PAPMEM Janeiro / 2015

Combinatória – Parte 1 - Soluções

Prof. Paulo Cezar

1. O zero pode ser colocado de 3 modos, já que ele não pode ocupar a casa dos milhares. O algarismo ímpar pode ser escolhido de 5 maneiras e colocado de 3 modos. Finalmente, as duas posições restantes devem ser preenchidas com algarismos pares distintos e diferentes de zero, que podem ser escolhidos de 4 x 3 modos. O número total de possibilidades é 3 x 5 x 3 x 4 x 3 = 540.

2.
   a) Vamos descrever as posições dos CDs atribuindo números de 1 a 10 a suas posições, contando de baixo para cima. Se todos os 5 CDs de rock ficam juntos, o primeiro pode ficar nas posições de 1 a 6, portanto são 6 escolhas para a posição do bloco de CDs de rock. Os 5 CDs de rock podem ser arrumados de 5! = 120 maneiras dentro do bloco. As posições restantes são 5 e os demais CDs também podem ser ordenados de 120 maneiras nessas posições restantes (não importa que o bloco de CDs de rock interrompa a sequência). Portanto são 6 x 120 x 120 = 86400 maneiras.

   b) Dos 4 CDs, dois são do mesmo gênero (e os outros dois dos dois outros gêneros restantes). Se os dois de gênero repetido forem de música clássica, são todos os disponíveis para esse gênero, de forma que restam 3 x 5 escolhas para os outros dois; são, portanto, 15 possibilidades para se ter 2 CDs repetidos de música clássica. Se os dois de gênero repetido forem de MPB, há 3 escolhas para eles; para cada uma delas, restam 2 x 5 escolhas dos outros dois; portanto, são 3 x 10 = 30 maneiras para se ter dois CDs de MPB. Finalmente, se os dois de gênero repetido forem de rock, há $C_{5,2}$ = 10 escolhas para os dois repetidos, e 2 x 3 escolhas para os outros dois, perfazendo 10 x 6 = 60 possibilidades com dois CDs de rock. No total, são 60 + 30 + 15 = 105 possibilidades.

3.
   a) A restrição de f a {1, 2} deve ser uma função estritamente crescente de {1, 2} em {1, 2, 3}, enquanto a restrição de f a {4, 5, 6} deve ser uma função estritamente crescente de {4, 5, 6} em {5, 6, 7}. Para formar tais funções crescentes basta escolher suas imagens, o que pode ser feito de $C_{3,2}$ = 3 e $C_{3,3}$ = 1 modos, respectivamente. Logo, há 3 x 1 = 3 funções satisfazendo as condições dadas.
   b) Para formar uma função sobrejetiva de B em A, um valor da imagem deve ser usado duas vezes. O valor a ser repetido pode ser escolhido de 6 modos e os valores que o usarão como imagem de $C_{7,2}$ modos. Sobram 5 valores em cada um dos conjuntos, que devem formar uma correspondência biunívoca, o que pode ser feito de 5! modos. Logo, há 6. $C_{7,2}$. 5! = 15120 funções sobrejetivas de B em A.

Estrada Dona Castorina, 110 Rio de Janeiro - Brasil 22460-320 Fone: 55 21 2529 5276/5099 Fax: 55 21 25295005
e-mail: ddic@impa.br http://www.impa.br