Singularidades 0-estáveis de germes de aplicações quase homogêneos de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^p, n \geq p$.

E. C. Rizziolli

Instituto de Geociências e Ciências Exatas-UNESP-Rio Claro-SP

2010 Mathematics Subject Classification: 14B05, 32S15

Resumo

Este trabalho, realizado em parceria com Prof.Dr Marcelo José Saia-ICMC-USP e Prof. Dr Aldício José Miranda-FAMAT-UFU, trata de calcular determinados números de singularidades 0-estáveis em termos de pesos e graus de um germe de aplicação quase homogêneo finitamente determinado e de coposto 1. Um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$, $f = (f_1, \ldots, f_p)$ é *quase homogêneo*, de tipo $(w_1, \ldots, w_n; d_1, \ldots, d_p)$ se existem inteiros positivos $w_1, \ldots, w_n$, denominados pesos, e interiros positivos $d_1, \ldots, d_p$, chamados graus, tais que $f_i(\lambda^{w_1} x_1, \ldots, \lambda^{w_n} x_n) = \lambda^{d_i} f_i$ para todo $i = 1, \ldots, p$, $x \in \mathbb{C}^n$ and $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dr acordo com [3], para germes de $\mathbb{C}^3$ em $\mathbb{C}^2$ o discriminante $\Delta(f)$ é uma curva em $\mathbb{C}^2$, cujos conjuntos de singularidades isoladas, as singularidades 0-estáveis, são compostos por dois tipos, a saber, pontos duplos e cúspides. Nestas dimensões, o conjunto dos pontos duplos é denotado por $A_{1,1}$ enquanto o conjunto de cúspides por A_2.

Tratando do discriminante de germes de $\mathbb{C}^4$ to $\mathbb{C}^3$, o discriminante de f é uma superfície em $\mathbb{C}^3$, as singularidades 0-estáveis que podem ocorrer são: rabo de andorinha, interseção do eixo cupidal com um plano e pontos triplos, os respectivos conjuntos destes tipos de singularidades são denotados, respectivamente por, A_3, $A_{2,1}$ e $A_{1,1,1}$. A figura a seguir mostra os modelos geométricos de tais tipos de singularidades.

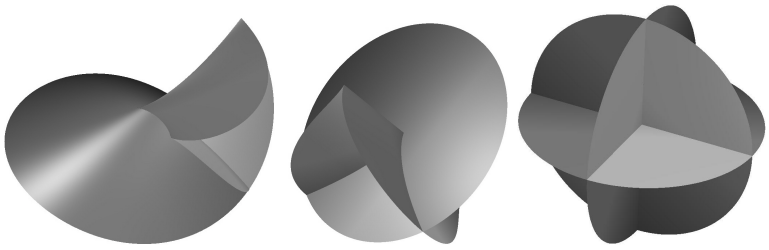

Figura 1: Modelos Geométricos: A_3, $A_{(2,1)}$ e $A_{(1,1,1)}$.

Em [2] exploramos a geometria destas dimensões para expressar o números de singularidades 0-estáveis em termos de pesos e graus via Módulos Sygyzies e obtemos as seguintes fórmulas para germes quase homogêneos de coposto 1:

1. Para $f : (\mathbb{C}^3, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$, $f(x, u, v) = (x, g(x, u, v))$, temos que o número de cúspides é dado por
$$\#A_2 = \frac{P_3 d^3 + P_2 d^2 + P_1 d + P_0}{\omega_1\omega_2\omega_3},$$
em que $P_3 = 2$, $P_2 = -4\omega_2 - 4\omega_3$, $P_1 = 2{\omega_2}^2 + 6\omega_2.\omega_3 + 2{\omega_3}^2$, $P_0 = -2{\omega_2}^2\omega_3 - 2\omega_2{\omega_3}^2$.

