


Figura 4.9: 28/02/2011 - Prazo Vencimento 19 Dias

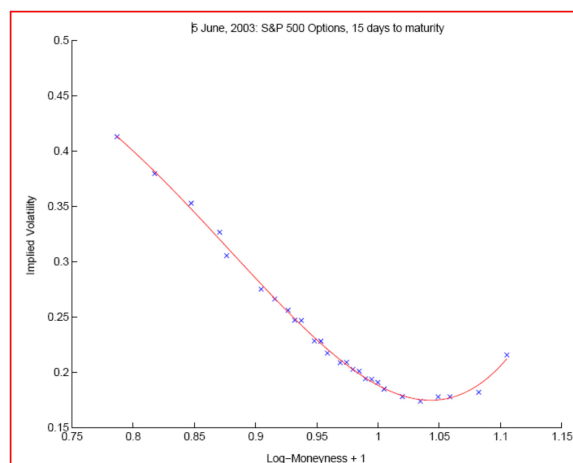


Figura 4.10: FPSS - Prazo Vencimento 15 Dias

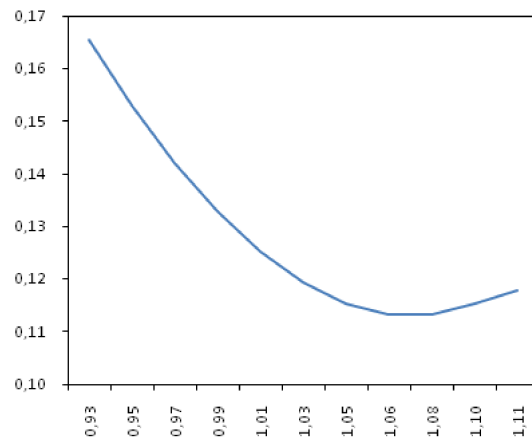


Figura 4.11: 16/02/2011 - Prazo Vencimento 59 Dias

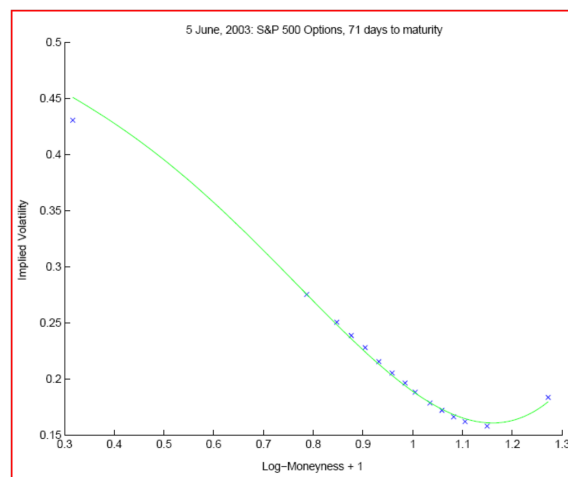


Figura 4.12: FPSS - Prazo Vencimento 71 Dias

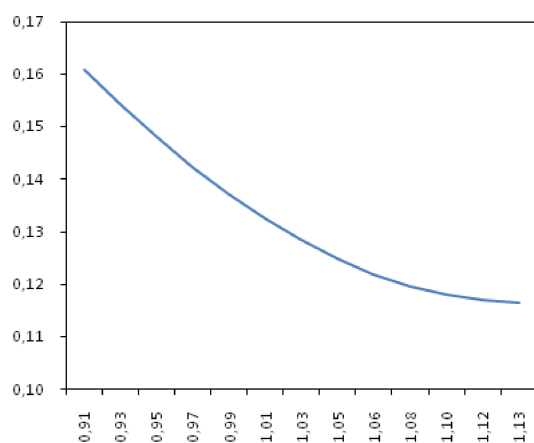


Figura 4.13: 16/02/2011 - Prazo Vencimento 122 Dias

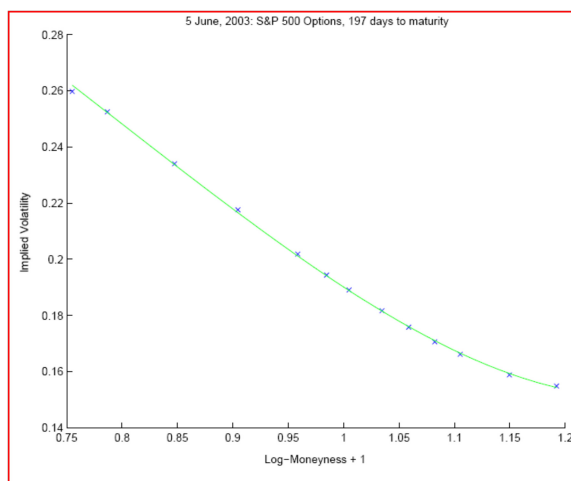


Figura 4.14: FPSS - Prazo Vencimento 197 Dias

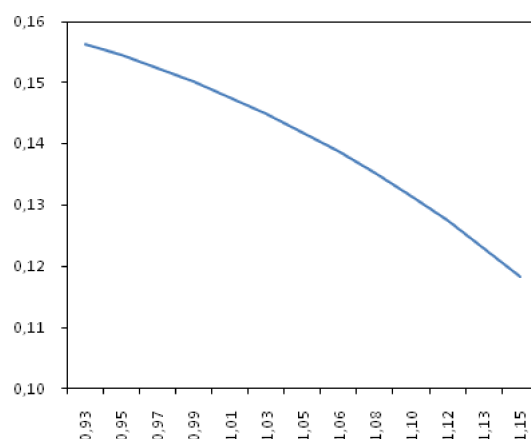


Figura 4.15: 16/02/2011 - Prazo Vencimento 304 Dias

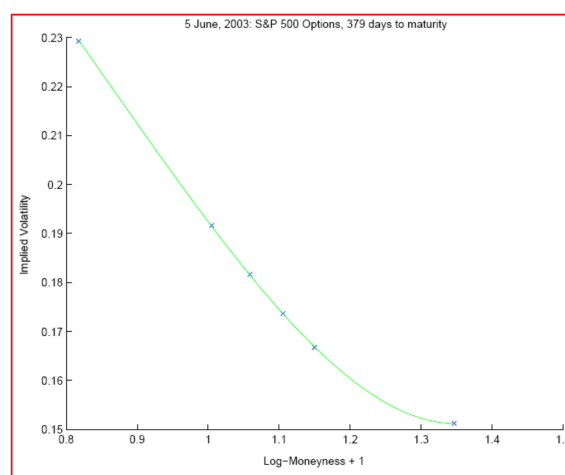


Figura 4.16: FPSS - Prazo Vencimento 379 Dias

Como podemos observar, de fato o ajuste de um polinômio de grau quatro, representando a estrutura sugerida para a volatilidade implícita, é capaz de capturar o efeito smile, sobretudo para opções próximas ao vencimento. Com relação ao prazo de 304 dias, o efeito smile não pôde ser evidenciado corretamente porque não havia dados de mercado disponíveis que apresentassem relação LM suficientemente alta na amostra. A estrutura sugerida é gerada a partir da expansão assintótica de segunda ordem.

