A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO
Volume 1

Soluções dos Exercícios do Capítulo 5

5.1. Menor do que o dobro, pois na segunda metade da corrida não foi cobrada a bandeirada. Algebricamente: se $f(x) = ax + b$ então $f(2x) = 2ax + b$ enquanto $2 \cdot f(x) = 2ax + 2b$.

5.2. Ao dizer que "a escala é linear", estamos afirmando que a deslocamentos iguais ao longo da linha correspondem acréscimos iguais nos números acima dessa linha. Se x é a distância de um ponto ao extremo esquerdo da linha e $f(x)$ é o número acima desse ponto, então $f(x) = ax + b$. Como $f(0) = 17$ e $f(8) = 59$, temos $b = 17$ e $8a + 17 = 59$, donde $a = 5,25$. Portanto $f(3) = 3 \times 5,25 + 17 = 32,75$.

5.3. Temos $N = aC + b$. Sabemos que $0 = 18a + b$ e $100 = 43a + b$. Logo $a = 4$ e $b = -72$. Segue-se que $N = 4C - 72$. Daí $C = 100 \Rightarrow N = 328$.

5.4. O volume $V(t)$ de água na caixa no instante t é $V(t) = 1000 - at$. Sabemos que $V(6) = 850$, logo $1000 - 6a = 850$ e daí $a = 25$. Portanto $1000 - 25t = 500 \Rightarrow t = 20$, ou seja, a água ficará pela metade após 20 horas, o que ocorrerá às 8 da manhã do dia seguinte.

5.5. Podemos imaginar que o garoto começou com um palito (vertical) e, para cada quadrado que armou, precisou de 3 palitos. Logo, para fazer n quadrados ele precisou de $3n+1$ palitos. Alternativa: ele usou 4 palitos para fazer o primeiro quadrado e mais 3 para fazer cada quadrado subseqüente. Assim, n quadrados requererão $4 + 3(n - 1) = 3n + 1$ palitos.

5.6. a) Um operário, trabalhando as mesmas 8 horas diárias, construiria o mesmo muro em $5 \times 3 = 15$ dias, logo 5 operários, em iguais condições, fariam o mesmo serviço em $15 \div 5 = 3$ dias. Se o muro tivesse 15 metros, esses mesmos 5 operários, nas mesmas condições, terminariam o trabalho em $(3/36) \times 15 = 5/4$ dias. Finalmente, esses 5 operários, trabalhando 6

horas por dia (em vez de 8) completariam o muro de 15 metros em $\frac{5}{4}\times\frac{8}{6}=\frac{5}{3}$ dias (1 dia e 4 horas).

b) As hipóteses utilizadas implicitamente acima foram de que o tempo necessário para fazer o muro é diretamente proporcional ao tamanho do mesmo e inversamente proporcional ao número de operários e ao número de horas diárias de trabalho.

c) $D = k\cdot\frac{C}{N\cdot H}$, onde k é a constante de proporcionalidade. Sabemos que, pondo $C=36$, $N=3$ e $H=8$, temos $D=5$. Então $5=k\cdot\frac{36}{3\cdot 8}$, donde $k=\frac{10}{3}$. Portanto, a fórmula procurada é $D=\frac{10}{3}\cdot\frac{C}{N\cdot H}$.

5.7. a) $F = k\cdot m_1 m_2/d^2$

b) $pv = c\cdot t$

c) $r = k\cdot \ell/s$

d) $\Delta\ell = k\cdot\ell\cdot\Delta t$

5.8. Temos $Y = k/X$, onde k é a constante de proporcionalidade. Seja $X' = \frac{125}{100}X = \frac{5}{4}X$. Então $Y' = \frac{k}{X'} = \frac{4}{5}\frac{k}{X} = \frac{4}{5}Y = 80\%$ de Y. Logo Y sofre um decréscimo percentual de 20%.

5.9. A função afim a que se refere o enunciado é $f(x) = a_1 + (n-1)r$, onde r é a razão da P.A., mas o exercício não precisa desta fórmula para ser resolvido. Basta saber que f existe.

a) Esse trapézio tem altura 1 e base média a_i, logo sua área é $1\cdot a_i = a_i$.

b) $a_1+\cdots+a_n$ é a área desse trapézio maior porque ele é a justaposição dos trapézios de altura 1 considerados no item anterior.

c) $\frac{a_1+a_n}{2}$ é a base média do trapézio maior porque

$$\frac{a_1+a_n}{2} = \frac{f(1)+f(n)}{2} = \frac{f(1-\frac{1}{2})+f(n+\frac{1}{2})}{2}$$

pois a função afim f tem a propriedade $f(x-h)+f(x'+h) = f(x)+f(x')$. Como a altura desse trapézio é $n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=n$, o resultado segue-se.

5.10. Seja d o número de degraus da escada, a qual sobe com a velocidade de s segundos para cada degrau. Ficando parada, a pessoa leva ds segundos para subir a escada. Logo, pelos dados do problema,

$$(d-5)s = 30 \quad \text{e} \quad (d-10)s = 20.$$

Assim $s = \frac{30}{d-5} = \frac{20}{d-10}$ e daí $30d - 300 = 20d - 100$ o que resulta em $d = 20$. A escada tem 20 degraus, gasta $s = 20/(d-10) = 20/10 = 2$ segundos para subir cada degrau. Logo, o tempo normalmente gasto no percurso é de $2 \times 20 = 40$ segundos.

5.11. Na 5ª loja, Augusto gastou metade do que tinha e ainda lhe sobraram 22 reais. Logo entrou na 5ª loja com 44 reais. Ao entrar na 4ª loja, ele tinha 88 reais; na 3ª tinha 176; na 2ª, 352; na 1ª 704. Augusto começou as compras com R$ 704,00. (Supondo um só estacionamento para todas as lojas. Caso pagasse o estacionamento após cada compra a resposta seria R$ 764,00.)

5.12.

5.13. $25 + x + x = 95$, $x = 35$, $25 + 35 = 60$. Com 60 anos .

5.14. A média antes da prova final é $(4 \cdot 2 + 6 \cdot 3)/5 = 5,2$. A nota n que ele precisa tirar satisfaz $(5,2 \cdot 3 + n \cdot 2)/5 \geq 5$. Daí, $n \geq 4,7$.

5.15. Sejam A, B e C respectivamente o número de reais que Arnaldo, Beatriz e Carlos possuiam. Foram feitas 3 transferências. Após a primeira, as quantias com que eles ficaram (sempre na ordem alfabética) foram $A - B - C$, $2B, 2C$. Após a segunda operação: $2A - 2B - 2C$, $2B - (A - B - C) - 2C, 4C$, ou seja: $2A - 2B - 2C$, $3B - A - C, 4C$. E, no final: $4A - 4B - 4C$, $6B - 2A - 2C$, $4C - (2A - 2B - 2C) - (3B - A - C)$, isto é: $4A - 4B - 4C$, $6B - 2A - 2C$ e $7C - A - B$. Agora é só resolver o sistema:

$$\begin{cases} 4A - 4B - 4C = 16 \\ -2A + 6B - 2C = 16 \\ -A - B + 7C = 16, \end{cases}$$

o que nos dá $A = 26$ reais, $B = 14$ reais e $C = 8$ reais.

