

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

PAPMEM – Janeiro 2013

Aplicações de Geometria Analítica
Professor Eduardo Wagner

Soluções

1) Considere o retângulo $ABCD$ cujos vértices são $A = (2, -1)$, $B = (2, 1)$, $C = (-2, 1)$ e $D = (-2, -1)$. O cosseno do ângulo θ entre os vetores $\overrightarrow{OA} = (2, -1)$ e $\overrightarrow{OB} = (2, 1)$ é:

$$\cos \theta = \frac{2 \cdot 2 + 1(-1)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{5}.$$

2) Sejam $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (a, 1)$ e $D = (0, 1)$.

Temos $\overrightarrow{AC} = (a, 1)$ e $\overrightarrow{BD} = (2, -1)$.

Assim, $\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \rangle = 2a - 1$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{a^2 + 1}$ e $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{5}$.

$$\text{a) } 2a - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2a - 1}{\sqrt{a^2 + 1} \cdot \sqrt{5}}$$

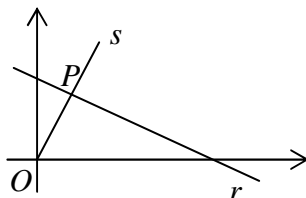
$$\frac{1}{2} = \frac{4a^2 - 4a + 1}{5a^2 + 5} \quad \Rightarrow \quad 3a^2 - 8a - 3 = 0.$$

A única raiz que serve é $a = 3$.

3) Naturalmente que uma solução algébrica é possível. Na solução analítica, seja r a reta

$x + 3y = 5$, ou seja $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ (coeficiente angular $-1/3$).

E expressão $E = x^2 + y^2$ representa o quadrado da distância do ponto (x, y) à origem e, para um ponto da reta r , o valor de E será mínimo no ponto P , interseção de r e s , perpendicular a



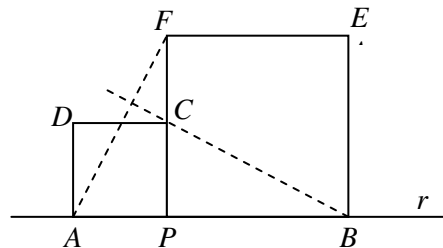
r passando na origem. Neste lugar, ele estará o mais próximo possível da origem.

A reta s a tem equação $y = 3x$ e resolvendo o sistema formado pelas duas equações

encontramos $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Para este ponto, temos $E = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2}$.

4) a)



Sejam $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ e $P = (a, 0)$.

Assim, $C = (a, a)$, $F = (a, 1 - a)$.

Daí, $\overrightarrow{AF} = (a, 1 - a)$ e $\overrightarrow{CB} = (1 - a, -a)$.

Portanto, $\langle \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{CB} \rangle = a(1 - a) - a(1 - a) = 0$.

As retas AF e BC são perpendiculares.

b) Outros fatos sobre a situação.

- 1) Se Q é o ponto de interseção de AF e BC , quando P percorre o segmento AB , o lugar geométrico de Q é a semicircunferência de diâmetro AB .
- 2) O ponto C é o ortocentro do triângulo AFB . Logo, AC é perpendicular a BF .