Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio

Janeiro/2011

Aplicações de Geometria Analítica

Soluções

1) Considere o retângulo $ABCD$ cujos vértices são $A=(2,-1)$, $B=(2,\ 1)$, $C=(-2,\ 1)$ e $D=(-2,-1)$. O cosseno do ângulo θ entre os vetores $\overrightarrow{OA}=(2,-1)$ e $\overrightarrow{OB}=(2,\ 1)$ é:

$$\cos\theta=\frac{2\cdot 2+1(-1)}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{3}{5}.$$

2) Sejam $A=(0,\ 0)$, $B=(2,\ 0)$, $C=(a,\ 1)$ e $D=(0,\ 1)$.

Temos $\overrightarrow{AC}=(a,\ 1)$ e $\overrightarrow{BD}=(2,\ -1)$.

Assim, $\left\langle \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BD}\right\rangle = 2a-1$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{a^2+1}$ e $\left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{5}$.

a) $2a-1=0 \quad \Rightarrow \quad a=\dfrac{1}{2}$

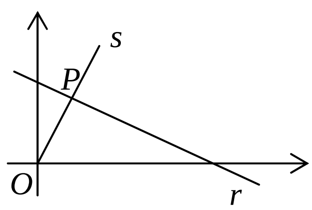
b) $\cos 45^{\circ}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{2a-1}{\sqrt{a^2+1}\cdot\sqrt{5}}$

$$\frac{1}{2}=\frac{4a^2-4a+1}{5a^2+5} \quad \Rightarrow \quad 3a^2-8a-3=0.$$

A única raiz que serve é $a=3$.

3) Naturalmente que uma solução algébrica é possível. Na solução analítica, seja r a reta $x+3y=5$, ou seja $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$ (coeficiente angular $-1/3$).

E expressão $E=x^2+y^2$ representa o quadrado da distância do ponto (x,y) à origem e, para um ponto da reta r, o valor de E será mínimo no ponto P, interseção de r e s, perpendicular a

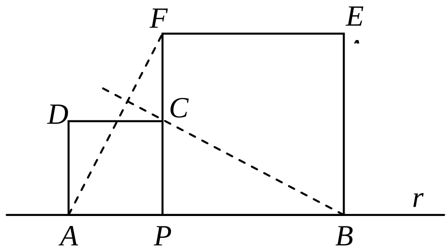


r passando na origem. Neste lugar, ele estará o mais próximo possível da origem.

A reta s a tem equação $y = 3x$ e resolvendo o sistema formado pelas duas equações encontramos $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Para este ponto, temos $E = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2}$.

4) a)



Sejam $A = (0,\ 0)$, $B = (1,\ 0)$ e $P = (a,\ 0)$.

Assim, $C = (a,\ a)$, $F = (a,\ 1 - a)$.

Daí, $\overrightarrow{AF} = (a,\ 1 - a)$ e $\overrightarrow{CB} = (1 - a,\ -a)$.

Portanto, $\left\langle \overrightarrow{AF},\ \overrightarrow{CB} \right\rangle = a(1 - a) - a(1 - a) = 0$.

As retas *AF* e *BC* são perpendiculares.

b) Outros fatos sobre a situação.

1) Se *Q* é o ponto de interseção de *AF* e *BC*, quando *P* percorre o segmento *AB*, o lugar geométrico de *Q* é a semicircunferência de diâmetro *AB*.

2) O ponto *C* é o ortocentro do triângulo *AFB*. Logo, *AC* é perpendicular a *BF*.