Fazer também a solução via "trás-pra-diante", como no Exercício 5.11.

5.16. Sejam v a velocidade do carro que sai de A e w a velocidade do carro que sai de B (medidas em metros p/minuto). Após t minutos de viagem eles se encontram a 720m de A. Então $vt = 720$ e, chamando de d a distância entre A e B, temos (com o mesmo t) $wt = d - 720$.

Eliminando t, vem: $\frac{v}{w} = \frac{720}{d-720}$. Seja t' o tempo decorrido desde o início do percurso até o segundo encontro dos carros. Levando em conta os 10 minutos em que cada carro esteve parado, temos $v(t'-10) = d+400$ e $w(t'-10) = 2d-400$. Dividindo membro a membro estas duas igualdades resulta $\frac{v}{w} = \frac{d+400}{2d-400}$. Comparando, obtemos $\frac{720}{d-720} = \frac{d+400}{2d-400}$. Segue-se imediatamente que $d = 1760$.

5.17. Seja t minutos o tempo gasto pelo pedestre para ir de A a B. Até chegar a B, ele foi ultrapassado por 16 trens (contando com o último, que chegou junto com ele). Este último trem saiu de A $16 \times 3 = 48$ minutos após o pedestre, logo levou $t-48$ minutos para ir de A a B. Sejam v a velocidade do pedestre e w a dos trens. Então $w(t-48) = vt = 3km$.

Por outro lado, o primeiro trem que cruzou com o pedestre (na direção contrária) saiu de B $22 \times 3 = 66$ minutos antes do trem que estava saindo de B no momento em que chegava o pedestre. Logo, o tempo que aquele primeiro trem gastou para ir de B até A foi $66-t$ minutos. (Saiu há 66 minutos mas já chegou há t minutos.) Então $w(66-t) = vt = 3km$.

Assim, $t-48 = 66-t$, donde $t = 57$ minutos e $t-48 = 9$ minutos. Como $w(t-48) = 3k$, segue-se que $w = \frac{1}{3}\frac{km}{min} = 20km/h$. A velocidade dos trens é, portanto, $20km$ por hora. A velocidade do pedestre é $v = 3/t = \frac{3}{57}km$ por minuto, ou seja $\frac{180}{57}km/h = \frac{60}{19}\frac{km}{hora}$.

5.18. a) Desloque o gráfico uma unidade para baixo.

b) Idem uma unidade para a direita.

c) Imagem refletida do gráfico em torno do eixo Y.

d) Duas semi-retas com origem no ponto $(1,-2)$. Uma passa pelo ponto $(0,2)$ e a outra por $(2,0)$.

e) Duas semi-retas com origem no ponto $(\frac{1}{2},-1)$. Uma passa por $(0,1)$ e a outra por $(1,0)$.

f) Uma figura W, formada a partir do gráfico de f, refletindo a parte que tem $y<0$ em torno do eixo X.

g) A parte do gráfico que tem $x>0$ mais a reflexão dessa mesma parte em torno do eixo Y.

h) O gráfico de f, com a parte que tem $y<0$ substituída pelo intervalo $[\frac{1}{2},2]$ do eixo X.

5.19. a) $\emptyset$; b) $\mathbb{R}$; c) $x < 8/3$; d) $x > 1$; e) $x \in \{1, 3\}$; f) $-\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$; g) $x = \pm\frac{3}{2}$; h) $x \in [\frac{1}{2}, 1] \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$.

5.20. $x \in [0, 1) \cup (-\infty, -\frac{1}{2})$

5.21. $[8/3, +\infty)$

5.22. a) O ângulo reto com vértice no ponto $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ e lados passando pelos pontos $(-1, 0)$ e $(4, 0)$.

b)As semi-retas horizontais $S = \{(x, -2);\ x \leq -1\}$ e $S' = \{(x, 2);\ x \geq 1\}$, juntamente com o segmento de reta que liga os pontos $A = (-1, -2)$ a $B = (1, 2)$, os quais são as origens dessas semi-retas.

5.23. a) O quadrado cujos vértices são os pontos $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (-1, 0)$ e $D = (0, -1)$.

b) As duas retas $y = x + 1$ e $y = x - 1$.

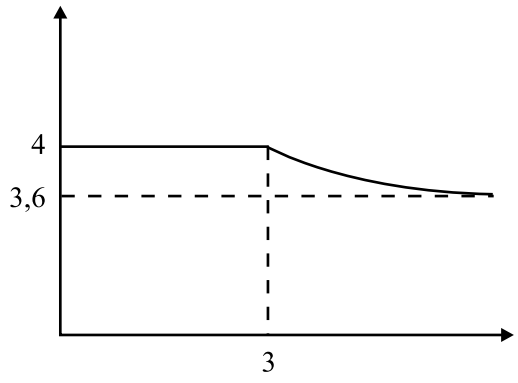
5.24. a) No intervalo $[0, 3)$, o gráfico coincide com o da função $y = 4x$. No intervalo $[3, +\infty)$, o gráfico é o da função $y = 3,6x$.

b) Se $f(x)$ é o preço de x quilos, pede-se o gráfico da função $m(x) = f(x)/x$. Para $0 \leq x < 3$, $m(x)$ é constante, igual a 4, e para $x \geq 3$, $m(x) = 3,6$.

c) Se $2,7 < x < 3$ então, pondo $x' = \frac{4}{3,6}x$, temos $x' > x$ e $f(x') = 3,6x'$ (pois $x' > 3$) portanto $f(x') = 4x = f(x)$.

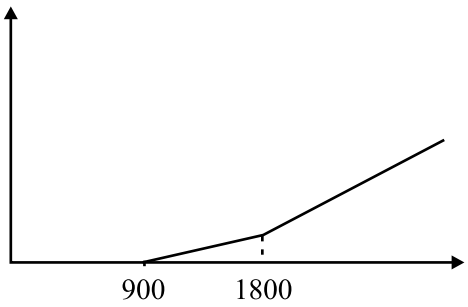
5.25. a) O consumidor paga 12 reais pelos três primeiros quilos e 3,6 reais por cada quilo a seguir. Se $f(x)$ é o preço de x quilos então $f(x) = 4x$ para $0 \leq x \leq 3$ e $f(x) = 12 + 3,6(x - 3)$ para $x > 3$.

b) $f(x)/x = 4$ para $0 < x \leq 3$ e $\frac{1,2+3,6x}{x} = 3,6 + \frac{1,2}{x}$ para $x > 3$.



c) $12 + 3,6(x - 3) = 15 \Rightarrow x = 3,83$ kg.

5.26. Se $f(x)$ é o imposto a pagar para uma base de cálculo de x reais temos $f(x) = 0$ se $0 \leq x \leq 900$, $f(x) = 0,15x - 135$ para $900 < x \leq 1800$ e $f(x) = 0,25x - 315$ para $x > 1800$.



