João Socorro Pinheiro Ferreira
Universidade Federal do Amapá

MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA EPIDEMIOLÓGICO SI: UM ESTUDO DE CASO DA DOENÇA DE CHAGAS

Área de Concentração: Matemática Aplicada

1 Modelo SI

O modelo conhecido como SI, sem dinâmica vital, é considerado o modelo epidemiológico mais simples. Trata-se de um modelo compartimental que considera uma população subdividida em dois grupos de indivíduos: suscetíveis (S) e infectados (I)

Este modelo pode ser adequado para doenças de caráter crônico no qual o indivíduo uma vez infectado, não se recupera, nem mesmo se torna suscetível novamente, tal como ocorre em algumas doenças como a doença de Chagas[1], entre outras.

Matematicamente, o modelo SI é representado pelo sistema de duas equações diferenciais ordinárias não lineares, conforme a Equação (1):

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -rSI \\ \frac{dI}{dt} = rSI \end{cases} . \tag{1}$$

Considerando $N(t) = S(t) + I(t)$ a população total e somando-se membro a membro as equações do sistema (1), tem-se $\frac{dN}{dt} = 0$, ou seja, N é constante. Assim, $S(t) = N(t) - I(t)$, e, assumindo $N(t) = 1$ com $t > 0$, tem-se:

$$S(t) = 1 - I(t), \tag{2}$$

onde S e I representam, respectivamente, proporções de indivíduos suscetíveis e infectados. Substituindo a equação (2) na segunda equação do sistema (1), tem-se:

$$\frac{dI}{dt} = r\,(1 - I)\,I. \tag{3}$$

Integrando-se a equação (3) a partir do método de separação de variáveis, tem-se a função (4):

$$I = \frac{Ke^{rt}}{1 + Ke^{rt}} \tag{4}$$

Em que $I(t) = \frac{Ke^{rt}}{1+Ke^{rt}}$ é a solução geral de (3) com K constante.
Usando as condições inicias : $I(0) = I_0$ e $S(0) = S_0$, tem-se:

$$I_0 = \frac{Ke^0}{1 + Ke^0} = \frac{K}{1 + K} \Rightarrow K = \frac{-I_0}{I_0 - 1} = \frac{-I_0}{-S_0} = \frac{I_0}{S_0} \tag{5}$$

Substituir (5) em (4), tem-se a solução particular:

$$I(t) = \frac{\frac{I_0}{S_0}e^{rt}}{1 + \frac{I_0}{S_0}e^{rt}} = \frac{I_0e^{rt}}{S_0 + I_0e^{rt}} \tag{6}$$

Analisando-se a equação (6) para $t \to \infty$ tem-se $I \to 1$, ou seja, a predição é que, com o tempo, toda a população se torne infectada.

Para obter a função que descreve a dinâmica epidemiológica dos suscetíveis, substitui-se a Equação (6) na Equação (2),

[1]N.do A.: O nome desta doença é em homenagem ao médico mineiro Carlos Chagas (1839 - 1934).

$$S(t) = \frac{S_0}{S_0 + I_0 e^{rt}}, \tag{7}$$

onde S_0 e I_0 são, respectivamente, os números iniciais de suscetíveis e infectados.

Para se determinar o tempo em que o número de infectados é igual ao número de suscetíveis, deve-se igualar as equações (7) e (6) e proceder como de costume:

$$I(t) = S(t)$$

Portanto, o tempo t^* para $S(t) = I(t)$, é dado por:

$$t^* = \frac{ln(S_0) - ln(I_0)}{r}. \tag{8}$$

Analiticamente, podem ocorrer três casos: para $S_0 > I_0$ temos $t^* > 0$; para $S_0 = I_0$, temos $t^* = 0$ e para $S_0 < I_0$ temos $t^* < 0$.

1.1 Taxa de infecção r

A partir da equação (8), pode-se estabelecer a equação para determinar a taxa de infecção r:

$$r = \frac{ln(S_0) - ln(I_0)}{t^*}. \tag{9}$$

para $t^* \neq 0$.

2 Doença de Chagas no Amapá

De acordo com o documento eletrônico [3], a Doença de Chagas no Amapá, apresenta os números de casos (frequência absoluta I_i), conforme a Tabela 1. Os dados baseiam-se nas famílias cadastradas no Sistema de Informação da Atenção Básica do Ministério da Saúde (SIAB). "O SIAB é um sistema (*software*), desenvolvido pelo DATASUS em 1998, cujo objetivo centra-se em agregar, armazenar e processar as informações relacionadas à Atenção Básica (AB) usando como estratégia central a Estratégia de Saúde da Família (ESF)."([2]).

