Universidade Federal de Uberlândia

Curso de Graduação em Matemática

Estruturas Algébricas 1

Teoria de Grupos Aplicada na Resolução Robotizada do Cubo Mágico

por

Bruno da Costa Resende

Higor Luiz do Nascimento Dantas Fernandes

Hutson Roger Silva

Orientador: Profº. Dr. Alonso Sepúlveda Castellanos

Uberlândia-MG

SUMÁRIO

1 Resumo **3**

2 Introdução **4**

3 O Cubo Mágico **6**
3.1 Elementos do Cubo Mágico 6
3.2 Movimentos das Faces 8
3.3 Sequência de Movimentos 9

4 Teoria de Grupos **11**
4.1 Grupos e subgrupos 11
4.2 Permutações 12
4.3 Simetrias 12

5 Metodologia **14**

6 Análises e Discussões **17**

7 Considerações Finais **25**
Bibliografia 26

CAPÍTULO 1

RESUMO

O ensino-aprendizagem da disciplina de álgebra tem sido visto com muita dificuldade por diversos alunos, muito de seus conteúdos são de difíceis compreensões, pela maioria das vezes por falta de exemplos concretos que mostrem suas aplicações. Um exemplo prático de um conteúdo algébrico, que pode ser mais bem entendido com uma ferramenta auxiliar, é a Teoria de grupos. Uma forma de enxergar as aplicações que este conceito define é utilizando o cubo mágico. O quebra-cabeça consiste em 26 peças ou cubinhos distintos, dispostos em uma estrutura 3x3x3 e unidos por um mecanismo central, no qual permite a rotação de cada face do cubo, para ambos os sentidos, tendo como solução o alinhamento de todas as cores das faces. O cubo mágico é um material que desperta curiosidade em todos os que tenta solucioná-lo, porém poucas pessoas possuem ou conhecem os conhecimentos matemáticos que este material oferece. Sendo assim, buscando uma nova forma de resolução, o presente trabalho pretende elaborar a montagem de um protótipo com material da LEGO NXT que solucione o cubo mágico. O objetivo desta montagem vai além de solucionar o cubo, pretende analisar sua programação e associá-la a Teoria de Grupos. Esta pesquisa pode propiciar uma ferramenta que auxilie no ensino-aprendizagem das aulas que envolvam Teoria de Grupos, tornando-as mais práticas e dinâmicas diante seus alunos.

CAPÍTULO 2

INTRODUÇÃO

O cubo mágico, ou Cubo de Rubik, é um quebra-cabeça mecânico tridimensional inventado pelo húngaro Ernö Rubik em 1974. A ideia inicial de Ernö era construir um cubo capaz de rotacionar suas faces para ilustrar melhor a seus alunos os conceitos da tri dimensão.

A criação do cubo premiou o seu autor com o premio de alemão de jogo do ano, aliás, Ernö não tinha a intensão de criar um quebra-cabeça onde seu objetivo fosse alinhar as cores de suas faces (GRIMM, 2016).

A resolução do Cubo Mágico tem se tornado algo intrigante entre todos os que tentam solucionar sua distorção. Por possuir uma popularidade imensa em todo o mundo, o cubo mágico pode ser bem aliado no ensino da matemática. O cubo mágico desperta interesse e curiosidade em sua resolução e pode auxiliar na explicação de outros conteúdos matemáticos (SILVA, 2015).

Nas páginas da *internet* se encontra diversas formas de resolução para o cubo mágico, no entanto há pouquíssimas pesquisas em que se relaciona o cubo mágico com resoluções que envolvam a tecnologia.

A resolução do cubo mágico pode ser facilmente conectada a diversos assuntos que envolvam a matemática, um exemplo clássico na associação e conteúdos está na Teoria de Grupos.

Através disto, analisando o grau de dificuldade que as disciplinas relacionadas a álgebra permeiam por suas formas de ensino (RODRIGUES; SILVA, 2013), esta pesquisa tem como proposta montar um robô com o material da edição NXT da LEGO *education* que solucione o cubo mágico para analisar as aplicações que a Teoria de Grupos possui sobre este objeto.

A Teoria de Grupos, um conteúdo algébrico, pode ser mais bem entendida usando ferramentas didáticas que auxiliem o professor a lecionar suas aulas. Geralmente disciplinas relacionadas a este conteúdo a retrata utilizando desenhos em quadros e nenhum material dinâmico para auxiliar sem eu entendimento.

A movimentação do cubo mágico também pode ser formalizada em grupos de permutações e as simetrias.

Através da montagem, o objetivo deste trabalho vai além de solucionar o cubo mágico com a robótica, pretende analisar sua programação pelo *Roaming*, um $software$ auxiliar do material trabalhado. Este *Roaming* permite que o programador analise o comportamento da programação de seu robô através da tela do computador, podendo elaborar hipóteses sobre suas conjecturas. Sendo assim pretende analisar como se porta a programação do protótipo e estudar onde se aplica a Teoria de grupos.

Outro intuito desta pesquisa é proporcionar um caminho que vá sobre a memorização de algoritmos, a fim de compreendê-lo de forma dinamizada.

