Poliedros regulares – 2
Professor Eduardo Wagner
Soluções

1) (1, 0, 0), (0, 1, 0), (–1, 0, 0), (0, –1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, –1).

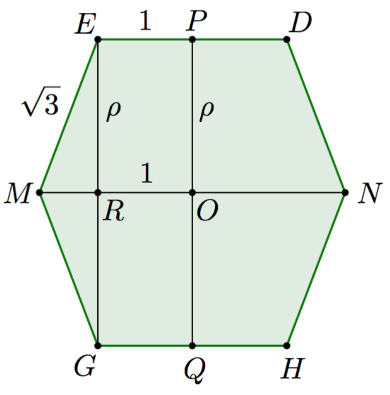
2) Considere as faces adjacentes *ABE* e *ABF* de um octaedro regular. Para simplificar as contas, consideremos o comprimento da aresta igual a 2. Seja *M* o ponto médio de *AB*. O ângulo entre essas duas faces é $E\hat{M}F = \theta$, pois *ME* e *MF* são perpendiculares a *AB*. As medidas dos lados do triângulo *EMF* são $ME = MF = \sqrt{3}$ e $EF = 2\sqrt{2}$, pois *EF* é uma diagonal do octaedro. A lei dos cossenos aplicada no triângulo *EMF* fornece $\cos\theta = -\frac{1}{3}$.

Uma calculadora fornece $\theta \cong 109{,}5^{\circ}$.
Obs: diversos outros caminhos são também interessantes, incluindo o que é visível na solução da questão 3 da aula anterior.

3) Seja *A* um dos vértices de um octaedro regular (na figura, coloque *A* no vértice superior). Considerando as arestas *AB*, *AC*, *AD*, *AE* e *AF*, sabemos que *BCDEF* é um pentágono regular. Se *M* é o ponto médio da aresta *AC*, o ângulo entre as faces *ACB* e *ACD* é o ângulo $B\hat{M}D = \theta$.
Para simplificar as contas, consideremos o comprimento da aresta do icosaedro igual a 2. Assim, no triângulo *BMD* temos $MB = MD = \sqrt{3}$ e como *BD* é uma diagonal do pentágono *BCDEF* temos (usando o dado do enunciado da questão) $BD = \sqrt{5} + 1$.

A lei dos cossenos no triângulo *BMD* fornece $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Uma calculadora fornece $\theta \cong 138{,}2^{\circ}$.



4) A figura ao lado mostra a forma exata da seção. O hexágono *DEMGHN* tem os lados opostos paralelos, $DE = GH = 2$ e $ME = MG = ND = NH = \sqrt{3}$. Temos ainda, $OP = OM = OQ = ON = \rho$.

Sendo *R* o ponto de interseção de *MN* e *PQ* temos, no triângulo retângulo *MRE*,

$$(\sqrt{3})^2 = \rho^2 + (\rho - 1)^2$$

e, fazendo as contas, encontramos $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

A área *S* da seção é o dobro da área do trapézio *MNDE*, ou seja,

$$S = 2 \cdot \frac{(MN + ED)\cdot OP}{2} = (2\rho + 2)\rho = 2\rho(\rho + 1) = 2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 4 + 2\sqrt{5}$$