Antes de prosseguirmos para o último capítulo deste trabalho, vale destacarmos os principais resultados encontrados ao longo das análises aqui apresentadas:

- Calibramos o modelo assintótico multi-escala consistentemente.
- A melhor performance, em geral, do modelo multi-escala sugere a necessidade de se tratar a volatilidade como um processo estocástico.
- Estudamos e calibramos estruturas a termo de volatilidade implícita não-lineares de maneira consistente com FPSS.
- Verificamos que a magnitude do erro se mantém bem comportada sob diversas situações.
- Verificamos que não há viés no erro do modelo multi-escala.
- Identificamos uma correlação positiva significativa entre o erro do modelo multi-escala e o status fora do dinheiro da opção.
- Identificamos uma correlação negativa entre o erro do modelo multi-escala e o tempo ao vencimento.

Parâmetros Estimados - Polinômio Quarto Grau						
Data	Prazo	a0	a1	a2	a3	a4
28/02/2011	19	0,8470	(0,6848)	3,8680	(7,7841)	3,9023
16/02/2011	59	0,4457	(0,3105)	2,5350	(4,9911)	2,4501
16/02/2011	122	0,3570	(0,2193)	0,7237	(1,4271)	0,7008
16/02/2011	304	0,2937	(0,1475)	(0,4108)	0,8176	(0,4039)

