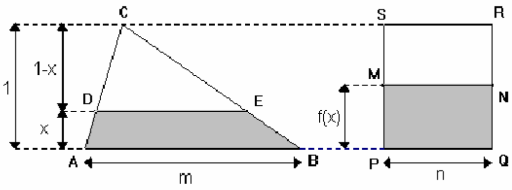
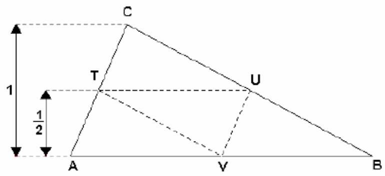
Soluções dos Exercícios de Áreas

1)



a) Sejam m e n, respectivamente, as medidas das bases do triângulo ABC e do retângulo $PQRS$, como na figura. Como a altura destas figuras é 1, segue que $\text{área}(ABC) = \dfrac{m}{2}$ e $\text{área}(PQRS) = n$. Da igualdade destas áreas segue $\dfrac{m}{2} = n$, donde $\dfrac{m}{n} = 2$.



b) Quando $x = \dfrac{1}{2}$ os pontos D e E coincidem com os pontos médios T e U dos lados AC e BC, respectivamente. Se V é o ponto médio do lado AB, podemos decompor o triângulo ABC em quatro triângulos congruentes, como na figura. Assim

$$\text{área}(ABUT) = \frac{3}{4}\text{área}(ABC) = \frac{3}{4}\cdot\frac{m}{2} = \frac{3m}{8},$$

e então

$$f\left(\frac{1}{2}\right)n = \frac{3m}{8} = \frac{3\cdot(2n)}{8} = \frac{3n}{4}$$

donde $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$.

c) Vamos primeiro calcular a área do trapézio $ABED$ em função de x. Como DE é paralela a AB, os triângulos DEC e ABC são semelhantes; a razão de semelhança é a razão de suas alturas, que é $\dfrac{1-x}{1} = 1-x$. Como áreas de figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança, segue que

$$\text{área}(DEC) = (1-x)^2\text{área}(ABC) = \frac{(1-x)^2 m}{2}.$$

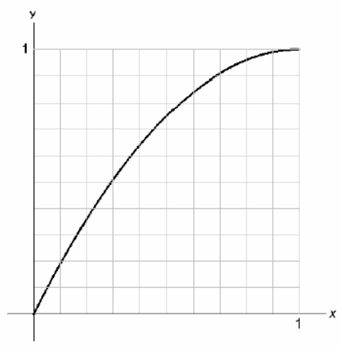
Logo

$$\text{área}(ABED) = \text{área}(ABC) - \text{área}(DEC) = \frac{m}{2} - \frac{(1-x)^2 m}{2} = (2x - x^2)n.$$

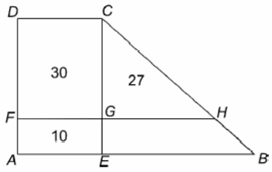
Da igualdade das áreas de ABC e $PQMN$, segue que

$$(2x - x^2)n = f(x)n$$

e concluímos que $f(x) = 2x - x^2$. A figura a seguir mostra o gráfico de $f(x)$ para $0 \le x \le 1$.



2)



(ALTERNATIVA C)
Como os retângulos *AEGF* e *FGCD* têm bases iguais e a área de *FGCD* é três vezes a de *AEGF*, segue que $CG = 3GE$. Logo a razão de semelhança entre os triângulos *CEB* e *CGH* é dada por

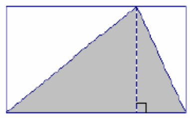
$$\frac{CE}{CG} = \frac{CG+GE}{CG} = \frac{3GE+GE}{3GE} = \frac{4}{3}$$

Como a razão das áreas de triângulos semelhantes é o quadrado da razão de semelhança, temos

$$\text{área}(CEB) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times \text{área}(CGH) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times 27 = 48$$

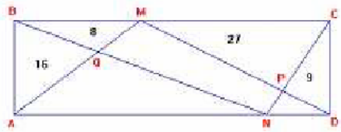
donde a área do trapézio *EBGH* é $48 - 27 = 21\,\text{cm}^2$.

3)



Lembramos que a área de um triângulo é dada pela fórmula $\frac{base \times altura}{2}$ e a área do retângulo por $base \times altura$. Na situação geral da figura ao lado, segue que a área do triângulo sombreado é metade da área do retângulo, pois ambos têm a mesma base e a mesma altura. Logo a soma das áreas dos dois triângulos brancos também é metade da área do retângulo, ou seja, igual à área do triângulo sombreado.

(a) Pelo visto acima, temos $área(AMD) = área(ABM) + área(MDC) = 16 + 8 + 27 + 9 = 60\ \text{cm}^2$.



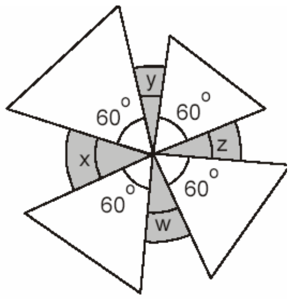
(b) Como $área(AMD) = área(BNC)$, temos

$$área(AQN) + área(NDP) = área(AMD) - área(MNPQ) = área(BNC) -$$
$$= área(BQM) + área(MPC) = 8 + 27 = 35\,\text{cm}^2$$

(c) Temos

$$área(MQNP) = área(BNC) - área(BQM) - área(MPC) = 60 - 8 - 27 = 25\,\text{cm}^2$$

4)



(alternativa B)
Como os quatro triângulos são equiláteros, cada um de seus ângulos mede 60º. Logo a soma dos ângulos *x, y, z* e *w* na figura é $x + y + z + w + 360^\circ - 4 \times 60^\circ = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$.

Como $360^\circ \div 120^\circ = 3$ a área cinza representa $\frac{1}{3}$ da área do círculo, ou seja, ela mede $36 \div 3 = 12\ \text{cm}^2$.