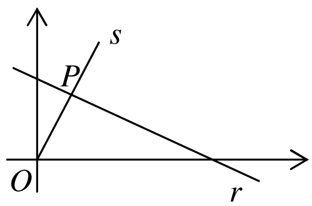
Soluções do Wagner – 3ª feira

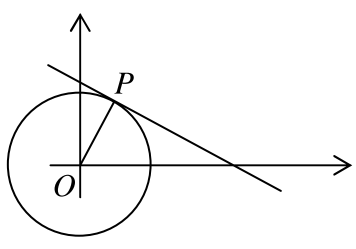
1) a) Naturalmente que uma solução algébrica é possível. Na solução analítica, seja r a reta $x + 3y = 5$ e seja s a reta $y = 3x$ que é perpendicular a r e passa na origem.



E expressão $E = x^2 + y^2$ representa o quadrado da distância do ponto (x, y) à origem e, para um ponto da reta r, o valor de E será mínimo no ponto P, interseção de r e s pois, neste lugar, ele estará o mais próximo possível da origem. Resolvendo o sistema formado pelas duas equações encontramos $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ e, para este ponto,

$E = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2}$.

1) b) Para cada valor de $E > 0$, $x + 2y = E$ representa uma reta perpendicular ao vetor $v = (1,2)$. Quanto mais afastada da origem, maior é o valor de E. Devemos buscar um ponto da circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{10}$ de forma que a reta que passa nesse ponto e é perpendicular ao vetor $v = (1,2)$, esteja o mais afastado possível da origem. Isto ocorre quando a distância da origem à reta $x + 2y = E$ for exatamente $OP = \sqrt{10}$ como na figura abaixo.

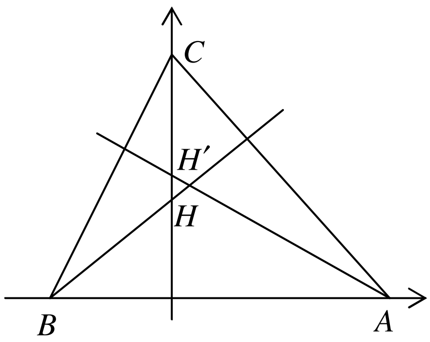


Portanto, o valor máximo de E é tal que $\frac{|0 + 2 \cdot 0 - E|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{10}$. Isto dá $E = 5\sqrt{2}$.

2) Considere o retângulo $ABCD$ cujos vértices são $A = (2, -1)$, $B = (2,\ 1)$, $C = (-2,\ 1)$ e $D = (-2, -1)$. O cosseno do ângulo θ entre os vetores $\overrightarrow{OA} = (2, -1)$ e $\overrightarrow{OB} = (2,\ 1)$ é:

$\cos\theta = \frac{2 \cdot 2 + 1(-1)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{5}$.

3) Considere o triângulo cujos vértices são $A=(a,\ 0)$, $B=(b,\ 0)$ e $C=(0,\ c)$. Suponha que as alturas a partir de *B* e *C* cortem o eixo *Y* em *H* e H', respectivamente.



A inclinação da reta *AC* é $m_{AC}=\dfrac{-c}{a}$ e a inclinação da reta *BC* é $m_{BC}=\dfrac{-c}{b}$.

A altura a partir de *B* tem equação $y=\dfrac{a}{c}(x-b)$.

A altura a partir de *C* tem equação $y=\dfrac{b}{c}(x-a)$.

Logo, $H=H'=\left(0,-\dfrac{ab}{c}\right)$.

4) Considere o triângulo equilátero com vértices $A=(1,\ 0)$, $B=(-1,\ 0)$ e $C=(0,\ \sqrt{3})$. A circunferência circunscrita ao triângulo tem centro $\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e raio $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

A equação desta circunferência é $(x-0)^2+\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$, que desenvolvida dá:

$3(x^2+y^2)=2\sqrt{3}y+3$.

Agora, basta fazer as contas:

$PA^2+PB^2+PC^2=$

$=(x-1)^2+(y-0)^2+(x+1)^2+(y-0)^2+(x-0)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=$

$x^2-2x+1+y^2+x^2+2x+1+y^2+x^2+y^2-2\sqrt{3}y+3=$

$3(x^2+y^2)-2\sqrt{3}y+1+1+3=2\sqrt{3}y+3-2\sqrt{3}y+1+1+3=8$