Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

PAPMEM - Janeiro 2012

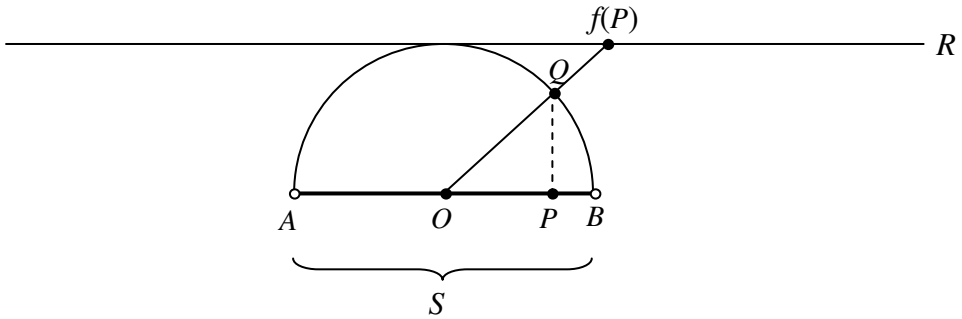
Números Cardinais e Funções – Soluções

1)
a) Não, pois $f(30) = f(12) = 3$ por exemplo.
b) Sim. Qualquer número natural pode ser decomposto em uma soma cujas parcelas sejam menores que 10.
c) Ha duas possibilidades: 9 + 9 + 6 = 24 e 9 + 8 + 7 = 24. No primeiro caso há 3 números e no segundo 6 números. São, portanto, 9 números.

2) Imagine $\dfrac{x^2}{x-1} = c \in \mathrm{R}$. Então $x^2 - cx + c = 0$ e $x = \dfrac{c \pm \sqrt{c^2 - 4c}}{2}$.
a) Como x é real então $c^2 - 4c \geq 0$, ou seja, $c \leq 0$ ou $x \geq 4$.
Para cada $c < 0$ ou $c > 4$ existem dois valores de x tais que $f(x) = c$ e a função f não é injetiva.
b) A imagem de f é o conjunto $(-\infty,\ 0] \cup [4,\ +\infty)$.

3)
a) 4 bolas. Sacando 3 bolas é possível que elas tenham cores diferentes.
b) 11 bolas. Sacando 10 bolas é possível que todas sejam brancas.
c) 14 bolas. Sacando 12 bolas é possível que todas sejam pretas ou vermelhas.
d) 18 bolas. Sacando 17 é possível que todas sejam brancas ou pretas.

4) Na figura abaixo, S é o segmento de extremidades A e B (que não pertencem a S), O é o ponto médio de S, C é uma semicircunferência de diâmetro AB e R a reta paralela a S e tangente a C.



A função $f : S \to R$ é definida da seguinte forma. Para cada ponto $P \in S$ a perpendicular a S passando por P intersecta a semicircunferência em Q e o ponto que a semirreta OQ intersecta a reta R é $f(P)$.
A função f é uma bijeção entre S e R.