A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO

Volume 1

Soluções dos Exercícios do Capítulo 2

2.1. Seja $X = \{n \in \mathbb{N};\ a + n \in Y\}$. Como $a \in Y$, segue-se que $a + 1 \in Y$, portanto $1 \in X$. Além disso $n \in X \Rightarrow a + n \in Y \Rightarrow (a + n) + 1 \in Y \Rightarrow n+1 \in X$. Logo $X = \mathbb{N}$. Assim, Y contém todos os números naturais $\geq a$.

2.2. Seja $Y = \{n \in \mathbb{N};\ 2n + 1 < 2^n\}$. Temos $3 \in Y$. Além disso, $n \in Y \Rightarrow 2n + 1 < 2^n \Rightarrow 2(n + 1) + 1 = 2n + 1 + 2 < 2^n + 2^n = 2^{n+1} \Rightarrow n + 1 \in Y$. Portanto Y contém todos os números naturais ≥ 3, ou seja, $n \geq 3 \Rightarrow 2n + 1 < 2^n$. Em seguida, seja $Z = \{n \in \mathbb{N}, n^2 < 2^n\}$. Temos $5 \in Z$ e, além disso,

$$n \in Z \Rightarrow n^2 < 2^n \Rightarrow (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < 2^n + 2^n = 2^{n+1} \Rightarrow n + 1 \in Z$$

2.3. Seja $A \subset \mathbb{N}$ um conjunto que não possui um menor elemento. Considere o conjunto X, formado pelos números naturais n tais que $1, 2, \ldots, n$ não pertencem a A. Então $1 \in X$ pois do contrário pertenceria a A e seria, portanto, o menor elemento de A. Em seguida mostraremos que $n \in X \Rightarrow n + 1 \in X$. Com efeito, $n \in X \Rightarrow 1, 2 \ldots, n$ não pertencem a A. Se fosse $n + 1 \in A$ então $n + 1$ seria o menor elemento de A, o que não é possível. Logo $1, 2, \ldots, n$, $n + 1$ não pertencem a A, isto é, $n + 1 \in X$. Assim $X = \mathbb{N}$, isto é, $A = \emptyset$.

2.4. Sabemos que $(\frac{2+1}{2})^2 < 2$. Ignorando isto, mostremos que $(\frac{n+1}{n})^n < n$ para $n \geq 3$. É claro que $(4/3)^3 = 64/27 < 3$. Agora, indução:

$$\begin{aligned}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n \Rightarrow \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} &= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\ &< \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right) < \frac{n(n+2)}{n+1} < \frac{n(n+1)}{n} \\ &= n + 1. \qquad \textit{C.Q.D.}\end{aligned}$$

Escrevendo $(\frac{n+1}{n})^n < n$ sob a forma $(n+1)^n < n^{n+1}$ vemos que $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$ para $n \geq 3$. Logo $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \ldots$ é decrescente a partir do 3º termo.

2.5. A igualdade indicada é obviamente verdadeira para $n = 1$. Supondo-a válida para um certo n temos

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Para provar a implicação $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, basta verificar que

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = (n+1)^2,$$

o que é imediato

2.6. O problema resulta do fato de que o "conjunto" dos números naturais pequenos não está bem definido. O "conjunto" dos números pequenos é limitado? Se é, (como deveria) então qual é o maior número pequeno?

2.7. Por um lado (distributividade à direita), $(m+n)(1+1) = m+n+m+n$.

Por outro lado (distributividade à esquerda, depois à direita), $(m+n)(1+1) = m(1+1) + n(1+1) = m + m + n + n$.

Logo $m + n + m + n = m + m + n + n$.

Pela lei do corte (aplicada duas vezes) $n + m = m + n$.

2.8. Suponha que seja $X \neq \mathbb{N}$. Seja a o menor elemento do conjunto não-vazio $A = \mathbb{N} - X$. Então todos os números naturais menores do que a pertencem a X. Pela hipótese, segue-se que $a \in X$. Contradição. Logo $A = \emptyset$ e $X = \mathbb{N}$.