Figura 4.17: Parâmetros do polinômio de quarto grau

Amostra de Opções de Compra do Tipo Européia sobre o S&P500 - Dados de Fevereiro de 2011 - Fonte: Bloomberg					
Strikes (K)			Prazo para Vencimento		
Strike	Freq.	% Part.	Prazo (dias)	Freq.	% Part.
1000	21	1,53%	Até 70	490	35,66%
1100	25	1,82%	Entre 71 e 100	116	8,44%
1125	15	1,09%	Entre 101 e 200	260	18,92%
1150	20	1,46%	Entre 201 e 300	214	15,57%
1175	19	1,38%	Entre 301 e 400	150	10,92%
1200	36	2,62%	Entre 401 e 500	36	2,62%
1225	33	2,40%	Entre 501 e 1000	81	5,90%
1250	71	5,17%	Acima de 1000	27	1,97%
1275	67	4,88%			
1300	148	10,77%			
1325	134	9,75%			
1350	143	10,41%			
1375	102	7,42%			
1400	140	10,19%			
1425	94	6,84%			
1450	104	7,57%			
1475	54	3,93%			
1500	81	5,90%			
1525	22	1,60%			
1550	45	3,28%			

Figura 4.18: Amostra de Opções do SP500 - Call Européia

Amostra de Opções de Compra do Tipo Européia sobre o S&P500 - Dados de Fevereiro de 2011 - Fonte: Bloomberg					
Datas de Negociação			Relação K/S (strike/ativo objeto)		
Data de Negociação	Freq.	% Part.	Relação K/S	Freq.	% Part.
01/02/2011	77	5,60%	$K/S < 0,95$	215	15,65%
02/02/2011	53	3,86%	$0,95 \leq K/S \leq 1,05$	620	45,12%
03/02/2011	53	3,86%	$K/S > 1,05$	539	39,23%
04/02/2011	52	3,78%			
07/02/2011	75	5,46%			
08/02/2011	69	5,02%			
09/02/2011	72	5,24%			
10/02/2011	51	3,71%			
11/02/2011	73	5,31%			
14/02/2011	63	4,59%			
15/02/2011	61	4,44%			
16/02/2011	89	6,48%			
17/02/2011	97	7,06%			
18/02/2011	82	5,97%			
22/02/2011	96	6,99%			
23/02/2011	87	6,33%			
24/02/2011	75	5,46%			
25/02/2011	70	5,09%			
28/02/2011	79	5,75%			

Capítulo 5

Considerações Finais

A avaliação aqui apresentada nos ajuda a concluir que, de fato, existe a necessidade de aplicação de modelos de precificação de opções que considerem a volatilidade sob o arcabouço de um processo estocástico. Pudemos identificar que, na maioria dos casos estudados, o modelo assintótico se mostrou melhor ajustado aos preços de mercado que o modelo de Black-Scholes com volatilidade constante.

A escolha do índice SP500 neste trabalho é justificada principalmente por duas razões: a intenção de testarmos o mesmo ativo adotado nas principais bibliografias de referência selecionadas para este estudo e a representatividade deste índice no mercado de ações americano. Além disso, para que os métodos de calibragem adotados neste estudo fossem aplicados de maneira correta, a necessidade de liquidez do ativo escolhido, bem como a identificação do regime de reversão à média se faziam premissas necessárias.

De qualquer forma, nada impede que a mesma metodologia seja aplicada a ativos diversos para os quais características similares as do ativo selecionado nesta pesquisa possam ser comprovadas.

Com relação às principais limitações do modelo, identificamos que o status fora do dinheiro e o tamanho do erro relativo ao preço de mercado gerado pelo modelo relacionam-se de forma positiva. Além disso, para opções muito próximas do vencimento

o modelo tende a apresentar distorções maiores que para prazos mais longos. O erro médio relativo aos preços de mercado apresentado pelo modelo multi-escala é da ordem de 0.10 para a amostra testada, o que, de fato, sinaliza que a metodologia ainda requer ajustes.

Não podemos deixar de mencionar que o modelo multi-escala apresentou melhores resultados que o modelo assintótico que considera apenas uma escala rápida, o que corrobora a sugestão dos autores em [9] e aumenta consideravelmente a qualidade do modelo.

Os resultados obtidos através da nossa análise atestam que o modelo multi-escala proposto em [9] representa um avanço considerável no desenvolvimento de metodologias de precificação de opções.

Como trabalhos futuros indicamos a sugestão dos autores aqui referenciados, de que o aumento da ordem da expansão para o modelo assintótico tende a aumentar sua eficácia, alcançando ajustes mais apurados para o efeito smile, como foi possível comprovar através do exercício de ajuste do polinômio de grau quatro para a estrutura a termo da volatilidade ao final do Capítulo 4.

