Polinômios — Soluções

1. O resto da divisão do polinômio $p(x)$ por $(x-1)(x-2)$ tem grau no máximo 1. Assim,

$$p(x) = (x-1)(x-2)q(x) + r(x),$$

com $r(x) = ax + b$ para a e b números reais a serem determinados.

Tomando $x = 1$ e depois $x = 2$ temos

$$p(1) = r(1) = \ \ a + b$$

$$p(2) = r(2) = 2a + b$$

Resolvendo esse sistema linear, obtemos

$$a = p(2) - p(1), \qquad b = p(1) - a = 2p(1) - p(2)$$

No caso geral, temos

$$p(\alpha) = \alpha a + b, \qquad p(\beta) = \beta a + b$$

donde

$$a = \frac{p(\alpha) - p(\beta)}{\alpha - \beta}, \qquad b = \frac{\alpha p(\beta) - \beta p(\alpha)}{\alpha - \beta}$$

2. O polinômio $q(x)$ tem que ter grau 2 e podemos escrever $q(x) = x^2 + ax + b$, com a e b números reais a serem determinados. Temos

$$q(x)^2 = x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2b)x^2 + 2abx + b^2$$

Para que $p(x) = q(x)^2$, temos que ter

$$2a = -10, \qquad a^2 + 2b = 37, \qquad 2ab = -60, \qquad b^2 = 36$$

donde

$$a = -5, \qquad b = 6$$

3. Temos

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} = \frac{\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \frac{5}{2}$$

Outra solução: a equação cujas raízes são $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}$ é $1 - 4x + 5x^2 - 2x^3$. Para essa equação, a soma das raízes é $\frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$.