2.9. Suponha que o conjunto A dos números naturais n para os quais $P(n)$ é falsa seja não-vazio. Então $1 < a$, $2 < a$ e, além disso $P(a-2)$ e $P(a-1)$ são verdadeiras. Segue-se da hipótese (enunciado) que $P(a)$ é verdadeira. Contradição. Logo $A = \emptyset$ e $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.10. Certamente $1^3 = \frac{1}{4}1^2(1+1)^2$. Suponha, por indução, que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

Para provar que se tem

$$1^3 + 2^3 + 3^2 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2 \cdot (n+2)^2,$$

basta verificar que

$$\frac{1}{4}(n+1)^2 \cdot (n+2)^2 - \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = (n+1)^3$$

ou seja, que

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}[(n^2+2n+1)(n^2+4n+4)] - \frac{1}{4}[n^2 \cdot (n^2+2n+1)] &= (n+1)^3\\ \frac{1}{4}[\cancel{n}^4 + \cancel{6}n^3 + \cancel{1}3n^2 + 12n + 4 - \cancel{n}^4 - 2\cancel{n}^3 - \cancel{n}^2] &= (n+1)^3,\\ \frac{1}{4}[4n^3 + 12n^2 + 12n + 4] &= (n+1)^3,\\ n^3 + 3n^2 + 3n + 1 &= (n+1)^3.\end{aligned}$$

Observação: A igualdade $1^3 + 2^3 + \cdots n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ pode também ser escrita sob a forma

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$

Desta maneira, a indução fica mais fácil.

A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO
Volume 1

Soluções dos Exercícios do Capítulo 3

3.1. a) $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A)) \therefore A \subset f^{-1}f(A)$

b) $y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow y = f(x)$, $x \in f^{-1}(B) \Rightarrow y = f(x)$, $f(x) \in B \Rightarrow y \in B \therefore f(f^{-1}(B)) \subset B$.

c) Seja f injetiva. Se $x \in f^{-1}(f(A))$ então $f(x) \in f(A)$, isto é, tem-se $f(x) = f(a)$ para algum $a \in A$, logo $x = a$ e $x \in A$. Assim, $f^{-1}(f(A)) \subset A$ e daí (vide a)) $f^{-1}(f(A)) = A$. Reciprocamente, se $f^{-1}(f(A)) = A$ para todo $A \subset X$ então dados $x_1, x_2 \in X$ com $f(x_1) = f(x_2)$, tomando $A = \{x_1\}$ temos $x_2 \in f^{-1}(f(A)) = A = \{x_1\}$ logo $x_2 = x_1$ e f é injetiva

d) Seja f sobrejetiva. Então, para todo $B \subset Y$, temos:

$$b \in B \Rightarrow b = f(x), x \in X \Rightarrow b = f(x), x \in f^{-1}(B) \Rightarrow b \in f(f^{-1}(b)).$$

Assim $B \subset f(f^{-1}(B))$. Por b), segue-se que $f(f^{-1}(B)) = B$. Recíprocamente, se $f(f^{-1}(B)) = B$ para todo $B \subset Y$ então, tomando $y \in Y$ arbitrariamente e pondo $B = \{y\}$ vemos que $f(f^{-1}(y)) = \{y\}$ logo $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ e $f(x) = y$ qualquer que seja $x \in f^{-1}(y)$. Logo f é sobrejetiva .

3.2. Se existir $g\colon Y \to X$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$ então $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$ logo f é injetiva. Reciprocamente, se f é injetiva então definimos $f\colon X \to X$ assim: fixamos $x_0 \in X$. Dado $y \in Y$, se não existir $x \in X$ tal que $f(x) = y$, pomos $g(y) = x_0$. Se $y = f(x)$ para algum $x \in X$, este x é único e então pomos $g(y) = x$. A função $g\colon Y \to X$ cumpre $g(f(x)) = X$.