Pode-se afirmar que com esta pesquisa a robótica foi uma ferramenta auxiliar para o ensino-aprendizagem das aulas que envolvam Teoria de Grupos, as tornando mais prática e dinâmica.

CAPÍTULO 3

O CUBO MÁGICO

Para que seja possível a resolução do Cubo Mágico, é necessário que, primeiramente, conheçamos e estejamos familiarizados com sua estrutura e com os elementos que o compõem. A separação e classificação das peças é crucial para compreensão dos movimentos que, ao serem feitos em uma ordem específica, colocam as peças em seus respectivos lugares.

3.1 Elementos do Cubo Mágico

Em um primeiro momento, vamos classificar as peças que compõem o Cubo Mágico. Observe que (Figura 1) existem peças que dispõem de três (3) cores - as chamaremos de Quinas, peças compostas de duas (2) cores - as chamaremos de Meios - e peças de apenas uma (1) cor - que chamaremos de Centro.

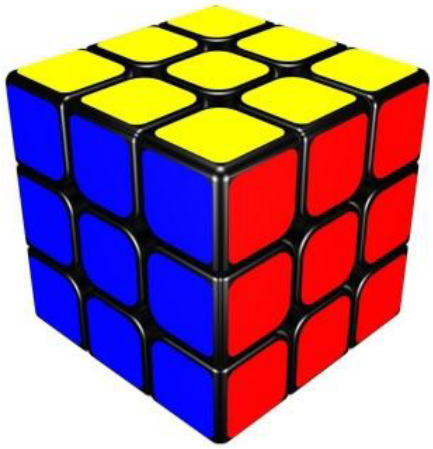

Figura 1: Visão de um Cubo Mágico 3x3x3 resolvido.
Fonte: GRIMM, 2016

Fica claro que o Cubo Mágico é composto por seis (6) faces, cada uma determinada por uma cor distinta das outras faces. Além disso, é evidente que a peça supracitada denominada Centro determina a cor de toda sua face, vez que essa peça é fixa.

Fazendo uma simples análise das peças que compõem o cubo, temos:

- 6 peças *Centro*, compostas de uma cor;
- 12 peças *Meios*, compostas de duas cores;
- 8 peças *Quinas*, compostas de três cores.

Português	Inglês	Código (EN)	Código (PT)
Frente	Front	F	F
Trás	Back	B	T
Direita	Right	R	D
Esquerda	Left	L	E
Cima	Up	U	C
Baixo	Down	D	B

Tabela 1: Nomenclatura e Códigos de Movimentos.
Fonte: GRIMM, 2016

Para que a solução do Cubo Mágico seja possível, é necessário o estabelecimento de uma sequência de movimentos - também chamadas de rotações - que, ao ser seguidas corretamente, o cubo é resolvido. Esses movimentos, como ditos, são feito por rotações sequenciais das faces do quebra cabeça e, para que seja facilitada a compreensão desses, vamos mostrar a nomenclatura utilizada mundialmente para esses movimentos.

3.2 Movimentos das Faces

Agora que as faces receberam suas devidas nomenclaturas, fica mais fácil mostrar a composição ou sequência de seus movimentos. Note que cada face possui um eixo central, fazendo com que cada rotação seja de 90°, 180°, 270° ou 360°. Quando o movimento é de 90°, dizemos que a rotação realizada foi *completa*. Além disso, é evidente que quando uma rotação de 360° é feita, a face volta em sua posição anterior e o cubo não é modificado.

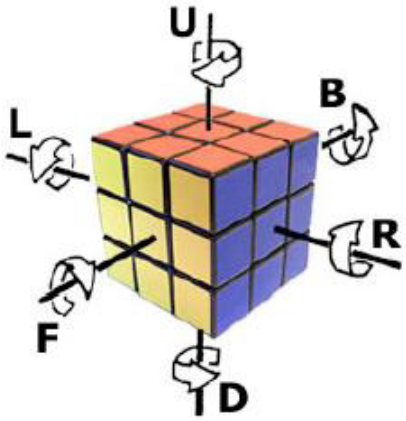

Figura 2: Eixos de Rotação do Cubo Mágico.
Fonte: GRIMM, 2016

Na resolução do Cubo Mágico, utilizam-se códigos para identificar e realizar a rotação de determinada face. Esses códigos são compostos da nomenclatura das faces vistos acima juntamente com um símbolo para diferenciação de movimentos horários de anti-horários. Normalmente, se utiliza uma apóstrofe sobrescrita na letra que representa o movimento para que o sentido desse seja anti-horário. Por exemplo, se quisermos realizar a rotação

da face superior no sentido horário, utilizamos U. A rotação da mesma face - dessa vez no sentido anti-horário - é representada por U'.

3.3 Sequência de Movimentos

Uma sequência de movimentos P é composta por uma sequência de rotações utilizando os códigos citados acima, lida normalmente da esquerda para a direita. Denominaremos o conjunto de rotações como sendo um algoritmo, isto é, uma sequência de movimentos pode ser chamada também de algoritmo.