5.27. a) As parcelas a deduzir são 0, 1320, $3207,6$ e $17468,1$.

b) $0,26 \cdot 5000 = 1300$.

c) Não.

d) Em cada faixa de renda, devemos ter $ax - p = b(x - q) = bx - bq$, para todo x. Ou seja: $b = a$ e $q = \frac{p}{a} \cdot$ Assim:

– Até 8800: $b = 0$, q arbitrário

– De 8800 a 17160: $b = 15\%$, $q = 8800$

– De 17160 a 158450: $b = 26\%$, $q = 12336,92$

– Mais de 158450: $b = 35\%$, $q = 49908,86$

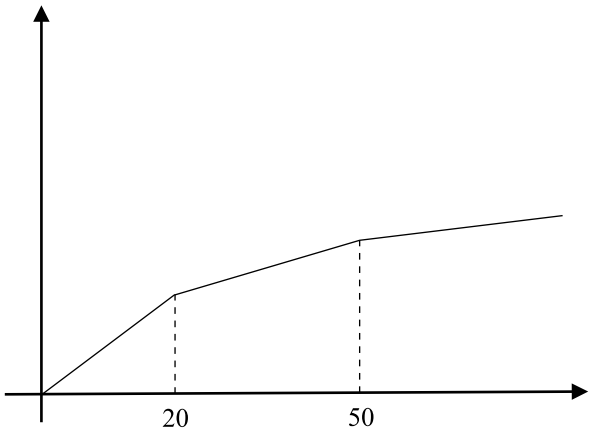
f) Inicialmente, calculamos o IR nos pontos de mudança de faixa:

Renda	I.R
8800	0
17160	1254,24
158450	37983,40

Logo, um IR igual a R$ 20.000,00 é pago na faixa de tributação de 17160 a 158450. A renda correspondente satisfaz $0,26x - 3207,60 = 20000$, ou seja, é igual a R$ 89.260,00.

5.28. a)

$$f(x) = \begin{cases} 0,10n, & \text{se } 1 \leq n \leq 19 \\ 0,08n, & \text{se } 20 \leq n \leq 49 \\ 0,06n, & \text{se } n \geq 50 \end{cases}$$



b) A distorção consiste no fato de que é mais barato fazer, por exemplo, 20 cópias (R$ 1,60) do que 19 cópias (R$ 1,90). Uma escala mais razoável seria:

– 0,10 por cópia, pelas primeiras 19 cópias

– 0,08 por cópia adicional, até 49 cópias

– 0,06 por cópia adicional, a partir da 50ª cópia

Nota: Estamos substituindo o exercício 5.29 por este outro, que aparecerá a partir da 9ª edição com o enunciado abaixo:

5.29. Resolva as seguintes equações:

a) $|x-2| = 2x-1$; b) $|3x-6| = x+3$; c) $|x-2| = x-3$.

5.29a) Procuremos, separadamente, as soluções $x \geq 2$ e as $x \leq 2$. Se $x \geq 2$ a equação dada é $x-2 = 2x-1$, logo $x = -1$. Portanto não há soluções $x \leq 2$. Se $x \leq 2$ então temos $2-x = 2x-1$, logo $x = 1$, que é menor do que 2. Portanto a solução é $x = 1$.

b) Novamente, separemos os casos. Se $3x-6 \geq 0$ (isto é, se $x \geq 2$) então a equação é $3x-6x+3$, donde $x = 4{,}5$, uma boa solução. Se $3x-6 \leq 0$

(ou seja, $x \leq 2$) então ficamos com $6-3x=3$, donde $x=3/4$, que também serve, pois $3/4<2$. Portanto a equação dada admite duas raízes: 4,5 e 3/4.

c) Se $x \geq 2$ então temos $x-2=x-3$, sem solução. Se $x \leq 2$, ficamos com $2-x=x-3$ e daí $x=2,5$, que é maior do que 2. Logo a equação dada não tem raízes.

5.30. a) Se $a \leq x \leq c$, $f(x)=\frac{\alpha}{2}[d-c-x+c+x-d]=0$.

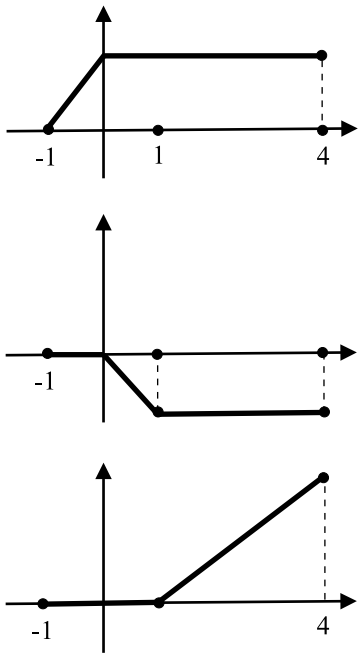
Se $c \leq x \leq d$, $f(x)=\frac{\alpha}{2}[d-c+x-c+x-d]=\alpha(x-c)$.

Como $f(d)=D$ temos $\alpha(d-c)=D$, ou seja, $\alpha=\frac{D}{d-c}$.

Se $d \leq x \leq b$, $f(x)=\frac{\alpha}{2}[d-c+x-c-x+d]=\alpha(d-c)=D$.

O segundo caso é análogo.

b) Se a função poligonal $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é afim em cada um dos intervalos $[t_{i-1},t_i]$, com $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$, afirmamos que $f=c+\varphi_1+\cdots+\varphi_n$, onde $c=f(a)$ e cada $\varphi_i\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é a função-rampa igual a zero no intervalo $[a,t_{i-1}]$ e igual a $f(t_i)-f(t_{i-1})$ no intervalo $[t_i,b]$. No caso da função f cujo gráfico é a Figura 24, temos $c=0$ e $f=\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3$, onde as funções-rampa φ_1, φ_2 φ_3 têm os seguintes gráficos:



c) A primeira observação resulta imediatamente dos itens a) e b). Quanto

à função f da Figura 24, o item a) nos diz que

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{1}{2}\,(1+|x+1|-|x|), \\ \varphi_2(x) &= -\frac{1}{2}\,(1+|x|-|x-1|) \\ \text{e}\quad \varphi_3(x) &= \frac{1}{2}\,(3+|x-1|-|x-4|). \end{aligned}$$

Portanto

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) = \frac{1}{2}\,(3 - 2|x| + 2|x-1| + |x+1| - |x-4|).$$

5.31. Seja $f(x) = \frac{r_b}{r_a}x + b_1 - \frac{r_b}{r_a}a_1$, sendo r_a e r_b as razões das progressões $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$, respectivamente. A função f é afim e $f(a_n) = \frac{r_b}{r_a}a_n + b_1 - \frac{r_b}{r_a}a_1 = \frac{r_b}{r_a}(a_n - a_1) + b_1 = \frac{r_b}{r_a}[(n-1)r_a] + b_1 = b_1 + (n-1)r_b = b_n$.

