Questões de Sequência -- Soluções

Professor Ledo Vaccaro Machado

1a) Sim.

Exemplo:

$a_1 = \sqrt{2}$ e $r = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

$a_1 = \sqrt{2}$ e $a_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = \sqrt{3}$

1b) Não.

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que sim. Então, para algum *m* e para algum *n* naturais:

$$\left.\begin{array}{r}\sqrt{2} - 1 = mr \\ \\ 2 - 1 = nr\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{2} - 1 = m/n \Rightarrow \sqrt{2} = m/n + 1 \text{ (o que é um absurdo).}$$

Portanto, não existe P.A. que apresente 1, $\sqrt{2}$ e 2 como termos.

1c) Não

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que sim. Então, para algum *m* e para algum *n* naturais:

$$\left.\begin{array}{r}\sqrt{3} - 1 = mr \\ \\ \sqrt{2} - 1 = nr\end{array}\right\} \Rightarrow (\sqrt{3} - 1)/(\sqrt{2} - 1) = [(\sqrt{3} - 1)\ (\sqrt{2} + 1)]/[(\sqrt{2} - 1)\ (\sqrt{2} + 1)] = m/n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{6} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - 1 = m/n \Rightarrow \sqrt{6} - \sqrt{2} + \sqrt{3} = m/n + 1$$

Chamando m/n + 1 de *a* (um racional), temos:

$$\sqrt{6} + \sqrt{3} = a + \sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{6} + \sqrt{3})^2 = (a + \sqrt{2})^2 \Rightarrow 6 + 2\sqrt{18} + 3 = a^2 + 2a\sqrt{2} + 2 \Rightarrow$$

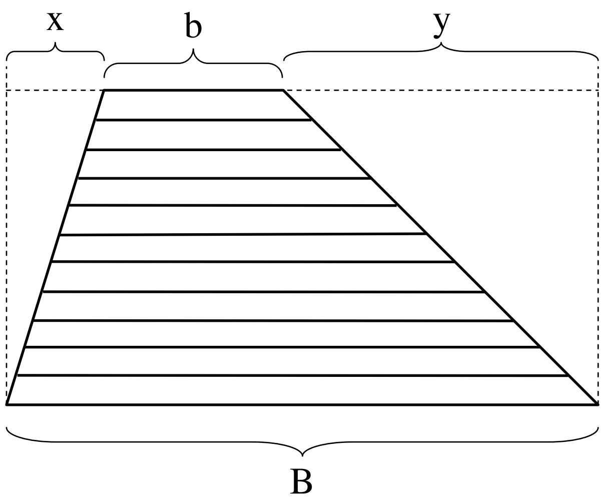
$$\Rightarrow 2\cdot3\sqrt{2} - 2a\sqrt{2} = a^2 - 7 \Rightarrow (6 - 2a)\sqrt{2} = a^2 - 7$$

Se a = 3, o primeiro membro dessa igualdade é 0, e o segundo é 2, o que é um absurdo.

Se $a \neq 3$, temos: $\sqrt{2} = (a^2 - 7)/(6 - 2a)$, o que também é um absurdo.

Portanto, não existe P.A. que apresente 1, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ como termos.

Questão 2 - Solução 1:

