Polinômios

1. O gráfico mostra uma raiz múltipla de multiplicidade ímpar (porque o gráfico é tangente ao eixo, mas muda de sinal), uma simples e outra múltipla de multiplicidade par. Logo, o polinômio tem grau maior ou igual a 3 + 1 + 2 = 6.
A derivada do polinômio, porém, nos permite dizer que o grau é ainda maior. De fato, o gráfico nos informa que a derivada possui 8 raízes de multiplicidade ímpar (possivelmente simples) e uma de multiplicidade par (correspondente à raiz tripla). Logo, a derivada possui grau pelo menos igual a 8 + 2 = 10. Logo, o grau do polinômio original é maior ou igual a 11.

2.

a) Trata-se de encontrar as raízes de p(x) = 0, onde $p(x) = x^3 - a$. Como $p'(x) = 3x^2$, a iteração do método de Newton tem a forma:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - a}{3x_n^2} = \frac{2x_n^3 - a}{3x_n^2} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right)$$

b) $x_1 = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{2}{1}\right) = \frac{4}{3}$

$$x_2 = \frac{1}{3}\left(2 \times \frac{4}{3} + \frac{2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}\right) = \frac{4}{3} \approx 1{,}264$$

O valor de $\sqrt[3]{2}$, com três casas decimais, é 1,260.

3.

a) Ao se desenvolver os binômios, os termos em x^n se cancelam, dando origem a um polinômio de grau n-1. Logo, a equação tem n-1 raízes no total.
Considerando apenas raízes reais, temos os seguintes casos:

- n ímpar:

$(x+1)^n = (x-1)^n \Rightarrow x+1 = x-1$, o que é impossível. Logo, não há raízes reais quando n é ímpar

- n par:

$(x+1)^n = (x-1)^n \Rightarrow x+1 = \pm(x-1)^n \Rightarrow x+1 = -(x-1) \Rightarrow x = 0$. Logo, quando n é par há uma raiz real igual a 0.

b) Como x = 1 não é raiz da equação, ela é equivalente a

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n = 1 \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = \sqrt[n]{1} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Daí

$x = -\dfrac{1 + \cos(\frac{2k\pi}{n}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{2k\pi}{n})}{1 - \cos(\frac{2k\pi}{n}) - i\,\mathrm{sen}(\frac{2k\pi}{n})}$, com k =1, 2, ..., n. Note que o valor k =0 anula o denominador e não produz uma raiz.