2. Se $f : (\mathbb{C}^4, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$, $f(x, y, u, v) = (x, y, g(x, y, u) + v^2))$ é uma suspensão então o número singularidade de tipo rabo de andorinha é dado
$$\#A_3 = \frac{d^3 - 6\omega_3 d^2 + 11{\omega_3}^2 d - 6{\omega_3}^3}{\omega_1\omega_2\omega_3}.$$

3. Se $f : (\mathbb{C}^4, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$, $f(x, y, u, v) = (x, y, g(x, y, u, v))$ não é uma suspensão, então o número singularidade de tipo rabo de andorinha é dado por,
$$\#A_3 = \frac{P_4 d^4 + P_3 d^3 + P_2 d^2 + P_1 d + P_0}{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4},$$
em que $P_4 = 16$, $P_3 = -3 - 55\omega_4 - 55\omega_3$, $P_2 = \frac{15}{2}\omega_3 + 63{\omega_3}^2 + 63{\omega_4}^2 + 139\omega_3\omega_4 + \frac{15}{2}\omega_4$,
$P_1 = -24{\omega_3}^3 - 108{\omega_3}^2\omega_4 - 24{\omega_4}^3 - 12\omega_3\omega_4 - 108\omega_3{\omega_4}^2 - \frac{9}{2}{\omega_3}^2 - \frac{9}{2}{\omega_4}^2$ e
$P_0 = 24{\omega_3}^3\omega_4 + 24\omega_3{\omega_4}^3 + 45{\omega_3}^2{\omega_4}^2 + \frac{9}{2}{\omega_3}^2\omega_4 + \frac{9}{2}\omega_3{\omega_4}^2$.

Observe que em todos os casos tratados tanto aqui quanto na literatura sobre este assunto, veja por exemplo [1], os germes de aplicação finitamente determinados quase homogêneos são de coposto 1. A próxima questão é como fazer esta análise para germes de coposto arbitrário.

Neste trabalho estudamos o par de dimensões $(4, 4)$ e estabelecemos uma fórmula para o número de singularidades 0-estáveis Σ^2 em termos de pesos e graus de um germe de aplicação finitamente determinado de coposto arbitrário. A saber,

Teorema 1. *Se $f : (\mathbb{C}^4, 0) \to (\mathbb{C}^4, 0)$ é uma germe de aplicação quase homogêneo de pesos r_1, r_2, r_3, r_4 e graus d_1, d_2, d_3, d_4), então o número de singularidades Σ^2- que aparecem numa perturbação estável de f é igual a*

$$\frac{\sum_{i<j} d_i r_i \cdot d_j r_j \cdot d_i r_j \cdot d_j r_i + \sum_{i<j<k} d_i r_i \cdot d_j r_j \cdot d_k r_k (d_i r_i \cdot d_j r_j \cdot d_k r_k + d_1 r_1 \cdot d_2 r_2 \cdot d_3 r_3 \cdot d_4 r_4}{r_1 r_2 r_3 r_4}.$$

em que o símbolo $d_s r_\ell$ denota o número $(d_s - r_\ell)$ para todo $1 \leq s, \ell \leq 4$.

Em particular note que

- Se *posto*$(f) = 1$, temos $d_1 r_1 = d_2 r_= d_3 r_3 = 0$, e consequentemente $c_{\mathbf{2}}(f) = 0$.

- Se $posto(f) = 2$, então $d_1r_1 = d_2r_2 = 0$, logo

$$c_{\mathbf{2}}(f) = \frac{d_3r_3d_4r_4d_3r_4d_4r_3}{r_1r_2r_3r_4}.$$

- Se $posto(f) = 1$, segue que $d_1r_1 = 0$, e assim $c_{\mathbf{2}}(f)$ é dado por

$$\frac{d_2r_2d_3r_3d_2r_3d_3r_2 + d_2r_2d_4r_4d_2r_4d_4r_2 + d_3r_3d_4r_4d_3r_4d_4r_3 + d_2r_2d_3r_3d_4r_4(d_2r_2 + d_3r_3 + d_4r_4)}{r_1r_2r_3r_4}.$$

Referências

[1] MARAR, W. L. ; MONTALDI, J. A. ; RUAS, M. A. S. . *Multiplicities Of Zero-Schemes In Quasihomogeneous Corank-1 Singularities C^N To C^N*. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, v. 263, p. 353-367, 1999.

[2] MIRANDA, A. J.; V.; RIZZIOLLI, E. C.; SAIA, M. J. . *Stable singularities of co-rank one quasi homogeneous map germs from $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ to $(\mathbb{C}^n, 0), n = 2, 3$.* JP Journal of Geometry and Topology, v. 13, p. 189-222, 2013.

[3] JORGE-PÉRES, V.; MIRANDA, A. J.; RIZZIOLLI, E. C.; SAIA, M. J. . *Geometry and equisingularity of finitely determined map germs from $\mathbb{C}^n$ to $\mathbb{C}^3$, $n > 2$*, Revista Matemática Complutense, v. 2, p. 439-454, 2016.