

Soluções

Geometria Analítica

1.

a) Temos $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{MG}$. Logo, $A - G = 2(M - G)$ e, daí, $G = \frac{A + 2M}{3}$. Mas

$$M = \frac{B + C}{2}. \text{ Portanto, } G = \frac{A + B + C}{3}$$

b) A expressão obtida para G é simétrica em A, B e C. Portanto, os pontos que dividem cada mediana na razão 1:2 tem a mesma expressão. Logo, esses pontos coincidem, o que prova que as medianas se encontram no ponto que divide cada uma delas na razão 1:2.

2.

$$\frac{(x-3)^2 + y^2}{(x+3)^2 + y^2} = 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = 4x^2 + 24x + 36 + 4y^2 \Rightarrow$$
$$3x^2 + 3y^2 + 30x + 27 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 10x + 9 = 0 \Rightarrow (x+5)^2 + y^2 = 16$$

O lugar geométrico pedido é uma circunferência de centro $(-5, 0)$ e raio 4.

Para um valor genérico de k, o l.g. continua sendo uma circunferência, exceto quando $k = 1$, quando é uma reta (a mediatriz do segmento AB).

3.

A altura relativa a C é a reta de equação $x = 1$. Como $\overrightarrow{BC} = C - B = (-5, 5)$, a altura relativa a A tem equação $-5(x-0) + 5(y-0) = 0$, ou seja, $y = x$. A interseção das duas alturas é o ponto $(1, 1)$.