Para que uma sequência tenha o efeito esperado, é necessário que o cubista - ou simplesmente quem o manuseia - segure o Cubo Mágico na **mesma** posição desde a realização do primeiro movimento, isto é, a face frontal utilizada de referência para início do algoritmo P deve permanecer inalterada até que os movimentos propostos sejam concluídos.

A seguir, a *Figura* 3 mostra os movimentos - ou rotações - mais utilizados em um determinado algoritmo para solução do Cubo Mágico.

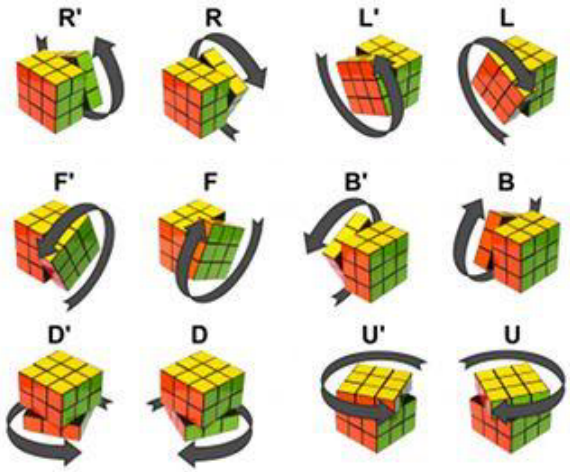

Figura 3: Códigos de Rotações das Faces.
Fonte: GRIMM, 2016

Por exemplo, se quisermos realizar a sequência de movimentos: rotação

da face direita no sentido horário, rotação da face superior no sentido horário, rotação da face direita no sentido anti-horário e rotação da face superior no sentido anti-horário, o algoritmo P utilizado para representar esses movimentos seria:

$$P = \ R\ U\ R'\ U'.$$

Caso se queira realizar um determinado movimento mais de uma vez, a notação utilizada é a seguinte:

$$P = R\ R = R2\ ou\ R^2,$$
$$S = U\ U\ R\ R\ L = U2\ R2\ L\ ou\ U^2\ R^2\ L.$$

Note que a representação dos movimentos é de extrema importância para leitura e execução dos algoritmos na resolução do Cubo Mágico, vez que essas facilitam a compreensão dessas sequências tornando-as mais simples e naturais.

CAPÍTULO 4

TEORIA DE GRUPOS

4.1 Grupos e subgrupos

No grupo temos um conjunto e uma operação definida neste conjunto. Então chamaremos o grupo de G e a operação de *. Se a e b pertencem ao grupo G, quando operamos a com b temos que a*b. Mas nem sempre a operação e o conjunto constituem um grupo, pois deve também satisfazer as seguintes condições:

i. Associatividade: a*(b*c) = (a*b)*c para cada a,b e c $\in$ G
ii. Existe um elemento neutro e em G tal que para cada a $\in$ G, a*e= e*a = a
iii. Dado um elemento a $\in$ G, existe um a' $\in$ G tal que, a*a'=a'*a = e
iv. Comutatividade: a*b= b*a para todo a,b $\in$ G

Agora, seja (G, $*$) um grupo, chamaremos de subgrupo de G, um subconjunto H de G não vazio se as seguintes condições são satisfeitas:

i. h1 $*$ h2 $\in$ H, $\forall$ h1, h2 $\in$ H.
ii. h1 $*$ (h2 $*$ h3) = (h1 $*$ h2) $*$ h3, $\forall$ h1, h2, h3 $\in$ H.
iii. $\exists$ e $\in$ H tal que e $*$ h = h $*$ e = h, $\forall$ h $\in$ H.
iv. $\forall$ h $\in$ H, $\exists$ h' $\in$ H tal que h $*$ h' = h' $*$ h = e.

4.2 Permutações

Uma permutação é um rearranjo de um conjunto finito qualquer. Por exemplo, (b a c) é uma permutação do conjunto a, b, c. Podemos observar que trocamos o 1° e o 2° elemento do conjunto. O número de permutações em um dado conjunto é n! (trivial).

Denotamos também, $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$ ou (1 2), que é a notação cíclica de permutações, e que de uma forma mais simples dizemos que "o 1 vai para o 2 e o 2 vai para o 1". Na notação cíclica, os n elementos entre parênteses formam um n - ciclo. Além disso, toda permutação é escrita de forma única como produto de k - ciclos disjuntos com $k \leq n$.

Por exemplo, considere as permutações:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho = \begin{pmatrix} 3\ 2\ 4 & 7\ 5\ 6 \\ 4\ 2\ 3 & 5\ 6\ 7 \end{pmatrix}$$

Podemos representá-las na notação cíclica das seguintes formas:

$$\sigma = (1\ 5\ 6)$$

$$\rho = (3\ 4)(7\ 5\ 6)$$

4.3 Simetrias

Vamos observar as simetrias do quadrado, o conjunto das simetrias do quadrado e do cubo são as mesmas. Estas simetrias podem ser descritas entre:

. o elemento neutro (não alterar nada);
. uma rotação θ; . e uma reflexão r qualquer de espelho que divide o quadrado ao meio.

