PAPMEM Julho / 2015

AVALIAÇÃO - SOLUÇÕES:

Questão 1:

Se $a < b$, então $b - a$ é racional e $0 < b - a$.

O número $\frac{\sqrt{2}}{2}$ é irracional e $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$. Multiplicando os membros dessas desigualdades por $b - a$, encontramos $0 < (b - a)\frac{\sqrt{2}}{2} < b - a$, onde $(b - a)\frac{\sqrt{2}}{2}$ é um irracional, dado que é o produto de um racional por um irracional.

Somando a a todos os membros dessas últimas desigualdades, obtemos $a < a + (b - a)\frac{\sqrt{2}}{2} < b$. O número $a + (b - a)\frac{\sqrt{2}}{2}$ é irracional por ser a soma de um racional com um irracional.

Faça-se $y = a + (b - a)\frac{\sqrt{2}}{2}$ e temos $a < y < b$, como queríamos demonstrar.

Questão 2:

a) O número de possibilidades é 9 x 8 x 7 x 6 x 5 = 15120.
b) Os lugares a serem ocupados por Alice e Bernardo podem ser escolhidos de 1 + 2 + 3 = 6 modos (cada parcela corresponde a um lado da mesa). Uma vez escolhidos esses lugares, há 2 formas de Alice e Bernardo ocupá-los. As demais pessoas podem ocupar livremente os lugares restantes, para um total de 7 x 6 x 5 = 210 possibilidades. O número total de possibilidades é 6 x 2 x 210 = 2520.

Questão 3:

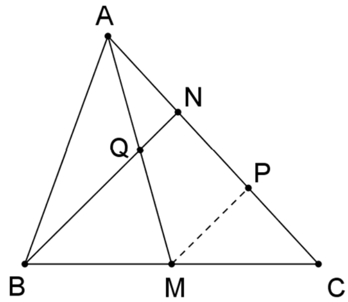
α^{-1} e β^{-1} são raízes da equação $x^2 - 2x - 5 = 0$, que equivale a $x^2 = 2x + 5$. Elevando ao quadrado obtemos $x^4 = 4x^2 + 20x + 25 = 4(2x+5) + 20x + 25 = 28x + 45$. Multiplicando por x obtemos $x^5 = 28x^2 + 45x = 28(2x+5) + 45x = 101x + 140$. Substituindo x por α^{-1} e β^{-1} e somando as duas equações obtidas chegamos a $\alpha^{-5} + \beta^{-5} = 101(\alpha^{-1} + \beta^{-1}) + 2 \cdot 140 = 101 \cdot 2 + 280 = 482$.

Questão 4:

A área do triângulo ABC é $S=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=\sqrt{2^4\cdot 3^2\cdot 7^2}=2^2\cdot 3\cdot 7=84$.

Traçamos MP.

Como M é médio de BC e P é médio de NC então MP é paralelo a BN.



Sabemos então que QN é paralelo a MP e que N é ponto médio de AP. Concluímos então que Q é médio de AM.

Temos então:

$$\frac{(AQN)}{(AMC)}=\frac{AQ\cdot AN}{AM\cdot AC}=\frac{AQ}{AM}\cdot\frac{AN}{AC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

Como $(AMC)=\frac{S}{2}$ então $(AQN)=\frac{1}{6}\cdot\frac{S}{2}=\frac{S}{12}$.

Logo, $(QMCN)=(AMC)-(AQN)=\frac{S}{2}-\frac{S}{12}=\frac{5S}{12}=\frac{5\cdot 84}{12}=35$ unidades de área.