

Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio

Janeiro/2011

Sistemas - Soluções

1. Escalonando o sistema, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & c-6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & c-7 \end{bmatrix}$$

Para que o sistema tenha solução, deve-se ter $c-7 = 0$, ou seja, $c = 7$. O conjunto de soluções é uma reta do espaço (cada equação é combinação linear das outras duas, mas os planos correspondentes a cada equação não são paralelos entre si).

2. Os pontos da primeira reta são da forma $(t, t, 2t)$, onde $t \in \mathbb{R}$. Os pontos da segunda reta são da forma $(1+3u, 3-3u, 5-3u)$, onde $u \in \mathbb{R}$. As retas se intersectam se e somente se o sistema

$$\begin{cases} t = 1 + 3u \\ t = 3 - 3u \\ 2t = 5 - 3u \end{cases}$$

Resolvendo o sistema (por exemplo por substituição, verificamos que $t = 2$, $u = 1/3$ é a única solução. Logo, as retas se intersectam no ponto $(2, 2, 4)$.

3. Para encontrar as quantidades de cada liga, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} 700x + 800y + 750z = 700 \\ 200x + 100y + 100z = 150 \\ 100x + 100z + 150z = 100 \end{cases}$$

Reordenando as equações e resolvendo por escalonamento, obtemos

$$\begin{bmatrix} 100 & 100 & 150 & 100 \\ 200 & 100 & 100 & 150 \\ 700 & 800 & 750 & 750 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 100 & 100 & 150 & 100 \\ 0 & -100 & -200 & -50 \\ 0 & 100 & -300 & 50 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 100 & 100 & 150 & 100 \\ 0 & -100 & -200 & -50 \\ 0 & 0 & -500 & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema tem solução única. Temos:

$$z = 0$$

$$-100y - 200z = -50 \Rightarrow y = 0,5$$

$$100x + 100y + 150z = 100 \Rightarrow x = 0,5$$

Logo, para produzir a liga desejada, deve-se utilizar 500 kg da liga I, 500 kg da liga II e nada da liga III.

Para a outra liga, só muda o lado direito da equação (pode-se aproveitar, portanto, o escalonamento que já foi feito). Temos:

$$\begin{bmatrix} 100 & 100 & 150 & 150 \\ 200 & 100 & 100 & 150 \\ 700 & 800 & 750 & 700 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 100 & 100 & 150 & 150 \\ 0 & -100 & -200 & -150 \\ 0 & 100 & -300 & -350 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 100 & 100 & 150 & 150 \\ 0 & -100 & -200 & -50 \\ 0 & 0 & -500 & -500 \end{bmatrix}$$

Temos

$$-500z = -500 \Rightarrow z = 1$$

$$-100y - 200z = -50 \Rightarrow y = -1,5$$

$$100x + 100y + 150z = 150 \Rightarrow x = 1,5$$

Embora o sistema tenha solução, ela envolve quantidades negativas de uma das ligas, o que não é fisicamente realizável.