Como visto,na Seção 1, a doença de Chagas é um exemplo a ser estudado a partir da modelagem de um sistema epidemiológico composto por dois grupos de indivíduos: um de suscetíveis, S, e outro de infectados, I, propriamente dito, simbolizados por sistema SI.

Para se fazer um estudo qualitativo, deve-se determinar a taxa de infecção (ou transmissão) r. Para atingir tal êxito, faz-se necessário pesquisar o número de casos em um determinado período de tempo de ocorrência da doença no Amapá, conforme mostrado na Tabela 1.

Deduzimos na Subsecção 1.1, que a taxa de infecção r é obtida pela equação (9). A partir da Tabela 1, calculamos o r_m médio, utilizando-se os respetivos números de suscetíveis S_i e infectados I_i de cada ano, porém, consideramos que $r_m = r$, logo:

$$r = 0.00519. \tag{10}$$

Com $S_0 = 485400$, $I_0 = 6$ e $r = 0.00519$, vamos escrever as funções $S(t)$ e $I(t)$, conforme a seguir:

$$S(t) = \frac{485400}{485400 + 6e^{0.00519t}} = \frac{1}{1 + \frac{e^{0.00519t}}{80900}} \tag{11}$$

$$I(t) = \frac{6e^{0.00519t}}{485400 + 6e^{0.00519t}} = \frac{e^{0.00519t}}{80900\left(1 + \frac{e^{0.00519t}}{80900}\right)} \tag{12}$$

O tempo em que o número de infectados é igual ao número de suscetíveis é calculado pela equação (8), conforme abaixo:

$$t^* = \frac{ln(485400) - ln(6)}{0.00519} \approx 2178, \tag{13}$$

portanto, aproximadamente 2178 anos, a partir de 1999, que o número de infectados será igual ou maior de que o número de suscetíveis, se mantida a taxa r.

Tabela 1: Distribuição de casos confirmados de doença de Chagas no Estado do Amapá de 1999 a 2013

Índice (j)	Ano (t_j)	Casos (I_j)	População (N_j)	$S_j = N_j - I_j$	r_j
0	1999	6	485406	485400	0.00565
1	2000	39	499329	499290	0.00473
2	2001	12	519202	519190	0.00533
3	2002	21	538836	538815	0.00507
4	2003	22	558398	558376	0.00506
5	2004	21	577786	577765	0.00510
6	2005	32	596914	596882	0.00490
7	2006	23	615692	615669	0.00508
8	2007	22	634068	634046	0.00512
9	2008	19	651977	651958	0.00520
10	2009	14	669360	669346	0.00536
11	2010	14	686189	686175	0.00537
12	2011	10	702638	702628	0.00555
13	2012	26	718906	718880	0.00508
14	2013	20	734996	734976	0.00522
$\sum_{j=0}^{14}$	**30090**	**301**	**9189697**	**9189396**	**0.07785**
$\sum_{i=0}^{14}/15$	**2006**	**20.06667**	**612646.4667**	**612626.4**	$r_m = 0.00519$

Fonte: A partir de [3] (2016).
N_j é a população estimada do Amapá, conforme [1], (2016).

3 Conclusão

Com o resultado obtido na Equação (13), pode-se afirmar cientificamente que não ocorreu uma epidemia de Doença de Chagas no Amapá no período pesquisado.

Sugere-se realizar novos estudos a partir da diminuição da área pesquisada e por conseguinte a população pesquisada diminuirá, tornando-se uma amostra populacional e provavelmente novo resultado será encontrado.

Referências

[1] BASSANEZI, R.C. **Equações diferenciais ordinárias**: um curso introdutório. Santo André: Universidade Federal do ABC, s.d. (Coleção BC & T - UFABC. Textos Didáticos. Volume 1.)

[2] BRASIL. Ministério da Saúde. Departamento de Atenção Básica (DAB). **Sistema de Informação da Atenção Básica**. Brasília. Disponível em: http://dab.saude.gov.br/portaldab/siab.php. Acesso em: 04 set. 2016.

[3] DOENÇA DE Chagas: Veja número e incidência de casos por estado do Brasil - Amapá. **Deepask**: o mundo e as cidades através de gráficos e mapas. Disponível em: http://www.deepask.com/goes?page=amapa-Confira-o-numero-de-pessoas-com-doenca-de-chagas-no-seu-estado. Acesso em: 04 set. 2016.

[4] EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical models in biology**. Philadelphia, USA: SIAM – Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005. (Classics In Applied Mathematics, 46).