Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

PAPMEM - Janeiro 2012

Função Quadrática - Soluções

1)

a) Seja $y = ax^2 + bx + c$. Substituindo os pontos dados temos:

(1) $1 = 4a - 2b + c$

(2) $-14 = a + b + c$

(3) $10 = 49a + 7b + c$

Com as operações $(1)-(2)$ e $(3)-(1)$ obtemos as equações:

$$\begin{cases} a - b = 5 \\ 5a + b = 1 \end{cases}$$

Calculamos então $a = 1$, $b = -4$, $c = -11$. Assim, $y = x^2 - 4x - 11$ e, para $x = 47$ encontramos $y = 2010$ (um bom ano novo a todos!).

b) $y = x^2 - 4x - 11 \;\Rightarrow\; y = x^2 - 4x + 4 - 4 - 11 \;\Rightarrow\; y = (x-2)^2 - 15$

O valor mínimo de *y* é -15 e ocorre quando $x = 2$.

c) $y = (x-2)^2 - 15 = 0 \;\Rightarrow\; (x-2)^2 = 15 \;\Rightarrow\; x = 2 \pm \sqrt{15}$.

2) A partir de $t = 0$ a abscissa de *A* é $x = -10 + 2t$ e a ordenada de *B* é $y = -6 + t$. A distância entre *A* e *B* é $d = \sqrt{(-10+2t)^2 + (-6+t)^2}$.

Para minimizar *d* basta minimizar a função $y = d^2 = (-10+2t)^2 + (-6+t)^2 = 5t^2 - 52t + 136$.

O valor mímimo de *y* é $-\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{52^2 - 4 \cdot 5 \cdot 136}{4 \cdot 5} = \dfrac{4}{5}$.

Assim, o valor mínimo de *d* é $\sqrt{\dfrac{4}{5}}$ que é menor que 1.

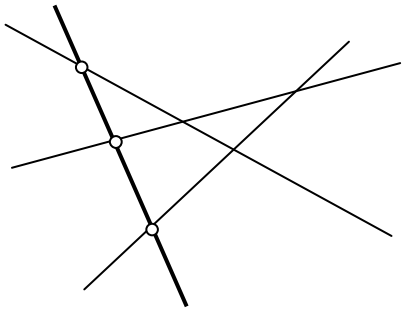
3)

a) $n + 1$

b) $2n$

c) Seja *n* o número de retas e R_n o número de regiões em que o plano ficou dividido. Os números iniciais são:

n	R_n
1	2
2	4
3	7



Se *n* retas estão desenhadas, a próxima reta cortará as anteriores em *n* pontos. Esta reta (em negrito na figura) estará dividida em $n+1$ partes e cada uma dessas partes dividirá uma região antiga em duas.

Assim, $n+1$ novas regiões ficarão formadas.

Portanto, $R_{n+1} = R_n + n + 1$ e a função que modela este problema é a função quadrática. Considerando $R_n = an^2 + bn + c$ e, substituindo os números iniciais, calculamos os coeficientes *a*, *b* e *c*.

A resposta é: $R_n = \dfrac{n^2 + n + 2}{2}$.