A unicidade é óbvia pois só existe uma função afim f tal que $f(a_1) = b_1$ e $f(a_2) = b_2$.

5.32. Para x quilômetros, A cobra $100+x$ reais e B cobra $200+0,8x$ reais. O preço de B será menor que o de A para $200 + 0,8x < 100 + x$, ou seja, para $x > 500$.

Para quilometragem superior a 500km, B é mais vantajosa.

Para quilometragem inferior a 500km, A é mais vantajosa.

5.33. A afirmação feita decorre do fato de que, para $n \in \mathbb{Z}$, tem-se $n \cdot x$ racional se, e somente se, x é racional. Evidentemente, a função f não é monótona.

5.34. Para todo $x \in \mathbb{R}$, como $\operatorname{sen}[2\pi(x+1)] = \operatorname{sen}(2\pi x)$, segue-se que $f(x+1) - f(x) = 7$, portanto a seqüência $f(x), f(x+1), \ldots, f(x+n), \ldots$ é uma progressão aritmética de razão 7. A maneira mais rápida de ver que f é crescente é usar o Cálculo Diferencial. A derivada de f é $f'(x) = 7 + 2\pi \cdot \cos(\pi x)$. Como $|2\pi \cdot \cos(\pi x)| \leq 2\pi < 7$, tem-se $f'(x) > 0$ para todo x, logo f é crescente.

A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO
Volume 1

Soluções dos Exercícios do Capítulo 6

6.1. a) Como (3,5) é o vértice, a equação pode ser escrita $y = a(x-3)^2+5$. Como (5,13) pertence à parábola, $13 = a(5-3)^2 + 5$ e $a = 2$. Portanto, $y = 2(x-3)^2 + 5 = 2x^2 - 12x + 23$. A resposta é $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$.

b) Adotando um novo sistema de coordenadas X, Y, com eixos nas retas do desenho, o vértice da parábola passa a ser o ponto $(0, -8)$ e o ponto $(2, 0)$ pertence à parábola. A equação pode ser escrita $Y = a(X-0)^2 - 8$. Como $(2, 0)$ pertence à parábola, $0 = a(2-0)^2 - 8$ e $a = 2$. Portanto, nesse sistema a equação é $Y = 2(X-0)^2 - 8 = 2X^2 - 8$.
No sistema de coordenadas do enunciado, a equação será da forma $y + k = 2(x+h)^2 - 8$. Como os pontos $(1, 0)$ e $(-2, 3)$ pertencem à parábola, temos $\begin{cases} 9 + k = 2(1+h)^2 - 8 \\ 3 + k = 2(-2+h)^2 - 8 \end{cases}$. Subtraindo as equações, obtemos $6 = 12h - 6$. Daí, $h = 1$ e, substituindo na primeira equação, $k = -9$. A equação da parábola é $y - 9 = 2(x+1)^2 - 8$, isto é, $y = 2x^2 + 4x + 3$. Observe que o vértice da parábola é o ponto $(-1, 1)$ e que a figura não tem as proporções corretas, pois o ponto $(1, 9)$ está duas unidades à direita do vértice a figura mostra esse ponto um pouco mais abaixo e à esquerda da sua posição correta. A resposta é $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$.

6.2. $a_1 < 0$, $a_2 > 0$ e $a_3 > 0$ pois a primeira está com a concavidade para baixo e as outras estão com a concavidade voltada para cima. $c_1 > 0$, $c_2 < 0$ e $c_3 > 0$, pois $c = f(0)$ e a primeira e a terceira parábolas cortam o eixo vertical em sua parte positiva e a segunda o faz na parte negativa. Como a abscissa do vértice é $-\frac{b}{2a}$, a e b têm sinais iguais quando a abscissa do vértice é negativa e têm sinais contrários quando a abscissa do vértice é positiva. Portanto a e b têm sinais contrários na primeira e na terceira parábolas e têm sinais iguais na segunda parábola. Logo, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ e $b_3 < 0$.

6.3. a) $f(x) = x^2 - 8x + 23 = x^2 - 8x + 16 + 7 = (x-4)^2 + 7$. Não há raízes reais, o eixo de simetria é a reta $x = 4$ e o valor mínimo é 7.

b) $f(x) = 8x - 2x^2 = -2(x^2 - 4x) = -2(x^2 - 4x + 4 - 4) = -2[(x-2)^2 - 4] = -2(x-2)^2 + 8$. O eixo de simetria é a reta $x = 2$, o valor máximo é 8 e as raízes são os valores para os quais $(x-2)^2 = 4$, ou seja, $x - 2 = \pm 2$. As raízes são $x_1 = 4$ e $x_2 = 0$.

6.4. Uma homotetia (semelhança) de razão k (e centro na origem) transforma o ponto (x, y) no ponto $(X, Y) = (kx, ky)$ e transforma a parábola $y = ax^2$ na parábola $\frac{Y}{k} = \left(\frac{X}{k}\right)^2$, ou seja, $Y = \frac{a}{k} X^2$. Portanto, as parábolas $y = ax^2$ e $y = a_1 x^2$ são semelhantes e a razão de semelhança é k tal que $a_i = \frac{a}{k}$, ou seja, $k = \frac{1}{a_1}\cdot$ Logo, as parábolas do problema são semelhantes entre si. Como qualquer parábola pode ter equação da forma $y = ax^2$, bastando par isso escolher convenientemente o sistema de eixos, concloui-se que quaisquer duas parábolas são semelhantes entre si.

6.5. Trace a bissetriz do primeiro quadrante. Isso pode ser feito porque não depende da escala dos eixos. O ponto de interseção (distinto da origem) da bissetriz com a parábola é $(0,5; 0,5)$. Dobre a abscissa desse ponto e você obterá a unidade procurada.

6.6. O vértice da parábola $y = x^2 - 4x + 3$ é $(2, -1)$, que corresponde ao ponto mais baixo do gráfico. É claro que quanto mais afastado do vértice estiver um ponto, mais alto ele estará.

Em [1,4], o mínimo ocorre em $x = 2$ e é igual a -1; o máximo ocorre em $x = 4$ e é igual a $4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 3$.

Em [6, 10], o mínimo ocorre em $x = 6$ e é igual a $6^2 - 4 \cdot 6 + 3 = 15$; o máximo ocorre em $x = 10$ e é igual a $10^2 - 4 \cdot 10 + 3 = 63$.

