Soluções do Wagner – 2ª feira

1) a) O plano perpendicular ao vetor $v = (1,\ 2,\ 3)$ tem equação $x + 2y + 3z = d$. Para que P pertença a esse plano deve-se ter $d = 3$.
A equação do plano é $x + 2y + 3z = 3$.

1) b) Os pontos de interseção deste plano com os eixos são $(3,\ 0,\ 0)$, $\left(0,\ \frac{3}{2},\ 0\right)$ e $(0,\ 0,\ 1)$. O volume do tetraedro que tem esses três vértices mais a origem é:
$V = \frac{1}{6}\cdot 3\cdot \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{4}$.

2) Qualquer plano pode ser representado por uma equação do tipo $Ax + By + Cz = 1$.
Como os três pontos devem pertencer a esse plano devemos ter:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 2A - B + C = 1 \\ -A + C = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{3}{4}$ e $C = \frac{5}{4}$. A equação do plano é:
$\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y + \frac{5}{4}z = 1$ ou $x + 3y + 5z = 4$.

3) Considere o cubo com os seguintes vértices e faça uma figura.
$A = (0, 0, 0)$
$B = (2, 0, 0)$
$C = (2, 2, 0)$
$D = (0, 2, 0)$
$E = (0, 0, 2)$
$F = (2, 0, 2)$
$G = (2, 2, 2)$
$H = (0, 2, 2)$

a) Sejam $\overrightarrow{AG} = (2,\ 2,\ 2)$ e $\overrightarrow{EC} = (2,\ 2,\ 0) - (0,\ 0,\ 2) = (2,\ 2, -2)$.
Como $\left|\overrightarrow{AG}\right| = \left|\overrightarrow{EC}\right| = 2\sqrt{3}$ o cosseno do ângulo θ entre essas diagunais é
$\cos\theta = \frac{2\cdot 2 + 2\cdot 2 + 2(-2)}{2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$.

b) Sendo $\overrightarrow{AG} = (2,\ 2,\ 2)$ e $\overrightarrow{BD} = (0,\ 2,\ 0) - (2,\ 0,\ 0) = (-2,\ 2,\ 0)$ temos que o produto interno desses vetores é: $2\cdot(-2) + 2\cdot 2 + 2\cdot 0 = 0$ o que mostra que essas retas são ortogonais.

c) O plano mediador do segmento AG passa pelo ponto (1, 1, 1), centro do cubo e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AG} = (2,\ 2,\ 2)$. A equação deste plano é $x + y + z = 3$.
Os pontos médios solicitados são:

$M = (2, 1, 0)$
$N = (1, 2, 0)$
$P = (0, 2, 1)$
$Q = (0, 1, 2)$
$R = (1, 0, 2)$
$S = (2, 0, 1)$

Todos esses pontos pertencem ao plano $x + y + z = 3$. A distância entre dois pontos consecutivos é $\sqrt{2}$ e a distância do centro do cubo a cada um deles é também igual a $\sqrt{2}$. Portanto, *MNPQRS* é um hexágono regular.