impa Instituto de Matemática Pura e Aplicada
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
BRASIL GOVERNO FEDERAL

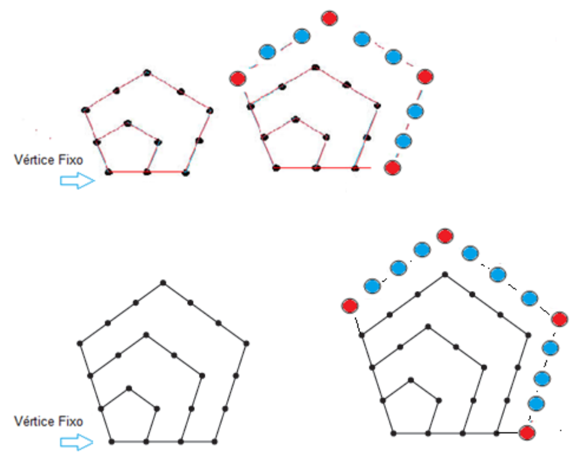
PAPMEM Janeiro / 2017

Recorrência

Prof.Luciano Monteiro de Castro

Soluções

1. Os números de pontos de cada figura formam uma sequência chamada de números pentagonais. Observe que, a partir da figura n, n1, a figura n+1 é obtida acrescentando-se à figura anterior 4 novos pontos (vermelhos) que serão os vértices e n novos pontos (azuis) em cada um dos três lados opostos ao vértice fixo, totalizando 4+3n novos pontos. Assim, se a vigésima figura possui 651 pontos a vigésima primeira terá 651 + 3 x 20 + 4 = 715 pontos.



2. (a) As seis maneiras são as seguintes: 1-2-3-4-5, 1-2-3-5-4, 1-2-4-3-5, 1-2-4-5-3, 1-3-2-4-5, 1-3-5-4-2.

   (b) Basta ele subir pelos degraus ímpares até o mais alto dos ímpares e em seguida ir para o mais alto dos pares e descer pelos degraus pares.
   Exemplo para 10 degraus: 1-3-5-7-9-10-8-6-4-2
   Exemplo para 11 degraus: 1-3-5-7-9-11-10-8-6-4-2.

   (c) Se ele começar com os movimentos 1-2, o problema recairá no caso com 11 degraus e, portanto, será possível completá-lo de 68 maneiras. Se ele começar com 1-3-2, então ele terá que ir para o degrau 4 e o problema recairá na mesma situação da escada com 9 degraus e ele terá 31 maneiras para completá-lo. Se ele começar com 1-3-4, os degraus 2 e 5 ficarão com um afastamento de 3 degraus e não será possível completar o movimento. Se ele começar com 1-3-5, ele não poderá mais descer ou subir um degrau, até atingir o último ímpar para depois voltar pelos pares como descrito no item c e, portanto, haverá apenas uma maneira. Logo, o número de maneiras de completar a brincadeira será igual a $68 + 31 + 1 = 100$ maneiras.

3. Seja $g(n)$ O número de seqüências com n termos que começam com $+1$. Temos $f(n) = f(n-1) + 2g(n)$. Por outro lado, o segunto termo de uma seqüência que começa com $+1$ pode ser 0 ou -1. No primeiro caso há $f(n-2)$ maneiras de se completar a seqüência e, no segundo, $g(n-1)$ maneiras. Portanto $g(n) = f(n-2) + g(n-1)$. Isolando $g(n)$ na primeira igualdade e substituindo na segunda obtemos $\frac{f(n)-f(n-1)}{2} = f(n-2) + \frac{f(n-1)-f(n-2)}{2} \iff f(n) = 2f(n-1) + f(n-2)$. Resolvendo a equação de recorrência utilizando as condições iniciais $f(1) = 3$ e $f(2) = 7$ obtemos $f(n) = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}\right)^n$. Como $f(n)$ é inteiro e $\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}\right)^n < \frac{1}{2}$, a demonstração está concluída.