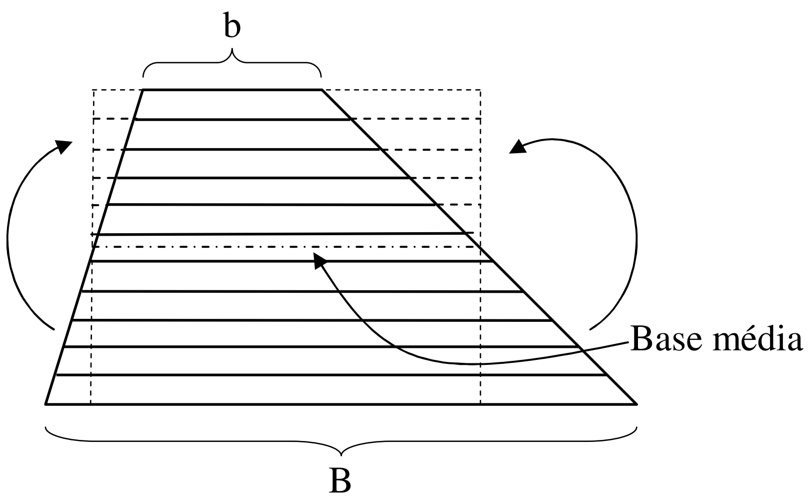


Observando a figura acima, tem-se que $x + y = B - b$. Portanto, tomando o comprimento de b como primeiro termo, e o de B como último, os comprimentos dos segmentos paralelos crescem em P.A. de razão $(x + y)/11 = = (B - b)/11$. Procuramos:

$$b + (b + r) + (b + 2r) + . . . + (b + 11r) = 12b + (r + 11r)\cdot 11/2 = 12b + 66r =$$

$$= 12b + 66(B - b)/11 = 12b + 6(B - b) = 12b + 6B - 6b = 6(B + b) = 6\cdot 5 = 30$$

Solução 2:



Soma dos 12 segmentos = 12 · base média = 12 · (B + b)/2 = = 6 · (B + b) = 6 · 5 = 30

(Repare que a base média não é um dos segmentos que devem ser somados.)

Questão 3 - Resposta: Não

Se a razão, q, for negativa, os sinais dos termos da P.G. se alternam. Como 1, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ são positivos, podemos considerar, sem perda de generalidade, que a razão é positiva.

Suponhamos, por absurdo, que a resposta seja sim. Nesse caso, existem m e n naturais para os quais:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{2} = q^m \Rightarrow 2 = q^{2m} \Rightarrow \mathit{log}\, 2 = 2m \cdot \mathit{log}\, q \\ \\ \sqrt{3} = q^n \Rightarrow 3 = q^{2n} \Rightarrow \mathit{log}\, 3 = 2n \cdot \mathit{log}\, q \end{array}\right\} \Rightarrow (\mathit{log}2)/(\mathit{log}3) = m/n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathit{log}_3 2 = m/n \Rightarrow 3^{m/n} = 2 \Rightarrow 3^m = 2^n, \text{ o que é um absurdo.}$$

Portanto, 1, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ não podem fazer parte de uma mesma P.G.

Questão 4 - Solução:

a) Dízima periódica simples:

1,454545 = 1 + (0,45 + 0,0045 + 0,000045 + ...)

Dentro dos parênteses do segundo membro da igualdade acima, temos o limite da soma dos termos de uma P.G. de primeiro termo 0,45 e razão 0,01.

1,454545 = 1 + (0,45 + 0,0045 + 0,000045 + ...) = 1 + 0,45/(1 – 0,01) =

$$= 1 + 0{,}45/0{,}99 = \underbrace{1 + 45/99 = 1 + 5/11 = 16/11}_{\text{a regra apresentada}}$$

b) Dízima periódica composta:

1,2454545... = 1 + 0,2 + (0,045 + 0,00045 + 0,0000045 + ...)

Dentro dos parênteses do segundo membro da igualdade acima, temos o limite da soma de uma P.G. de primeiro termo 0,045 e razão 0,01.

1,2454545... = 1 + 0,2 + (0,045 + 0,00045 + 0,0000045 + ...) =

= 1 + 0,2 + 0,045/(1 – 0,01) = 1 + 0,2 + 0,045/0,99 = 1 + 2/10 + 45/990 =

= 1 + 2x99/990 + 45/990 = 1 + (2x99 + 45)/990 =

= 1 + [2(100 – 1) + 45]/990 = 1 + [(200 – 2) + 45]/990 =

$$= \underbrace{1 + (245 - 2)/990 = 1 + 243/990 = 1 + 27/110 = 137/110}_{\text{a regra apresentada}}$$