Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio

Janeiro/2011

Geometria Analítica no Espaço

Soluções

1) a) O plano perpendicular ao vetor $v = (1,\ 2,\ 3)$ tem equação $x + 2y + 3z = d$. Para que P pertença a esse plano deve-se ter $d = 3$.

A equação do plano é $x + 2y + 3z = 3$.

1) b) Os pontos de interseção deste plano com os eixos são $(3,\ 0,\ 0)$, $\left(0,\ \frac{3}{2},\ 0\right)$ e $(0,\ 0,\ 1)$.

O volume do tetraedro que tem esses três vértices mais a origem é:

$$V = \frac{1}{6}\cdot 3\cdot \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{4}.$$

2) Sejam:

Eixo X – Direção leste-oeste

Eixo Y – Direção norte-sul

Eixo Z – Direção cima-baixo

Escrevendo os movimentos na escala 1/100 temos:

$$(0,\ 0,\ 5) + (0,\ 13,\ 0) + (8,\ 0,\ 0) + (0,\ 0,\ 3) + (0,\ -4,\ 0) + (-2,\ 0,\ 0) + (0,\ 0,\ -1) = (6,\ 9,\ 7)$$

O módulo do vetor $(6,\ 9,\ 7)$ é $\sqrt{166} = 12{,}88$. De acordo com a escala, a distância entre A e B é de 1288m, ou seja, aproximadamente 1290m.

3) Qualquer plano pode ser representado por uma equação do tipo $Ax + By + Cz = 1$. Como os três pontos devem pertencer a esse plano devemos ter:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 2A - B + C = 1 \\ -A + C = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{3}{4}$ e $C = \frac{5}{4}$. A equação do plano é:

$\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y + \frac{5}{4}z = 1$ ou $x + 3y + 5z = 4$.

4) Considere o cubo com os seguintes vértices e faça uma figura.

A = (0, 0, 0), *B* = (2, 0, 0), *C* = (2, 2, 0), *D* = (0, 2, 0),

E = (0, 0, 2), *F* = (2, 0, 2), *G* = (2, 2, 2), *H* = (0, 2, 2).

a) Sejam $\overrightarrow{AG} = (2,\ 2,\ 2)$ e $\overrightarrow{EC} = (2,\ 2,\ 0) - (0,\ 0,\ 2) = (2,\ 2, -2)$.

Como $\left|\overrightarrow{AG}\right| = \left|\overrightarrow{EC}\right| = 2\sqrt{3}$ o cosseno do ângulo θ entre essas diagunais é

$$\cos\theta = \frac{2\cdot 2 + 2\cdot 2 + 2(-2)}{2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

b) O ponto médio de *BC* é $M = (2,\ 1,\ 0)$. O ponto médio de *DH* é $N = (0,\ 2,\ 1)$.

Temos então $\overrightarrow{MN} = (-2,\ 1,\ 1)$. A distância entre *M* e *N* é $\sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$.

c) Sendo $\overrightarrow{AG} = (2,\ 2,\ 2)$ e $\overrightarrow{BD} = (0,\ 2,\ 0) - (2,\ 0,\ 0) = (-2,\ 2,\ 0)$ temos que o produto interno desses vetores é: $2\cdot(-2) + 2\cdot 2 + 2\cdot 0 = 0$ o que mostra que essas retas são ortogonais.

d) Temos $\overrightarrow{FD} = (2,\ -2,\ 2)$, $\overrightarrow{BG} = (0,\ 2,\ 2)$ e $\overrightarrow{BE} = (-2,\ 0,\ 2)$.

Como $\left\langle \overrightarrow{FD},\ \overrightarrow{BG} \right\rangle = 0$ e $\left\langle \overrightarrow{FD},\ \overrightarrow{BE} \right\rangle = 0$ então *FD* é ortogonal a *BG* e a *BE*. Logo, *FD* é perpendicular ao plano *BGE*.