6.7. a) Provemos inicialmente que, se $x_1 \neq x_2$, então $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 < \frac{x_1^2+x_2^2}{2}\cdot$ Ora,

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 = \frac{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}{4} = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 > 0, \text{ se } x_1 \neq x_2\,.$$

Se $x_1 \neq x_2$ e $a > 0$ então

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) &= a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + b\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \\ &\quad + c < a\,\frac{x_1^2+x_2^2}{2} + b\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + c \\ &= \frac{(ax_1^2+bx_1+c)+(ax_2^2+bx_2+c)}{2} = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}. \end{aligned}$$

b) Provemos inicialmente que, se $x_1 \neq x_2$ e $0 < \alpha < 1$, então $[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2]^2 < \alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2$.
Ora, $\alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2 - [\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2]^2 = (\alpha-\alpha^2)x_1^2 - 2\alpha(1-\alpha)x_1x_2 + (\alpha-\alpha^2)x_2^2 = \alpha(1-\alpha)[x_1-x_2]^2 > 0$ se $x_1 \neq x_2$ e $0 < \alpha < 1$.
Se $x_1 \neq x_2$, $0 < \alpha < 1$ e $a > 0$, $f[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] = a[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2]^2 + b[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] + c < a[\alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2] + b[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] + c = \alpha a x_1^2 + \alpha b x_1 + \alpha c + (1-\alpha)x_2^2 + (1-\alpha)bx_2 + (1-\alpha)c = \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$.

6.8. Solução 1

Se $a = 2p+1$, $b = 2q+1$ e $c = 2r+1$ então $b^2 - 4ac = 4q(q+1) - 16pr - 8p - 8r - 3$. Observe que $q(q+1)$ é um produto de dois inteiros consecutivos e, de dois inteiros consecutivos, sempre um deles é par. Então $4q(q+1)$ é múltiplo de 8. Também é múltiplo de 8 o número $-16pr - 8p - 8r$. Logo, $b^2 = 4ac$ é 3 unidades menor que um múltiplo de 8, ou seja, é um número que dividido por 8 dá resto 5. Se um número dividido por 8 der resto 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, seu quadrado dividido por 8 dará resto 0, 1, 4, 1, 0, 1, 4, 1, respectivamente. Nenhum quadrado perfeito dá resto 5 quando dividido por 8. Logo, $b^2 - 4ac$ não é quadrado perfeito e as raízes não podem ser racionais.

Solução 2

Suponhamos que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ admita uma raiz racional. Seja $\frac{p}{q}$ a fração irredutível que é igual a essa raiz. Como $\frac{p}{q}$ satisfaz a equação, subsitutindo e simplificando obtemos $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$. Os números p e q não podem ser ambos pares, pois $\frac{p}{q}$ é irredutível. p e q não podem ser ambos ímpares, pois a soma de três números ímpares, $ap^2 + bpq + cq^2$, não pode ser igual a zero. Então um dos números p e q é par e o outro é ímpar. Nesse caso, duas das parcelas de $ap^2 + bpq + cq^2$ serão pares e a

outra será ímpar, o que fará com que a soma seja ímpar. Isso é absurdo pois $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$.

6.9. a) No início, quando o carretel da direita está vazio, uma volta é dada em pouco tempo; no final, quando grande parte da fita já está enrolada no carretel da direita, passa-se mais tempo durante uma volta do carretel.

b) A velocidade v de deslocamento da fita é constante.
Se a espessura da fita é c, os raios (médios) das voltas são r, $r+c$, $r+2c, \ldots$ e os comprimentos das voltas são $2\pi r$, $2\pi(r+c)$, $2\pi(r+2c), \ldots$ Os tempos gastos para enrolar essas voltas são $2\pi r/v$, $2\pi(r+c)/v$, $2\pi(r+2c)/v, \ldots$
O tempo total para enrolar as n primeiras voltas é

$$\begin{aligned} T(n) &= \frac{2\pi r}{v} + \frac{2\pi(r+c)}{v} + \frac{2\pi(r+2c)}{v} + \cdots + \frac{2\pi[r+(n-1)c]}{v} \\ &= \frac{2\pi r}{v}\, n + \frac{\pi c}{v}\, n(n-1) = \frac{\pi c}{v}\, n^2 + \frac{\pi(2r-c)}{v}\, n, \end{aligned}$$

que é da forma $T(n) = an^2 + bn$.

c) Se $T(n) = an^2 + bn$ e $T(100) = 555$, $T(200) = 1\,176$, $T(300) = 1\,863$ e $T(400) = 2\,616$, $G(n) = \frac{T(n)}{n} = an + b$ e $G(100) = 5,55$, $G(200) = 5,88$, $G(300) = 6,21$ e $G(400) = 6,54$.
Os pontos $(100; 5,55)$, $(200; 5,88)$, $(300; 6,21)$ e $(400; 6,54)$ são colineares. Eles pertencem à reta $v = 0,003\,3x + 5,22$. Então, $a = 0,0003\,3$ e $b = 5,22$. $G(n) = 0,003\,3n + 5,22$ e $T(n) = 0,0033n^2 + 5,22n$. É claro que houve um pouco de sorte neste exercício. Na vida real, dificilmente as leituras do contador em instantes prefixados seriam todas números inteiros: haveria erros de contagem de tempo, haveria erros de leitura do contador, inevitáveis no caso de leituras não-inteiras. Apesar de tudo, o modelo $G(n) = an + b$ é adequado se os pontos forem aproximadamente colineares.

d) $T(1750) = 19\,241,25$ e $G(1900) = 21\,831$. $T(1900) - T(1750) \cong 2\,590$. A resposta é $2\,590s$, ou seja, um pouco menos de 43min 10s.

6.10. a) $n+1$. Cada nova reta que se traça começa criando uma nova região e cria uma nova região após cada interseção com cada uma das n retas já traçadas.

b) $R_{n+1} = R_n + n + 1$. Como $R_{n+1} - R_n = n + 1$ forma uma progressão

aritmética, R_n é dado por uma função polinomial do segundo grau em n.

$$\begin{aligned} R_n &= (R_n - R_{n-1}) + (R_{n-1} - R_{m-2}) + \cdots + (R_3 - R_2) + (T_2 - R_1) + R_1 \\ &= n + (n-1) + \cdots + 3 + 2 + R_1 = \frac{(n+2)(n-1)}{2} + R_1 \\ &= \frac{n^2+n-2}{2} + 2 = \frac{n^2+n+2}{2}. \end{aligned}$$

6.11. Cada nova circunferência que se traça intersecta cada uma das circunferências já traçadas em 2 pontos e, após cada interseção com cada uma das n circunferências já traçadas, cria uma nova região. Logo, $R_{n+1} = R_n + 2n$. Daí,

$$\begin{aligned} R_1 &= (R_m - R_{n-1}) + (R_{n-1} - R_{n-2}) + \cdots + (R_3 - R_2) + (R_2 - R_1) + R_1 \\ &= 2(n-1) + 2(n-2) + \cdots + 4 + 2 + R_1 = \frac{[2(n-1)+2](n-1)}{2} + R_1 \\ &= n^2 - n + r_1 = n^2 - n + 2. \end{aligned}$$

6.12. Seja $f(t)$ a posição, em metros, no instante t segundos.
Temos $f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$. Como $f(0) = 17$, $f(10) = 45$ e $f(20) = 81$, obtemos o sistema $\begin{cases} c = 17 \\ 50a + 10b + c = 45 \\ 200a + 20b + c = 81 \end{cases}$. Substituindo $c = 17$, obtemos $\begin{cases} 50a + 20b = 28 \\ 200a + 20b = 64 \end{cases}$. Subtraindo da segunda equação o quádruplo da primeira, obtemos $-20b = -48$, $b = 2,4$.
Substituindo, resulta $a = 0,08$. Temos $f(t) = 0,04t^2 + 2,4t + 17$.
Daí, $f(5) = 30$, $f(15) = 62$ e $f(25) = 102$.