3.3. Se existir $g\colon Y \to X$ tal que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$ então, para todo $y \in Y$ tem-se $y = f(x)$, com $x = g(y)$, logo f é sobrejetiva. Reciprocamente, se f é sobrejetiva então, para cada $y \in Y$ o conjunto $f^{-1}(y)$ é $\neq \emptyset$. Escolhemos $x \in f^{-1}(y)$ e pomos $g(y) = x$. A função $g\colon X \to X$ cumpre $f(g(y)) = y$.

3.4. Para todo $y \in Y$, pondo $h(y) = x$, temos

$$g(y) = g(f(h(y))) = g(f(x)) = x = h(y).$$

3.5. Defina $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pondo $f(n) = 1$ se n é ímpar e, caso n seja par, escreva $n = 2^a \cdot b$, com b ímpar, e ponha $f(n) = a$. Como há infinitos números ímpares, a equação $f(x) = n$ tem, para todo $n \in \mathbb{N}$, infinitas soluções.

3.6. Isto é claro se $n = 1$. Supondo verdadeira a afirmação para conjuntos com n elementos, seja X um conjunto com $n + 1$ elementos. Fixe um elemento $a \in X$. Uma bijeção $f\colon X \to X$ consiste em escolher $a' = f(a)$ e definir uma bijeção de $X - \{a\}$ sobre $X - \{a'\}$. Existem $n + 1$ escolhas possíveis para a' e (por indução) $n!$ possíveis bijeções de $X - \{a\}$ sobre $X - \{a'\}$. Segue-se que há $(n + 1) \cdot n! = (n + 1)!$ bijeções de X.

3.7. O erro consiste na passagem $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$, que é falsa quando $n = 1$. (Não é verdade que $P(1) \Rightarrow P(2)$. Mais exatamente: $P(2)$ é certamente falsa.)

3.8. Seja $P(n)$ a afirmação de que um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos. Então $P(1)$ é verdadeira pois se $X = \{a\}$ então $\emptyset$ e $\{a\}$ são os dois únicos subconjuntos de X. Supondo $P(n)$ verdadeira, seja X um conjunto com $n + 1$ elementos. Fixando $a \in X$, seja $X' = X - \{a\}$. Há dois tipos de subconjuntos de X: as partes de X' (em número de 2^n) e os subconjuntos que contêm a (também são 2^n deles). Como $2^n + 2^n = 2^{n+1}$, segue-se $P(n + 1)$.

3.9. $P(2)$ é óbvio pois uma só pesagem é suficiente para saber, entre dois objetos, qual é o mais leve e qual o mais pesado. Supondo $P(n)$ verdadeira, efetuamos $2n - 3$ pesagens e encontramos, entre n objetos dados, o mais leve L e o mais pesado P. Agregando-se o $(n + 1)$-ésimo objeto, basta efetuar duas pesagens mais, comparando-o com L e com P. Se ele for mais leve do que L, será o mais leve dos $n + 1$ novos objetos. Se for mais pesado que P também o problema estará resolvido. Se for mais pesado que L e mais leve que P então L e P continuarão sendo o mais leve e o mais pesado. $2n - 3$ é o menor número possível para resolver o problema, como se vê considerando três objetos.

3.10. $P(1)$ é claro. Suponhamos todos os subconjuntos de um conjunto X com n elementos dispostos numa fila, de modo que cada um desses subconjuntos difira do anterior pelo acréscimo ou pela retirada de um elemento. Tomemos um $(n+1)$-ésimo elemento e estendamos a fila acrescentando-o, na ordem inversa, a cada subconjunto da fila anterior, começando com o último. Desta maneira obteremos todos os subconjuntos de X dispostos como está prescrito no enunciado.

A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO
Volume 1

Soluções dos Exercícios do Capítulo 4

4.1. É claro que $0 \in A$ mas não pertence a B nem a $C \cap D$ nem a E. Logo $0 \in ((A - B) - (C \cap D)) - E$.