O grupo das simetrias do quadrado é chamado D4 e é dito formalmente como:

$$D4 = \{e, r, \theta \mid \theta^{4-k}\ r\ = r\theta^k\ \forall\ 0 \leq k \leq 4\}$$

Por meio de axiomas notamos as simetrias do quadrado, sendo D_1 a reflexão pela primeira diagonal e D_2 a segunda, H a reflexão horizontal e V a reflexão vertical:,

$$D4 = <\ e,\ 90^o,\ 180^o,\ 270^o,\ H,\ V,\ D1,\ D2\ >\ e\ |D4| = 8$$

Pela tabela de multiplicação temos:

∘	**e**	**90°**	**180°**	**270°**	**H**	**V**	**D_1**	**D_2**
e	e	90°	180°	270°	H	V	D_1	D_2
90°	90°	180°	270°	e	D_2	D_1	H	V
180°	180°	270°	e	90°	V	H	D_2	D_1
270°	270°	e	90°	180°	D_1	D_2	V	H
H	H	D_1	V	D_2	e	180°	90°	270°
V	V	D_2	H	D_1	180°	e	270°	90°
D_1	D_1	H	D_2	V	270°	90°	e	180°
D_2	D_2	V	D_1	H	90°	270°	180°	e

Tabela 2: Tabela de multiplicação do grupo do quadrado.

CAPÍTULO 5

METODOLOGIA

Para o desenvolvimento deste projeto de pesquisa o método abordado é o Qualitativo.

A pesquisa qualitativa não valoriza a representação numérica de determinados dados, mas, sim com o aprofundamento e compreensão de uma pauta por um grupo social. A pesquisa é definida por Thiollent (2005) como um tipo de pesquisa social que é trabalhada associada com a ação ou a resolução de um problema de forma coletiva, onde os pesquisadores também fazem parte do corpo que coopera com seu desenvolvimento.

Em atividades como esta, os pesquisadores devem desempenhar um papel comunicativo e participativo no acompanhamento das hipóteses formadas a nas avaliações registradas (THIOLLENT, 2005).

A conjectura qualitativa é totalmente adequada para o tema proposto, pois pretende trabalhar a resolução do cubo mágico de forma robotizada para analisá-la e aplicar a Teoria de Grupos na programação.

As áreas de abordagem sobre o tema estão relacionadas ao ambiente de aprendizagem com tecnologias digitais robotizadas e matemática. Sendo assim, o desenvolvimento se deu no laboratório de ensino e informática de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia.

O projeto teve os seguintes passos para sua execução:

i. Montagem do robô;

ii. Programação;

iii. Análise e discussões;

O material utilizado para montagem e desenvolvimento desta atividade é o kit de robótica da LEGO education da linha NXT. O conjunto da LEGO, utilizado em diversas escolas, permite que os alunos construam e programem robôs semelhantes a objetos, animais, humanos, entre outros. A maleta da LEGO é composta com 431 peças, sendo as principais: a bateria de lítio recarregável; motores; sensor de luz; sensor de som; sensor ultrassônico; sensores de toque; sensores de rotação incorporada nos motores; cabos conversores e conectores; cabo USB e maleta para organização de todo o material.

A montagem do protótipo que auxiliou na resolução do cubo mágico tinha como base referências da internet. O robô tinha o propósito de resolver o cubo mágico independente da forma que fosse desorganizado.

Para auxiliar nesta resolução foi necessário acionar os sensores de cor para poder prever a solução do cubo e, assim, parar o algorítmico da programação.

Para esta pesquisa foi necessário a resolução do cubo para análise, porém o que interessa para os pesquisadores é analisar o comportamento da programação através do *Roaming*. O *Roaming* é um componente do $software$ que detalha toda a programação do robô. Através deste auxilio pode-se compreender e analisar o que esta acontecendo com o robô.

O resultado da programação serviu de base para analisar e aplicar a Teoria de grupos na programação inserida no protótipo que solucionou o cubo mágico.

Como estratégia de obtenção das informações, temos fotografias, gravação em áudio, e filmagens. Esta estratégia foi planejada sobre a idéia de analisar melhor o espaço trabalhado e formular considerações mais interessantes e vantajosas.

O recolhimento destes dados foi feito pelos pesquisadores, sendo privilegiadas as observações da programação e registradas em nota de campo e

vídeos. As observações dos pesquisadores auxiliaram e contribuíram para melhores considerações sobre seu trabalho.

Contudo, a forma de obtenção de informação é importante para o tratamento dos dados. Nesta fase o investigador deve tomar muito cuidado com sua interpretação e realizá-la de forma compreensível.

Sendo assim, pretendeu-se verificar a eficácia da robótica atrelada a resolução do cubo mágico para propor uma forma diferenciada de resolução que coopere com o ensino aprendizado das aulas que envolvam Teoria de Grupos.

CAPÍTULO 6

ANÁLISES E DISCUSSÕES

O protótipo (Figura 4) montado foi baseado em um manual, porém diversas partes de sua estrutura foi modificada para se adequar a quantidade de peças que havia no malote do equipamento.