6.13. Se $f(t)$ é a posição no instante t, temos $f(0) = 0$, $f(1) = 30$, $f(2) = 55$, $f(3) = 75$. Se a força for constante, $f(t) = at^2 + bt + c$.

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 30 \\ 4a + 2b + c = 55 \\ 9a + 3b + c = 75 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 0 \\ a + b = 30 \\ 4a + 2b = 55 \\ 9a + 3b = 75 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 0 \\ 1 + b = 30 \\ 2a = -5 \\ 6a = -15 \end{cases}$$

$a = 2,5 \quad b = 32,5 \quad c = 0.$

a) Como o sistema tem solução, os dados são compatíveis com a hipótese da força constante.

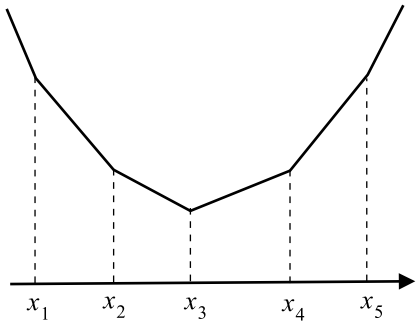
b) $f(t) = -2,5t^2 + 32,5t$. Daí, $f(5) = -2,5 \cdot 25 + 32,5 \cdot 5 = 100$. Está a 100m do ponto onde começou a frenagem.

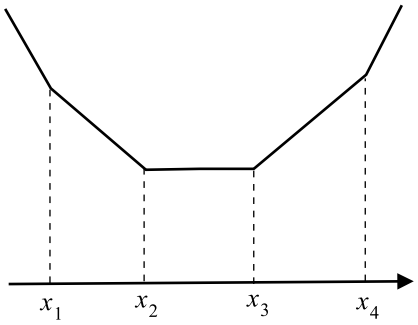
c) A velocidade é $f(t) = 2at + b = -5t + 32,5$. A velocidade é nula quando $t = 6,5$. O veículo demora 6,5 segundos para chegar ao repouso.

d) $f(0) = 32,5$ m/s.

6.14. a) $(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \cdots + (x - x_n)^2 = nx^2 - 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)x + (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$ é mínimo para $x = -\frac{b}{2a} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

b) Suponhamos que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. A função $f(x) = |x - x_1| + |x - x_2| + \cdots + |x - x_n|$ é uma função poligonal, cujo gráfico é formado por segmentos de reta tais que dois segmentos consecutivos tem um vértice em comum. Para $x \leq x_1$, todos os valores absolutos são iguais a $(x_i - x)$; portanto, a inclinação do gráfico é igual a $-n$, para $x \leq x_1$. Para $x_1 \leq x \leq x_2$, o primeiro valor absoluto é igual a $|x_1 - x|$, sendo os demais iguais a $|x - x|$, para $i = 2, \ldots, n$. Logo, a inclinação é igual a $-n + 2$, neste intervalo. Quando n é ímpar, a inclinação troca de sinal (pasando de -1 para 1) no ponto mediano $x_{(n+1)/2}$; logo, a função assume seu valor mínimo neste ponto. Quando n é par, a inclinação é nula no intervalo $[x_{n/2} x_{(n/2)+1}]$; logo, $f(x)$ é mínimo em cada ponto deste intervalo. Os gráficos abaixo ilustram estas duas situações.





6.15. a) Se os lados são x e y (medidos em centímetros), temos, pela semelhança dos triângulos brancos, $\frac{60-y}{x} = \frac{y}{80-x}$. Daí, $3x + 4y = 240$ e $y = 60 - \frac{3}{4}x$. A área é $xy = x\big(60 - \frac{3}{4}x\big) = -\frac{3}{4}x^2 + 60x$ e é máxima para

$x = -\frac{b}{2a} = 40$. Nesse caso, $y = 30$. O retângulo da maior área tem lados iguais a 40cm e 30cm e área igual a 1200 cm^2.

b) Na segunda figura, seja x o lado do retângulo apoiado na hipotenusa e y o outro lado. A altura do triângulo retângulo é $h = \frac{bc}{a} = \frac{60\times 80}{100} = 48$cm. Usando semelhança de triângulos, temos $\frac{x}{100} = \frac{48-y}{48}\cdot$ Daí, $y = \frac{48(100-x)}{100}\cdot$ A área do retângulo é $xy = \frac{48x(100-x)}{100}$, cujo valor máximo ocorre para $x = 50$ cm, com área igual a 1200 cm^2.

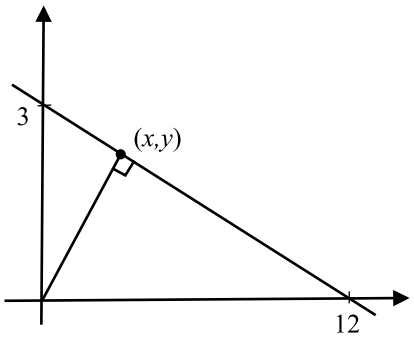
A conclusão é que os dois modos de apoiar o retânguo sobre um dos lados do triângulo conduzem a triângulos com a mesma área máxima (igual à metade da área do triângulo). É possível demonstrar que, caso o retângulo não se apóie sobre um dos lados, sua área será menor que esta metade. Assim, para obter retângulos de área máxima é realmente necessário apoiar um de seus lados sobre o contorno do triângulo.

6.16. Se os lados são x e y, temos $2x + y = 80$, $y = 80 - 2x$. A área é $xy = x(80 - 2x) = -2x^2 + 80x$ e deve ser máxima. Devemos ter $x = -\frac{b}{2a} = 20$. Daí, $y = 80 - 2 \cdot 20 = 40$. A cerca deve ter os lados perpendiculares ao rio medindo 20 metros e o lado paralelo ao rio medindo 40 metros.

6.17. No instante t, Q está em $(0, t)$ e P está em $(2t - 2, 0)$. A distância PQ satisfaz $PQ^2 = (2t - 2)^2 + t^2 = 5t^2 - 8t + 4$. PQ será mínima quando $(PQ)^2$ o for. Isso ocorre no instante $t = -\frac{b}{2a} = 0,8$. Para $t = 0,8$ temos $PQ^2 = 0,8$ e $PQ = \sqrt{0,8} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot$.

6.18. $z = x^2 + y^2 = x^2 + \left(\frac{12-3x}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}\,x^2 - \frac{9}{2}\,x + 9$ será mínimo para $x = -\frac{b}{2a} = 1,44$. Neste caso, $y = 1,92$. O valor mínimo procurado é $1,44^2 + 1,92^2 = 5,76$.