4.2. (a) A implicação $\frac{5x+3}{2x+1} > 2 \Rightarrow 5x+3 > 4x+2$ é obtida multiplicando a primeira desigualdade por $2x+1$. Portanto só é válida quando $2x+1 > 0$, ou seja, quando $x > -1/2$. A maneira correta de resolver esta inequação é separar 2 casos: $x > -1/2$ e $x < -1/2$. (Evidentemente, não tem sentido pôr $x = -1/2$.) No primeiro caso, a solução é $x > -1/2$ e $x > -1$, logo $x > -1/2$. No segundo caso, para $x < -1/2$, tem-se $2x+1 < 0$ logo vale:

$$\frac{5x+3}{2x+1} > 2 \Rightarrow 5x+3 < 4x+2 \Rightarrow x < -1$$

A resposta é $x < -1$ ou $x > -1/2$. Equivalentemente: $x \notin [-1, -1/2]$.

(b) As implicações estão todas corretas: a primeira resulta de multiplicar ambos os membros da desigualdade por x^2+1, que é sempre > 0 para todo x. A segunda consiste em somar $-2x^2$ a ambos os membros. Valem as implicações opostas, em (a) e (b).

4.3. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow ad < bc \Rightarrow (a+c)d = ad + cd < (b+d)c \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Analogamente, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$. Uma possível interpretação de $\frac{a+c}{b+d}$ é a seguinte: na primeira fase de um campeonato foram realizados b jogos com um total de a gols convertidos. O número médio de gols por partida foi $\frac{a}{b}$. Na segunda fase, houve c gols em d partidas. Média de gols por partida na segunda fase: $\frac{c}{d}$. Média de gols por jogo no campeonato inteiro: $\frac{a+c}{b+d}$. Supondo $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, tem-se claramente $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

4.4. Como $1^3 < 3 < 2^3$, temos $\sqrt[3]{3} = 1,\ldots$ Além disso,$1,1^3 = 1,33$; $1,2^3 = 1,72$; $1,3^3 = 2,19$; $1,4^3 = 2,74$ e $1,5^3 = 3,37$. Logo a aproximação pedida para $\sqrt[3]{3}$ é $1,4$

4.5. No cálculo numérico, quando se deve efetuar uma divisão cujo dividendo é irracional, usa-se um valor aproximado do denominador. Se quisermos obter um grau de aproximação maior para o quociente, toma-se uma aproximação melhor para esse denominador e é-se obrigado a refazer a operação desde o início. Se, entretanto, a irracionalidade estiver no numerador apenas, basta prolongar a divisão acrescentando mais algarismos decimais ao dividendo, sem precisar recomeçar tudo de novo. Compare, por exemplo, as operações $1/\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}/2$. Evidentemente, estamos falando de operações efetuadas manualmente. No caso de cálculo eletrônico, não há quase diferença alguma. Aqui deve-se ter cuidado apenas com denominadores muito pequenos (em relação ao numerador), onde uma pequena variação dos quais pode causar grande alteração no quociente.

4.6. O número 0 pertence a todos os intervalos $[0, 1/n]$, $n \in \mathbb{N}$. Nenhum outro número real $x > 0$ pode pertencer a todos esses intervalos porque, dado $x > 0$ podemos sempre achar $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1/x$, donde $x > 1/n$, portanto $x \notin [1, 1/n]$. [Um modo prático de obter um número natural $n > x$ consiste em tomar a expressão decimal de x, desprezar a parte após a vírgula e pôr $n = 1+$ (a parte inteira de x).]

4.7. O número racional representado pela fração irredutível m/n tem uma expressão decimal finita quando existe um inteiro k tal que $n \cdot k$ seja uma potência de 10. Para isto, é necessário e suficiente que seu denominador seja da forma $n = 2^a \cdot 5^b$. Por outro lado, se n é primo com 10 (isto é, não é divisível por 2 nem por 5) então $\frac{m}{n}$ gera uma dízima periódica simples. Com efeito, algum múltiplo de n tem a forma $99\ldots 90\ldots 0$ mas, como n é primo com 10, se n divide $99\ldots 9 \times 10^r$, divide o fator $99\ldots 9$. Logo podemos afirmar que n tem um múltiplo tipo $99\ldots 9$. Se $n \cdot k = 99\ldots 9$ então $\frac{mk}{nk} = \frac{mk}{99\ldots 9} =$ geratriz de uma dízima periódica simples.