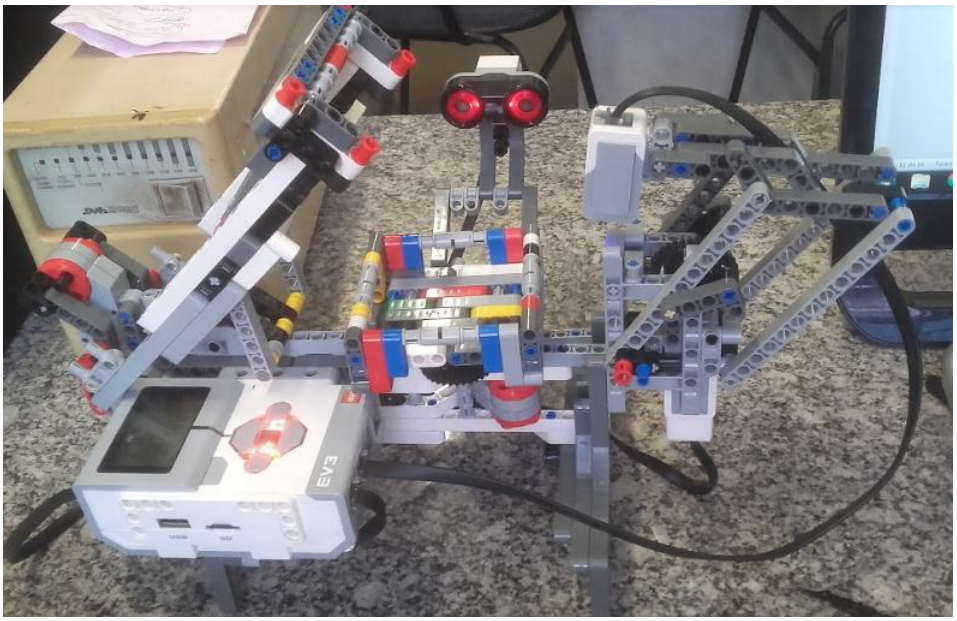

Figura 4: Protótipo usado para esta análise.

A programação foi divida em duas partes, conforme a Figura 5

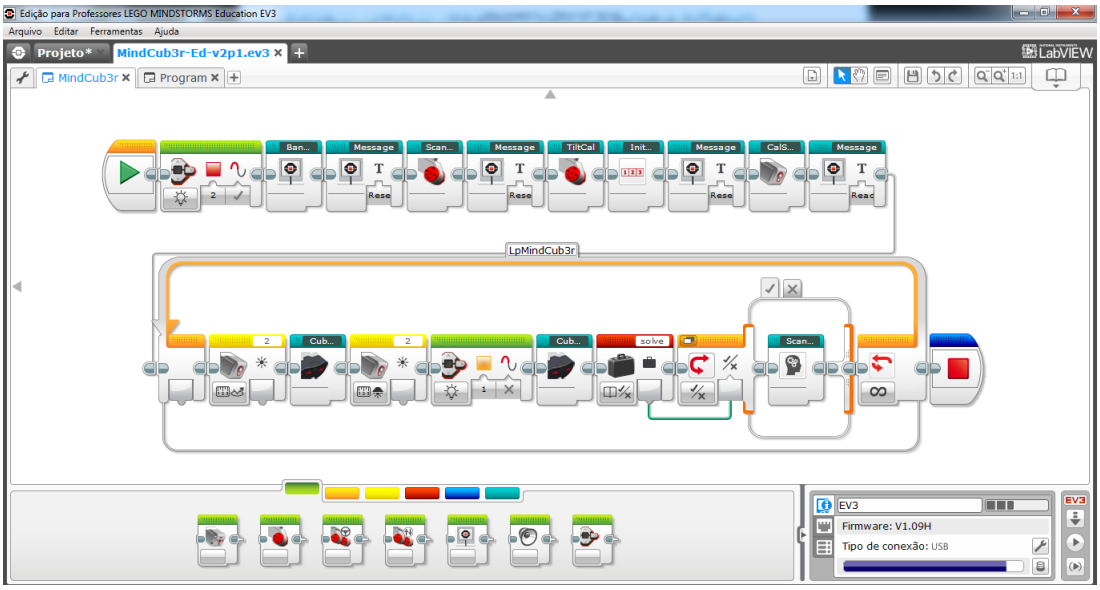

Figura 5: Programação. Fonte do Autor

Na Parte 1 (Roxo), o robô foi programado para identificar o cubo. Primeiramente o *brick* reinicia o sensor e informa que encontrará a solução. Em seguida, solicita a retirada do cubo para o senso ultrassônico reconhecer que há um objeto na plataforma. A programação se encerra quando este mesmo sensor faz a leitura de qualquer face com apenas uma cor.

O *brick* solicita que insira o robô na plataforma, nisto o sensor de cores realiza a leitura das cores de cada quadrado do cubo, a fim de enviar as informações para o sensor ultrassônico para dar inicio e finalizar a missão.

Na Parte 2 (Verde), antes de iniciar a resolução, o sensor ultrassônico calcula os movimentos a serem utilizados para solucionar o problema do cubo mágico.