Outro modo:

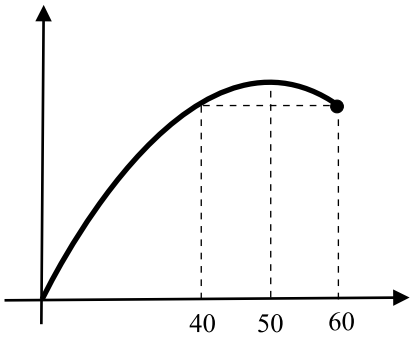


Se $x + 4y = 12$, o ponto (x, y) pertence à reta desenhada. $x^2 + y^2$ é o quadrado da distância do ponto (x, y) à origem. $x^2 + y^2$ será mínimo quando o ponto (x, y) for o ponto da reta situado mais próximo da origem, isto é, quando o ponto (x, y) for o pé da perpendicular baixada da origem à reta. Nesse caso, o valor mínimo de $x^2 + y^2$ será o quadrado da altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo formado pela reta com os eixos coordenados. Os catetos são 3 e 4, a hipotenusa é 5 e a altura h satisfaz $ah = bc$, $5h = 3x4 = 12$. $h = 2,4$ e a resposta é $h^2 = 5,76$.

6.19. Se x passageiros ocupam os lugares, a receita da empresa é $800x + 10(100-x)x = -10x^2 + 1\,800x$. A receita será máxima para $x = -\frac{b}{2a} = 90$.

6.20. Reduzindo t reais no preço da caixa, ele venderá $300 + 40t$ caixas a $20-t$ reais cada, arrecadando $R = (300+40t)(20-t) = -40t^2+500t+6000$. A receita será máxima se $t = -\frac{b}{2a} = 6,25$. O preço deve ser $20 - 6,25 = 13,75$ reais para que a receita seja máxima.

6.21. Se o preço unitário é p, quem compra x balas paga, sem desconto, px. Com desconto, o preço pago é $px\big(1 - \frac{x}{100}\big) = px - \frac{p}{100}\,x^2$.
O gráfico do preço pago em função de x é um arco de parábola.

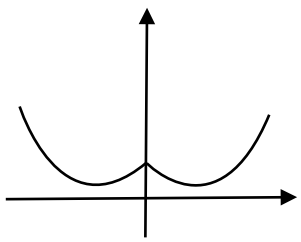


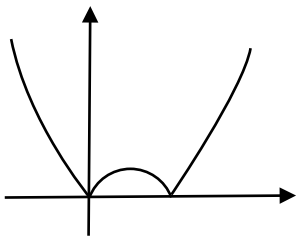
Todos os que compraram entre 40 (inclusive) e 50 balas poderiam obter mais balas pelo mesmo preço. A resposta é Daniel.

6.22. Reduzindo t reais, são vendidos $300+100t$ ingressos a $9-t$ reais cada e a receita é de $(300 + 100t)(9 - t) = 100(-t^2 + 6t + 27)$ reais. A receita será máxima para $t = -\frac{b}{2a} = 3$. O preço deve ser 6 reais.

6.23. O vértice da parábola $y = 21x - x^2$, que é o ponto mais alto do gráfico, é um ponto de abscissa $x = -\frac{b}{2a} = 10,5$. Quanto mais perto do vértice estiver o ponto, mais alto estará. Como n deve ser inteiro, os pontos de abscissa inteira que estão mais próximos do vértice são $n = 10$ e $n = 11$. Em ambos, o valor de $21n - n^2$ é 110.

6.24.





6.25. a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ equivale a $x = 2$ ou $x = 3$. O conjunto é formado pelos pontos de duas retas verticais.

b) Parábola.

6.26. Fazendo $x^2 = y$, obtemos $y^2 + y - 20 > 0$. Daí, $y < -5$ ou $y > 4$, isto é, $x^2 < -5$ ou $x^2 > 4$. A primeira alternativa é absurda. Logo, $x^2 > 4$, $x^2 - 4 > 0$. A resposta é $x < -2$ ou $x > 2$.

6.27. $\begin{cases} c = f(0) \\ a + b + c = f(1) \\ 4a + 2b + c = f(2) \end{cases}$; $\begin{cases} c = f(0) \\ a + b = f(1) - f(0) \\ 4a + 2b = f(2) - f(0) \end{cases}$;

$$\begin{cases} c = f(0) \\ a + b = f(1) - f(0) \\ 2a = f(2) - 2f(1) + f(0) \end{cases}$$

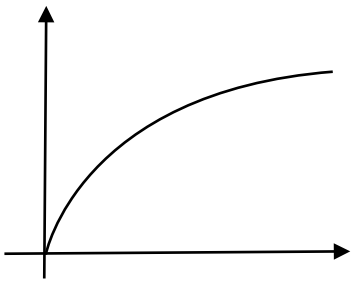
Daí, $a = \frac{f(2)-2f(1)+f(0)}{2}$, $b = \frac{-3f(0)+4f(1)-f(2)}{2}$, $c = f(0)$.

6.28. Se o quilo custar $12+t$ reais, serão vendidos $10-5t$ quilos e a receita será $(12 + t)(100 - 5t) = -5t^2 + 40t + 1\,200$ reais. A receita será máxima para $t = -\frac{b}{2a} = 4$. O preço deve ser 16 reais.

6.29. Se os lados são $3t$ e $4t$, o imposto é $7 \cdot 3t \cdot 4t + 2\,500 - 60 \cdot 14t = 84t^2 - 840t + 2\,500$ e será mínimo para $t = -\frac{b}{2a} = 5$. Os lados devem medir 15 e 12 metros. O imposto de $84 \cdot 5^2 - 840 \cdot 5 + 2\,500 = 400$ reais.
Se o lado maior do retângulo é $x = 4t$, o imposto é $y = 84t^2 - 840t + 2\,500 = 5.35x^2 - 210x + 2\,500$.

6.30. Uma forma de resolver o problema é designar por x um dos lados do retângulo, cujo perímetro é expresso, então, pela função $f(x) = 2\big(x + \frac{a}{x}\big)$. Normalmente, o valor mínimo de f é obtido através do uso de Cálculo, assunto normalmente não conhecido pelos alunos do Ensino Médio. Alternativamente, designemos por $2p$ o perímetro. Os valores possíveis de $2p$ são aqueles para os quais o sistema $\begin{cases} x + y = p \\ xy = a \end{cases}$ tem solução ou, equivalentemente, a equação $x(p - x) = a$ (ou seja, $x^2 - px + a = 0$) tem solução. Deve-se ter, portanto, $p^2 - 4a \geq 0$, isto é, $p \geq 2\sqrt{a}$. Logo, o valor mínimo do perímetro é $4\sqrt{a}$.

6.31. $y = \sqrt{x}$ se e somente se $y^2 = x$ e $y \geq 0$. Logo, o gráfico de $y = \sqrt{x}$ é formado pelos pontos da parábola $y^2 = x$ situados acima do eixo dos x ou sobre ele.