4.8. Como $0,1234567\ldots$ não é periódico, trata-se de um número irracional.

4.9. a) $|x-1| < 4$ significa que a distância de x a 1 é menor do que 4. Logo $|x-1| < 4 \Leftrightarrow x \in (-3, 5) = (1-4, 1+4)$

b) $|x+1| < 2 \Leftrightarrow$ distância de x a -1 é menor do que $2 \Leftrightarrow x \in (-3, 1) = (-1-2, -1+2)$

c) $|x-1| < |x-5| \Leftrightarrow x$ está mais próximo de 1 do que de 5. O ponto equidistante de 1 e 5 é $x = 3$. Logo deve ser $x < 3$.

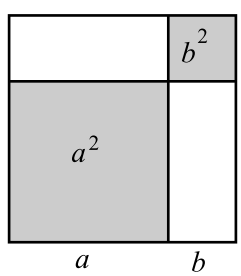
d) $|x-2|+|x-4| = 8 \Leftrightarrow$ (distância de x a 4) + (distância de x a 2) = 8. Evidentemente, x não pode estar entre 2 e 4. Logo há duas possibilidades: $x > 4$ ou $x < 2$. No primeiro caso $x-2+x-4 = 8$, $x = 7$. No segundo caso, $2-x+4-x = 8$, $x = -1$.

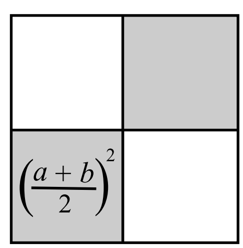
e) $|x-2|+|x+4| = 1$. Novamente, x não pode estar entre 2 e 4 porque neste caso a soma das distâncias de x a 2 e a 4 seria sempre 2. Se x estiver à direita de 4, sua distância a 2 será pelo menos 2. Se x estiver à esquerda de 2 então sua distância a 4 será ≥ 2. Assim, a equação $|x-2|+|x+4| = 1$ não tem solução.

4.10. $\dfrac{a^2+b^2}{2} - \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2} - \dfrac{a^2+2ab+b^2}{4} = \dfrac{a^2-2ab+b^2}{4} = \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 \geq 0.$

Logo $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$.

Interpretação geométrica: A desigualdade acima significa que a parte escura na figura tem área mínima quando os dois pequenos quadrados são iguais.





4.11. Se $1,4587 < x < 1,4588$ e $0,1134 < y < 0,1135$ então, multiplicando membro a membro estas desigualdades obtemos $0,16541 < xy < 0,16557$. Tomando os inversos multiplicativos nas desigualdades que envolvem y, temos

$$8,8105 < y^{-1} < 8,8183.$$

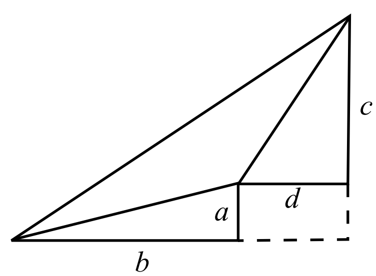
Portanto (multiplicando estas desigualdades por aquelas que envolvem x) resulta que

$$12,851 < \frac{x}{y} < 12,864.$$

Assim, vemos que $xy = 0,165$ com 3 algarismos decimais exatos e erro inferior a 1 décimo milésimo, por falta. Por outro lado, $\frac{x}{y} = 12,8$ com 1 algarismo decimal exato e erro inferior a 1 centésimo, por falta.

Outra interpretação geométrica do Exercício 4.3.