Referências Bibliográficas

- [1] C.A.M. Alves, *Modelos de Volatilidade Estocástica para o Índice IBOVESPA: Reversão Rápida à Média e Análise Assintótica*, IMPA, 2008.
- [2] G. Papanicolaou, J.-P. Fouque, K. Solna e K.R. Sircar, *Short time-scale in SP500 volatility*, April 2002.
- [3] M.O. Souza e J.P. Zubelli, *Strategic Investment Decisions under Fast Mean-Reversion Sthocastic Volatility*, IMPA, 2009.
- [4] G.E.G. Machuca, *Volatilidade Estocástica Multi-Escala: Modelagem, Estimação e Aplicação com Preços da Petrobrás*, IMPA, 2010.
- [5] M.O. Souza e J.P. Zubelli, *On the Asymptotics of Fast-Mean-Reversion Stochastic Volatility Models*, International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2007.
- [6] C.S. Lanari, A.A. de Souza e J.L.C. Duque, *Desvios em Relação ao Modelo de Black-Scholes: Estudos Relacionados à Volatilidade dos Ativos Subjacentes às Opções*, Universidade Federal de Minas Gerais, 1999.
- [7] G. Papanicolaou, J.-P. Fouque e K.R. Sircar, *Derivatives in financial markets with stochastic volatility*, Cambridge University, 2000.
- [8] S.E. Shreve, *Sthocastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer, 2004.

Referências Bibliográficas

- [9] G. Papanicolaou, J.-P. Fouque e K.R. Sircar, *Timing the Smile*, Cambridge University, 2000.
- [10] C.S. Lanari, A.A. de Souza, *O Efeito Sorriso da Volatilidade Implícita do Modelo de Black e Scholes*, NUFU/CEPEAD/UFGM, 2000.
- [11] J.C. Hull, *Options, Futures and Other Derivatives Securities*, Second Edition - University of Toronto, 1993.
- [12] G. Papanicolaou, J.-P. Fouque e K.R. Sircar, *Multiscale Stochastic Volatility Asymptotics*, February 2003.
- [13] R. C. Merton, *Theory of Rational Option Pricing*, 1973.
- [14] F. Black, M. Scholes, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, 1973.

Apêndice A

Códigos MATLAB

```
=====
Variograma SP500 Capítulo 03
=====
>> variograma = SP500;
>> J = [1:1:3200]';
>> dt = 1/(391*135);
>> v = 0.31;
>> c = 0.0113964082408412;
>> x=0;
>> y=2000;
>> f = @(a) norm(2*c + 2*v*(1-exp(-J*a*dt))-variograma);
>> a = fminbnd(f,x,y);
>> a

a =

    94.2967
```

```
=====
Variograma IBOVESPA - Capítulo 03
=====
>> variograma = IBOVESPA;
>> J = [1:1:3200]';
>> dt = 1/(421*134);
>> v = 0.34;
>> c = 0.0125917456953497;
>> x=0;
>> y=2000;
>> f = @(a) norm(2*c + 2*v*(1-exp(-J*a*dt))-variograma);
>> a = fminbnd(f,x,y);
>> a

a =

    421.4046
```

Apêndice A. Códigos MATLAB

Discretização do Processo de Ornstein-Uhlenbeck - Capítulo 03

```
function [y]= Simulacao_OU_2(y0,alfa, beta, mediaLP,janela_dia)

%y0 é um chute inicial para o valor do processo
%n = numero de simulações desejado, que será correspondente ao tamanho da
%série simulada
%alfa = taxa de reversão a media estimada inicialmente PFS
%beta = volatilidade da volatilidade estimada inicialmente
%mediaLP = média de longo prazo da volatilidade estimada inicialmente
%o objetivo desta primeira simulação é gerar uma serie amostral que
%descreve o processo de OU e sua respectiva exponencial
%simula = 1000;
%soma = zeros(5000, 1);

n=5000;
media = zeros(n, 1)+ mediaLP;
y = zeros(n, 1);
dt = 1/janela_dia;
y(1) = y0;

for i = 1:n-1
    y(i+1) = y(i)* exp(-alfa*dt)+ mediaLP*(1-exp(-alfa*dt))+ beta* (sqrt((1-exp(-2*alfa*dt))/(2*alfa))))*randn;
end

plot(y);
hold on
plot(exp(y),'r');
hold on
plot(media,'g');

end
```

Polinômio de Quarto Grau - Capítulo 04

Foi utilizada a função `polyfit(x,y,n)`. Como parâmetros de entrada adotamos o vetor LM+1 e o vetor contendo suas respectivas volatilidades implícitas.