6.32. Chamando $\sqrt{x}$ de y, obtemos a equação de segundo grau $y + m = y^2$, ou seja, $y^2 - y - m = 0$.
Essa equação em y terá dus raízes reais diferentes quando seu discriminante $\Delta = 1 + 4m$ for positivo, ou seja, quando $m > -\frac{1}{4}\cdot$ Cada raiz em y que seja maior que ou igual a zero dará uma raiz para a equação em x e cada raiz negativa da equação em y não dará raiz para a equação em x.
O produto das raízes da equação em y é igual a $-m$ e a soma das raízes da equação em y é igual a 1. Portanto:

i) $m > 0$. A equação em y tem duas raízes de sinais contrários.

ii) $m = 0$. A equação em y tem uma raiz nula e uma raiz positiva.

iii) $-\frac{1}{4} < m < 0$. A equação em y tem duas raízes positivas distintas.

iv) $m = -\frac{1}{4}\cdot$ A equação em y tem duas raízes positivas iguais.

v) $m < -\frac{1}{4}\cdot$ A equação em y não tem raiz real.

Logo:

a) $m > 0$. A equação em x tem uma única raiz.

b) $-\frac{1}{4} < m \leq 0$. A equação em x tem duas raízes.

c) $m = -\frac{1}{4}\cdot$ A equação em x tem uma única raiz.

d) $m < -\frac{1}{4}\cdot$ A equação em x não tem raiz real.

6.33. Se d é o diâmetro, o perímetro é πd e a área é $\frac{\pi d^2}{4}\cdot$ O preço de A é $\alpha = 5\pi d^2 + 15\pi d + 200$ e o preço de B é $\beta = 4,5\pi d^2 + 20\pi d + 600$, sendo $d > 0$. A é mais vantajosa quando $\beta - \alpha = -0,5\pi d^2 + 5\pi d + 400 > 0$. Este trinômio tem duas raízes de sinais contrários; d deve estar compreendido entre elas e ser positivo. Logo, devemos ter $0 < d < 5 + \sqrt{25 + \frac{800}{\pi}} \cong 21,72$ metros.
Na outra situação, $\alpha = 4,5\pi d^2 + 20\pi d + 400$ e $\beta = 5\pi d^2 + 10\pi d + 150$. A é mais vantajosa quando $\beta - \alpha = 0,5\pi d^2 - 10\pi d - 250 > 0$. Este trinômo tem duas raízes de sinais contrários; d deve ser exterior ao intervalo das raízes e ser positivo, isto é, $d > 10 + \sqrt{100 + \frac{500}{\pi}} \cong 26,10$ metros.

6.34. $S = ax + by + ax + \frac{bc}{x}\cdot$ Os valores de S são positivos quando $x > 0$ e negativos quando $x < 0$. Temos $ax^2 - Sx + bc = 0$. O discriminante deve ser maior que ou igual a 0. Portanto, $S^2 - 4abc \geq 0$. Daí, $S \geq 2\sqrt{abc}$ ou $S \leq -2\sqrt{abc}$. Para $x > 0$, o menor valor de S é $2\sqrt{abc}$.

6.35. Sejam 1, c, h as dimensões, em metros, do buraco. Devemos ter $1 \cdot c \cdot h = 300$. O custo é $y = 10c + 30h = 10c + \frac{9\,000}{c}\cdot$ Como $c > 0$, temos $y > 0$. Temos $10c^2 - yc + 9 = 9\,000 = 0$. O discriminante deve ser maior que ou igual a 0. Portanto, $y^2 - 360\,000 \geq 0$ e, como $y > 0$, $y \geq 600$. O

custo mínimo é 600 reais. Se $y = 600$, $10c^2 - 600c + 9\,000 = 0$ e $c = 30$ metros. Se $c = 30$, $h = 10$ metros.

6.36. Um espresário entrou com o capital x e trabalhou 2 dias por semana; o outro investiu $100 - x$ e trabalhou dois dias em cada semana. Seus lucros foram respectivamente $99 - x$ e $99 - (100 - x) = x - 1$. O lucro de cada um por dia de serviço é $(99 - x)/2$ e $(x - 1)/3$. Cada real aplicado rendeu, por dia de serviço, o lucro

$$\frac{99 - x}{2x} = \frac{x - 1}{3(100 - x)},$$

a igualdade traduzindo a equitatividade da sociedade. Simplificando, chegamos à equação $x^2 - 595x + 29.700 = 0$, cujas raízes são 55 e 540. Como $540 > 100$, o valor de x que responde a questão é $x = 55$. Portanto um sócio entrou com 55 mil reais e outro com 45 mil.

Observações: 1. Se chamarmos de x o capital investido pelo sócio que trabalhou 3 dias por semana, teremos

$$\frac{99 - x}{3x} = \frac{x - 1}{2(100 - x)},$$

o que levará à equação $x^2 + 395x - 19.800 = 0$, cujas raízes são 45 e -440. Como o problema não comporta resposta negativa, devemos ter $x = 45$ e o outro sócio entrou com $100 - x = 55$ mil reais.

2. A primeira solução é, do ponto de vista didático, preferível porque mostra que às vezes a raiz que não serve pode também ser positiva.

3. Ao resolver este problema deve-se ter o cuidado de observar que 99 mil reais não é o lucro de cada empresário e sim a soma do capital que ele investiu mais o lucro.

6.37. Se a velocidade da corrente é v, os tempos gastos são $\frac{12}{12+v}$ horas e $\frac{8}{12-v}$ horas. $\frac{12}{12+v} + \frac{8}{12-v} = 2$; $\frac{240-4v}{144-v^2} = 2$; $120 - 2v = 144 - v^2$; $v^2 - 2v - 24 = 0$. A única raiz positiva é 6. A velocidade da corrente é 6km/h e os tempos são 12/18 h = 2/3 h = 40 min (a favor da corrente) e 1h20min (contra a corrente).

6.38. Com x alunos, a parte de cada um seria $405/x$ reais. Com $x - 2$ alunos, cada um daria $405/(x-2)$ reais. Então $\frac{405}{x-2} = \frac{405}{x} + 1,2$. Eliminando

denominadores e simplificando: $x^2 - 2x - 675 = 0$. A única raiz positiva desta equação é 27. Logo a turma tinha 27 alunos.

6.39. a) Se f é quadrática, $f(x) = ax^2 + fx + c$, com $a \neq 0$, e $\varphi(x) = f(x+h) - f(x) = a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c) = 2ahx + ah^2 + bh$ é afim e não-constante, qualquer que seja $h \neq 0$.

b) Suponhamos, para $h \neq 0$ fixado, $\varphi(x) = f(x+h) - f(x) = px + q$, com $p \neq 0$.

Seja $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ uma progressão aritmética não-constante, de razão r.

Afirmamos que $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ é uma progresão aritmética de segunda ordem não-degenerada. Com efeito, $f(x_{n+1}) - f(x_n) = f(x_n + r) - f(x_n) = px_n + q = y_n$ é uma progressão aritmética não-constante, pois $y_{n+1} - y_n = px_{n+1} + q - (px_n + q) = p(x_{n+1} - x_n) = pr$ é constante e diferente de zero. Logo, pelo Teorema de Caracterização, f é quadrática.