Comparando as tangentes:



$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO
Volume 1

Soluções dos Exercícios do Capítulo 7

7.1. Se $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, com $a_n \neq 0$ e $p(x) = b_px^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_1x + b_0$, com $n \geq p$ e $b_p \neq 0$, tome $q_0(x) = \frac{a_n}{b_p}\, x^{n-p}$. $P(x) - p(x)q_0(x) = \big(a_{n-1} - \frac{a_n}{b_p}\, b_{p-1}\big)x^{n-1} + \ldots$ tem grau no máximo igual a $n - 1$.
Pondo $P(x) - p(x)q_0(x)$ para desempenhar o papel de $P(x)$, vemos que existe um polinômio $q_1(x)$ tal que $P(x) - p(x)q_0(x) - p(x)q_1(x) = P(x) - p(x)[q_0(x) + q_1(x)]$ tem, no máximo, grau $n - 2$. Prosseguindo, vemos que existe um polinômio $q(x) = [q_0(x) + q_1(x)] + \cdots + q_{n-p}(x)$ tal que $P(x) - p(x)q(x)$ tem grau, no máximo, igual a $p - 1$. Chamando $P(x) - p(x)q(x)$ em $r(x)$, está provado o que se queria demonstrar.

7.2. Se $P(x) = p(x)q_1(x) + r_1(x)$ e $P(x) = p(x)q_2(x) + r_2(x)$ com os graus de $r_1(x)$ e de $r_2(x)$ ambos menores que o grau de $p(x)$, temos, subtraindo, $p(x)[q_1(x) - q_2(x)] = r_2(x) - r_1(x)$. Se $q_1(x) - q_2(x)$ não for identicamente nulo, o grau do primeiro membro será igual a ou maior que o grau de $p(x)$, ao passo que o grau do segundo membro será menor que o grau de $p(x)$. Logo, $q_1(x) - q_2(x)$ é identicamente nulo, ou seja, $q_1(x) = q_2(x)$. Substituindo, obtemos $0 = r_2(x) - r_1(x)$, ou seja, $r_1(x) = r_2(x)$.

7.3. a) Se α é raiz simples de $p(x)$ então $p(x) = (x-\alpha)q(x)$, com $q(\alpha) \neq 0$. Daí, $p(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) = 0$ e, como $p'(x) = (x - \alpha)'q(x) + (x - \alpha)q'(x) = q(x) + (x - \alpha)q'(x)$, $p'(\alpha) = q(\alpha) \neq 0$.

b) Se $p(\alpha) = 0$ e $p'(\alpha) \neq 0$, então $p(x) = (x - \alpha)q(x)$ pois α é raiz de $p(x)$ e, como $p'(x) = (x - \alpha)'q(x) + (x - \alpha)q'(x) = q(x) + (x - \alpha)q'(x)$, $q(\alpha) = p'(\alpha) \neq 0$.

c) Se α é raiz dupla de $p(x)$ então $p(x) = (x - \alpha)^2q(x)$, com $q(\alpha) \neq 0$. Daí, $p(\alpha) = (\alpha-\alpha)q(\alpha) = 0$ e, como $p'(x) = [(x-\alpha)^2]'q(x)+(x-\alpha)^2q'(x) = 2(x - \alpha)q(x) + (x - \alpha)^2q'(x)$ e $p''(x) = 2q(x) + 4(x - \alpha)q'(x) + (x - \alpha)^2q''(x)$, $p'(\alpha) = 0$ e $p''(\alpha) = 2q(\alpha) \neq 0$.

d) Se $p(\alpha) = p'(\alpha) = 0$ e $p''(\alpha) \neq 0$, então $p(x) = (x-\alpha)q(x)$ pois α é raiz de $p(x)$ e, como $p'(x) = (x-\alpha)'q(x) + (x-\alpha)q'(x) = q(x) + (x-\alpha)q'(x)$, $q(\alpha) = p'(\alpha) = 0$; logo, α é raiz de $q(x)$ e, portanto, $q(x)$ é divisível por $(x-\alpha)$, o que garante a existência de um polinômio $q_1(x)$ tal que $q(x) = (x-\alpha)q_1(x)$. Então $p(x) = (x-\alpha)q(x) = (x-\alpha)\cdot(x-\alpha)q_1(x) = (x-\alpha)^2 q_1(x)$; como $p'(x) = [(x-\alpha)^2]'q_1(x) + (x-\alpha)^2 q_1(x) + (x-\alpha)^2 q_1'(x) = 2(x-\alpha)q_1(x) + (x-\alpha)^2 q_1'(x)$ e $p''(x) = 2q_1(x) + 4(x-\alpha)q_1'(x) + (x-\alpha)^2 q_1''(x)$, $p''(\alpha) = 2q(\alpha)$, $q(\alpha) = \frac{1}{2}\, p''(\alpha) \neq 0$.

