Radiação de ondas de água por disco poroso usando equações integrais

Izabella Freitas

IME - UFRGS
Porto Alegre, Junho de 2017

1 Introdução

No problema de radiação de ondas de água por um disco submerso poroso, estamos interessados no comportamento de duas forças relacionadas com o movimento de um corpo submerso, conhecidas como massa adicional e amortecimento. Massa adicional - ou massa virtual - é "peso inexistente" adicionado ao corpo em movimento. Amortecimento representa a força que o sistema perdeu por causa das ondas geradas pelo movimento.

A massa adicional A, e amortecimento D, do movimento oscilatório vertical do obstáculo podem ser expressas, respectivamente, como as partes real e imaginária da integral da descontinuidade da ϕ sobre o corpo ($[\phi]$), que representa a função de "potencial harmônico da velocidade",

$$A + iD = -\int_L [\phi] dS \tag{1}$$

onde L representa a superfície do corpo, que nesse caso, é um disco poroso.

2 Formulação

Cosideramos a superfície de um disco rígido e fino L e um sistema cartesiano de eixo z orientado para baixo com o fluido ocupando $z \geq 0$ e em $z = 0$ temos uma superfície sem perturbações. O potencial harmônico é dado por $Re\{\phi(x, y, z)e^{-i\omega t}\}$, no qual ϕ satisfaz as seguintes condições:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \tag{2}$$

a condição linearizada da superfície livre

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - K\phi = 0, \text{ em } z = 0. \tag{3}$$

e a condição de contorno do disco

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = iKG[\phi](p) + 1, \text{ em } L. \tag{4}$$

onde $K = \omega^2/g$, g é a aceleração da gravidade e ω é a frequência angular, $[\phi](q) = \phi(q^+) - \phi(q^-)$ é a diferença de ϕ de um lado para o outro do disco, com q^+ e q^- são pontos do lado "positivo" e "negativo" de L, respectivamente. G é parâmetro do efeito poroso definido por Yu e Chwang (1)

$$G = \frac{\gamma(f + iS)}{K\delta(f^2 + S^2)}. \tag{5}$$

Nesse parâmetro, γ é a porosidade do corpo, S é o coeficiente de força inercial, f é o coeficiente de resistência e δ é a espessura do meio poroso. Também é necessário que ϕ satisfaça a condição de radiação

$$\lim_{r\to\infty} r^{1/2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - iK\phi\right) = 0 \tag{6}$$

onde r é a distância usual entre dois pontos.

Usando uma solução fundamental dada pela função de Green

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(P,Q) = \mathcal{G}(x,y,z;\xi,\eta,\zeta) = \\ = [R^2 + (z-\zeta)^2]^{-\frac{1}{2}} + \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} e^{k(z-\zeta)} J_0(kR) dk\end{aligned} \tag{7}$$

- onde $R = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2}$ e J_0 é uma função de Bessel - e o teorema de Green, é possível representar ϕ como

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_L [\phi](q) \frac{\partial \mathcal{G}(P,q)}{\partial n_q} dS_q \tag{8}$$

Ao aplicarmos as condições de contorno, nosso problema se torna resolver a equação integral hipersingular

$$\frac{1}{4\pi} \not\int_L [\phi](q) \frac{\partial^2 \mathcal{G}(p,q)}{\partial n_p \partial n_q} dS_q - iKG[\phi](p) = 1. \tag{9}$$

3 Método de solução

Usando coordenadas polares e séries de Fourier Legendre, temos que $[\phi] = [\phi](r,\theta)$ pode ser escrita como

$$[\phi] \approx \sum_{k,m}^{N} a_k^m B_k^m = \sum_{k=0}^{N_1} \left(\sum_{m=0}^{N_2} a_k^m B_k^m \right) \tag{10}$$

onde

$$B_k^m(r,\theta) = P_{m+2k+1}^m(\sqrt{1-r^2}) \cos(m\theta), \quad m,k = 0,1,...$$

e P_n^m são funções de Legendre associadas.