Seus motores são programados para movimentar a ultima camada do cubo e girá-lo 90º para o lado esquerdo até que o sensor ultrassônico dê a ordem para finalizar. O sensor ultrassônico realiza a leitura a cada fim de circuito de rotação.

Analisando o bloco de resolução (Figura 6) após o robô ler e verificar os movimentos que adotará, o método de resolução estará ligado com movimentos sobre os lados esquerdos e direito, podendo ser alternados ou repetidos. O bloco *Solverresponse* irá verificar através dos movimentos se a solução finalizará com êxito, gerando os grupos algébricos. No entanto poderão acontecer erros, sendo assim é enviada ao *brick* a mensagem de finalização.

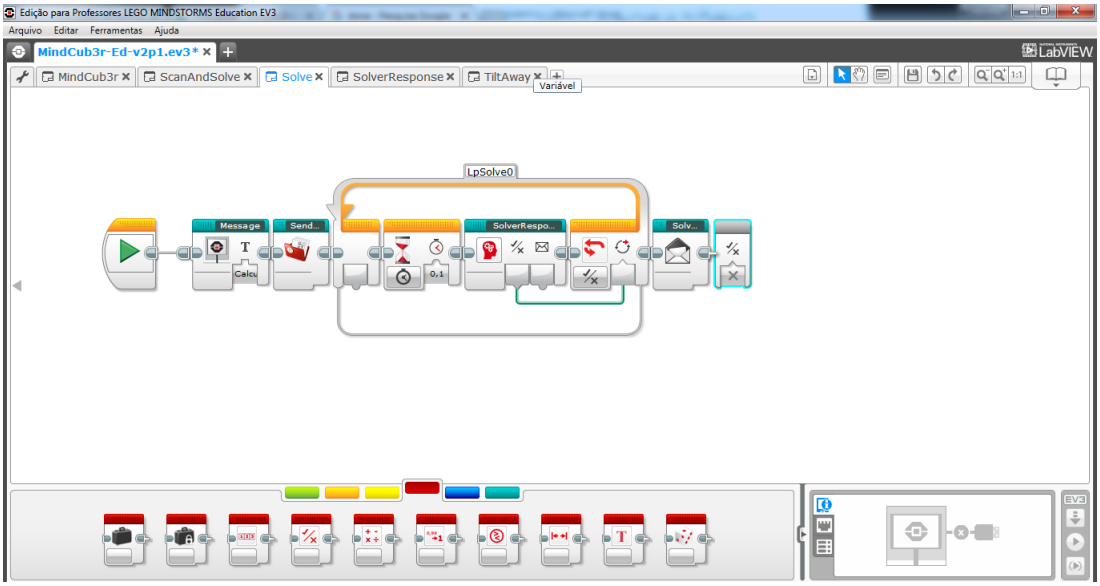

Figura 6: Parte do funcionamento da programação. Fonte Própria.

Para analisar o comportamento da programação, o cubo mágico foi divido em:

. Seis faces:
$F = F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$

. Um eixo, o da abscissa, definindo o movimento para frente Y e para trás X:
$E = x, y$

. Dois movimentos, direita definida como -90º (E) e esquerda 90º (D):
$M = -90º, 90º = E, D$

Cada baralhamento do cubo gera um Grupo de Permutações diferente. O

cubo foi bagunçado com 4 movimentos de forma proposital a fim de facilitar a leitura dos gráficos gerará o *Dataloggin*.

Denotando R como a sequência de movimentos, encontra-se o seguinte Grupo de Permutação para esta amostra de quatro movimentos:

$$R = F_1\ F_4\ E\ x\ x\ F_2\ D\ x\ F_5\ E\ x\ x\ F_6\ D\ F_6$$

$$R = F_1\ F_4\ E\ x^2\ F_2\ D\ x\ F_5\ E\ x^2\ F_6\ D\ F_6$$

Note que a sequência que possui letras repetidas se eleva ao quadrado, além de mostrar apenas as Faces que estão voltadas para cima.

Por meio da notação de R, Os movimentos foram gerados da seguinte forma:

i. Inicia o cubo com a Face 1 para cima e a Face 4 para frente, com referência ao sensor ultrassônico. Após a leitura o cubo iniciará com a Face 4 para cima e a Face 3 para frente.

ii. O protótipo gira a ultima camada para a esquerda e o cubo -180º em direção ao motor B, expondo a Face 2 para cima. Após isto, a última camada para a Direita e, novamente, gira o cubo em -90º em direção ao motor B, resultando na Face 5 para cima.

iii. Em seguida, movimenta a última camada novamente para a direita e -180º graus em direção ao motor B, expondo a face 6.

iv. Para finalizar desliza a ultima camada para a esquerda e finaliza com a Face 6.

Vale ressaltar que, o protótipo soluciona o cubo mágico na menor quantidade de movimentos possíveis.

Analisando pelo *Dataloggin* (Figura 7, 8), o $software$ exprime um gráfico que pode ser interpretado de acordo com a movimentação dos motores, sedo A o motor que gira o cubo em -90º e B o motor que movimenta a última camada do cubo para esquerda ou direita.