7.4. Errado. Se $p(x) = x^2 - 1$, temos $p'(x) = 2x$. 0 é raiz simples de $p'(x)$ mas não é raiz dupla de $p(x)$.

7.5. $$\begin{aligned} p(x) &= 2\,\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} + 1\,\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} \\ &\quad +4\,\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} + 3\,\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} \\ &= -\frac{4}{3}\,x^3 + 10x^2 - \frac{65}{3}\,x + 15. \end{aligned}$$

7.6. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e suponhamos $a_n > 0$. Seja k o maior dos números $|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|$.

Se $x > 1$, $|a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0| \leq |a_{n-1}|x^{n-1} + \cdots + |a_1|x + |a_0| \leq |a_{n-1}|x^{n-1} + \cdots + |a_1|x + |a_0| \leq kx^{n-1} + \cdots + kx^{n-1} + kx^{n-1} = nkx^{n-1}$. Se tomarmos um valor para x que, além de ser maior que 1, seja também maior que $\frac{nk}{a_n}$, teremos $x > \frac{nk}{a_n}$, $a_n x > nk$, $a_n x^n > nkx^{n-1} > |a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0|$, $p(x) > 0$.

Se $x < -1$, $|a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0| \leq |a_{n-1}| \cdot |x|^{n-1} + \cdots + |a_1| \cdot |x| + |a_0| \leq k|x|^{n-1} + \cdots + k|x|^{n-1} = nk|x|^{n-1}$. Se tomarmos um valor para x que, além de ser menor que -1, seja também menor que $-\frac{nk}{a}$, teremos $x < -\frac{nk}{a_n}$, $a_n x < -nk$, $a_n x^n < -nkx^{n-1}$ (como n é ímpar, x^{n-1} é positivo), $|a_n x^n| > nk|x|^{n-1}$ (na desigualdade anterior os dois membros são negativos; de dois números negativos, o menor é o que tem o maior módulo), $|a_n x^n| > |a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0|$ e, como $a_n x^n$ é negativo, $p(x) < 0$.

Caso fosse $a_n < 0$, bastava aplicar a conclusão ao polinômio $-p(x)$.

Pela continuidade do polinômio, se $p(x_1) < 0$ e $p(x_2) > 0$, existe x_0 compreendido entre x_1 e x_2 tal que $p(x_0) = 0$.

7.7. 1 não é raiz do polinômio pois $p(1) = n + 1 \neq 0$. Se $x \neq 1$, $p(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}\cdot$ Como n é par, não existe x real, $x \neq 1$, tal que $x^{n+1} = 1$. Logo, $p(x) \neq 0$ também para todo x real diferente de 1.

7.8. Obtém-se $x_0 = 3$; $x_1 = 2,333$; $x_2 = 2,238$; $x_3 = 2,236$; $x_4 = 2,236$. Como $2,236^2 < 5$ e $2,237^2 > 5$, a resposta é 2,236.

7.9. Devemos determinar a raiz real de $p(x) = x^2 - a$. A fórmula do método de Newton é

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - a}{3x_n^2} = \frac{2}{3}\,x_n + \frac{a}{3x_n^2}\cdot$$

No caso $a = 2$, a fórmula fica $x_{n+1} = \frac{2}{3}\,x_n + \frac{a}{3x_n^2}\cdot$ Começando com $x_0 = 1$, obtém-se $x_1 = 1,3333$; $x_2 = 1,2639$; $x_3 = 1,2599$; $x_4 = 1,2599$. Como $1,2599^3 < 2$ e $1,2600^3 > 2$, a aproximação de $\sqrt[3]{2}$ com 4 decimais exatas é 1,2599.