Ao escrevermos $H = \partial^2 \mathcal{G}/(\partial n_p \partial n_q)$, podemos decompor $\mathcal{G}$ nas suas partes regular e singular tais que $\mathcal{G} = \mathcal{G}_r + \mathcal{G}_s$, assim, a mesma simplificação deve ser feita em H, logo $H = H_r + H_s$ e $H_s = 1/|p-q|^3$. Depois, definimos as mudanças de variáveis $X = KR$ e $Z = -K(z+\zeta)$, podemos escrever $\mathcal{G}_r = KF(X,Z) + 2\pi i K e^{-Z} J_0(X)$

e podemos também escrever H_r como

$$H_r = K^2 \mathcal{G}_r + K^3 \left[\frac{3Z^2}{(X^2+Z^2)^{5/2}} + \frac{2Z-1}{(X^2+Z^2)^{3/2}} + \frac{1}{(X^2+Z^2)^{1/2}} \right] \tag{11}$$

desta forma, nosso problema se torna resolver a equação integral

$$\frac{1}{4\pi} \int_L [\phi](q) \left[\frac{1}{R^3} + H_r(p,q) \right] dS_q - iKG[\phi](p) = V(p). \tag{12}$$

que, quando aproximamos $[\phi]$ usando (10), podemos aproximar pelo sistema linear abaixo, que podemos resolver utilizando um método de expansão e colocação.

$$\sum_{k,m}^{N} a_k^m \left\{ \left(C_k^m \frac{B_k^m(r,\theta)}{\sqrt{1-r^2}} - iKGB_k^m(r,\theta) \right) + \frac{1}{4\pi} \int_L B_k^m(s,\alpha) H_r(r,\theta;s,\alpha;d,K) s ds d\alpha \right\} = 1 \tag{13}$$

com

$$C_k^m = -\frac{\pi}{4} \frac{[P_{m+2k+1}^{m+1}(0)]^2}{O_k^m} \quad \text{e} \quad O_k^m = \frac{(2m+2k+1)!}{(2k+1)!}$$

.

4 Parâmetro G e resultados numéricos

Para melhor entendermos o comportamento das forças hidrodinâmicas de nosso interesse, quando G varia, dividimos a análise dos experimentos, em dois casos: G puramente real e G puramente imaginário.

Os resultados numéricos mostraram que quando G real aumenta, as curvas tendem a ficar "contidas" na curva base $G = 0$, interpretada como o comportamento da massa adicional quando o disco é impermeável. É possível observar que existe uma suavização dos extremos e um deslocamento dos mesmos para frequências mais baixas. Para o caso no qual G é puramente imaginário, seu aumento causa um deslocamento dos extremos da função para comprimentos de onda mais baixos, um crescimento significativo do máximo e uma diminuição do mínimo .

Quando avaliamos os mesmos casos para o amortecimento, observamos um comportamento semelhante. Os picos diminuem quando G é real e aumentam quando G é puramente imaginário, sendo ainda possível observar o deslocamento dos picos para frequências mais baixas em ambos os casos.

4.1 ...e quando G não for real ou puramente imaginário?

Para responder a pergunta sobre o comportamento da massa adicional quando G não tem uma característica física dominante, precisamos analisar mais ao fundo os valores de G no quadrante complexo positivo. Para isso, fizemos experimentos que levaram em consideração valores mistos para G.

Foi interessante notar que mesmo com parâmetros mistos o maior dos máximos e o menor dos mínimos continuam a ocorrer quando $G = i$, que é um caso estudado anteriormente (quando $S \gg f$ em (5)). Utilizando mapas de cores, foi possível notar que a parte real é dominante no comportamento do parâmetro de porosidade G.

5 Utilizando os resultados

Como temos como objetivo diminuir a ocorrência e os efeitos da ressonância, ao analisar os resultados do trabalho, podemos inferir que isso pode ser feito minimizando S em (5), ou seja, modelando discos finos e porosos que aproximem os casos em que G tem parte real dominante.

References

[1] X. Yu and A.T. Chwang, *Journal of Waterway Port Coastal and Ocean Engineering 120(2),1994*

[2] L. Farina and P.A. Martin, *Applied Ocean Research 20(3):121-134,1998*

[3] R. Gayen, *Applied Ocean Research 46:70–78,2014*