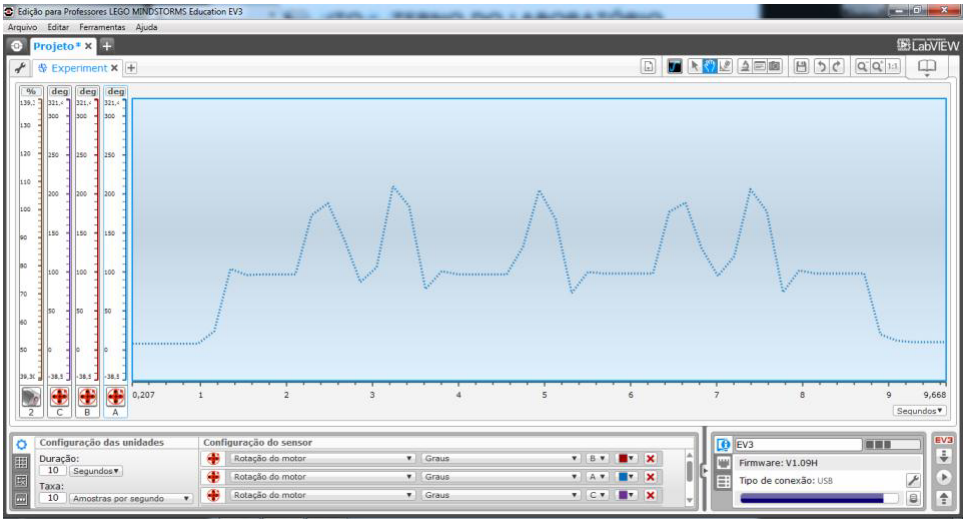

Figura 7: Gráfico do motor A.

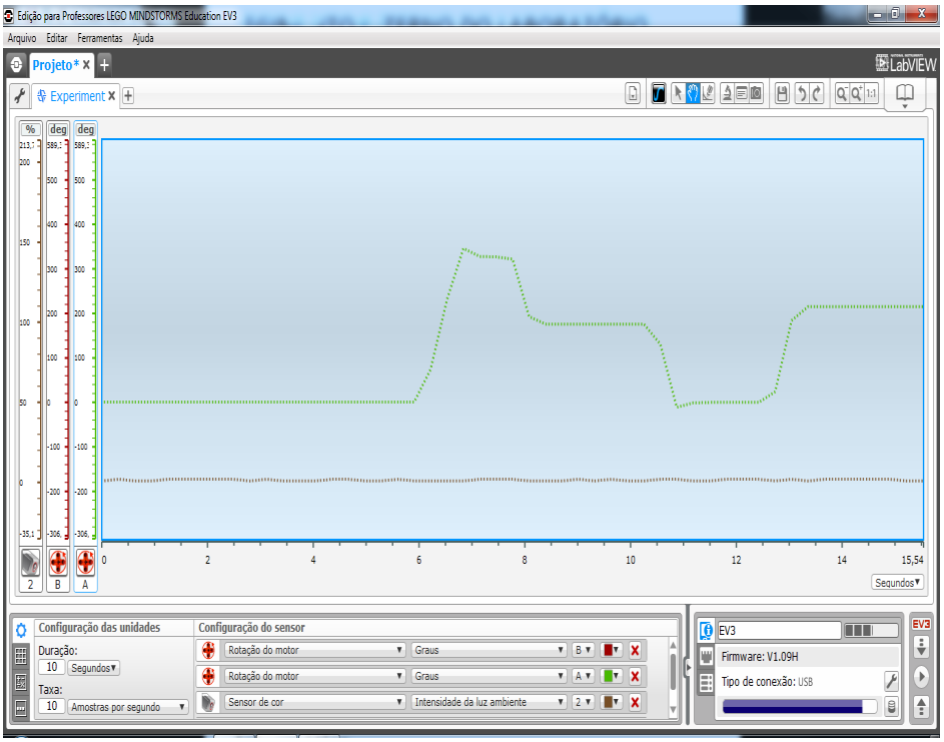

Figura 8: Gráfico do motor B.

Antes de analisar, agruparemos os movimentos do Motor A e B de acordo

com a sequência de R, gerando alguns subgrupos.

Seja A os movimentos do motor A e B os do motor B.

$$\text{A} = \text{x y x y x y x y x y}$$

$$\text{B} = \text{E D D E}$$

Analisando a Figura 7, determinamos como y o movimento para frente e x o movimento para trás, onde o movimento para trás o gráfico é crescente e o movimento para frente o gráfico é decrescente. Vale lembrar que y não compõe um subgrupo para esta função, pois seus movimentos não alteram a resolução do cubo. Sendo assim, denotamos o subgrupo dos movimentos do motor A da seguinte forma:

$$A = x^2 \; x \; x^2$$

Quando o gráfico se mantém constante, significa que o motor não esta em movimento. Em A os movimentos poderiam sem interpretados como:

A= TRÁS, FRENTE, TRÁS, FRENTE, TRÁS, FRENTE, TRÁS, FRENTE, TRÁS, FRENTE

Em B, temos o subgrupo dos movimentos para esquerda e direita, quando o gráfico cresce e decresce, respectivamente. Sendo B os movimentos de B interpretados como:

B = ESQUERDA, DIREITA, ESQUERDA, DIREITA

Por meio desses subgrupos podemos denotar outros subgrupos. Seja $C = C1, C2, C3, C4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9$ subgrupos de permutação gerados a partir dos movimentos do motor A e B, respectivamente. A partir da Face 5 e 6 marcamos os seguintes pontos:

1. Encontro das Faces 3, 4 e 6
2. Encontro das Faces 2, 3 e 6

3. Encontro das Faces 1, 4 e 6
4. Encontro das Faces 1, 2 e 6
5. Encontro das Faces 1, 4 e 5
6. Encontro das Faces 1, 2 e 5
7. Encontro das Faces 3, 4 e 5
8. Encontro das Faces 2, 3 e 5

Após definir onde serão marcados os números dos vértices, através das rotações podemos exibir os grupos de permutações criados.

Quando estamos na F4 e o motor B se movimenta para a esquerda, gera o seguinte subgrupo:

$$C_1 = (3\ 4\ 6\ 5)$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Em seguida, movimenta-se em x, fazendo um giro de -90º, gerando:

$$C_2 = (1\ 5\ 3\ 2)(4\ 8\ 7\ 6)$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 8 & 3 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Quando gira novamente em x, temos o mesmo grupo de permutação, então x^2 é da forma:

$$C_3 = C_2$$

Em seguida, temos a Face 2 para cima e um movimento para a direita, gerando:

$$C_4 = (8\ 7\ 1\ 2)$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Novamente há um novo giro em x, resultando em:

$$C_5 = C_3 = C_2$$

Pela analise, o giro para a esquerda gera:

$$C_6 = (4\ 2\ 1\ 3)$$

$$C_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Novamente há um giro de -180º em x, formando:

$$C_7 = C_8 = C_5 = C_3 = C_2$$

Para finalizar, com a Face 6 para cima, há um giro para a direita, ordenando em:

$$C_9 = (8\ 6\ 5\ 7)$$

$$C_6 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Este material possibilita diversas analises sobre a Teoria de Grupos. Portanto, este trabalho relata os conteúdos relacionados a uma movimentação proposital para observar os Grupos de Permutação gerados e seus subgrupos.

CAPÍTULO 7

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho pode proporcionar uma maneira mais ampla de observar a Teoria de Grupos aplicada no cubo mágico.

Além do mais, após a facilidade em analisar o cubo com este protótipo e a reação das pessoas perante sua exposição, afirma-se, por meio desta experiência, que a utilização da robótica na disciplina de álgebra pode facilitar no seu ensino, sendo assim, o manuseio desses materiais em sala de aula traria resultados importantes para o desenvolvimento da disciplina.

Este trabalho tem potencial de se desenvolver, com isto, pretende-se continuar seus estudos para aprofundar na Teoria de Grupos e demonstrar melhor seus resultados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] A. Garcia e Y. Lequain. ***Elementos de Algebra, Projeto Euclides***. Rio de Janeiro, IMPA, 2002.

[2] A. Gonçalves. ***Introdução à Álgebra, Projeto Euclides***. Rio de Janeiro, IMPA, 2009.

[3] ALVES, J. B. M. ***Controle de robô***. Campinas: Cartgraf, 1988.

[4] AZEVEDO, Samuel. AGLAÉ, Akynara. PITA, Renata. ***Minicurso: Introdução a Robótica Educacional***. Disponível em: http://www.sbpcnet.org.br/livro/62ra/minicursos/MC%20Samuel- Acesso em: 26 jun. 2017.

[5] CAMBRUZZI, Eduardo. SOUZA, Rosemberg M. ***?O Uso da Robótica Educacional para o Ensino de Algoritmos?***, 2013. Disponível em: http://www.eati.info/eati/2014/assets/anais/artigo4.pdf. Acesso em: 14 jul. 2017.

[6] GRIMM, Luis Gustavo Hauff. ***Cubo Mágico: Propriedades e Resoluções envolvendo Álgebra e Teoria de Grupos***. 2016. 83 p. Dissertação - Programa de Pós Graduação - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Rio Claro, 30 ago. 2016.

[7] Guia Almanaque De Robótica. ***Introdução à robótica***. Disponível em: ¡http://www.leomar.com.br/brinquedos/images/stories/manuais/laboratorio/guiabotica.pdf¿ Último acesso em: 01 jul. 2017.

[8] RODRIGUES, Vânia Cristina da Silva; SILVA, Brunno Freitas. ***Trabalhando Alguns Conceitos de Álgebra com o Cubo Mágico***. Disponível em: http://cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/1175.pdf. Acesso em : 4 jul. 2017.

[9] SILVA, José Vinicius do Nascimento. ***Uma proposta de aprendizagem usando o cubo mágico em malta*** - PB. 2015. 71 p. Dissertação - Programa de Pós Graduação em Matemática. Paraíba, 3 ago. 2015.

[10] THIOLLENT, M. ***Metodologia da pesquisa-ação***. 14.ed. aumentada. São Paulo: Cortez, 2005.