Polinômios 2 - Equações Polinomiais

Prof.Luciano Monteiro de Castro

1. Seja α uma raiz da equação $x^3 - 3x + 1 = 0$. Prove que $\alpha^2 - 2$ é outra raiz da mesma equação.

2. Sem utilizar calculadora (ou computador) encontre uma boa aproximação para $\sqrt[3]{9}$.

3. Sabendo que i e $1+i$ são raízes da equação $x^7 - 6x^6 + 15x^5 - 25x^4 + 28x^3 - 25x^2 + 14x - 6$, resolva-a no universo dos números complexos.

Soluções

1. Substituindo $x = \alpha^2 - 2$ no lado esquerdo da equação, e usando o fato de que $\alpha^3 = 3\alpha - 1$, obtemos $\left(\alpha^2 - 2\right)^3 - 3\left(\alpha^2 - 2\right) + 1 = \alpha^6 - 6\alpha^4 + 12\alpha^2 - 8 - 3\alpha^2 + 6 + 1 = (3\alpha - 1)^2 - 6\alpha(3\alpha - 1) - 15\alpha^2 - 1 = 9\alpha^2 - 6\alpha + 1 - 18\alpha^2 + 6\alpha + 9\alpha^2 - 1 = 0$, logo $\alpha^2 - 2$ é raiz da equação. Para ver que é, de fato, *outra* raiz, basta observar que se $\alpha^2 - 2 = \alpha$, então $\alpha = 2$ ou $\alpha = -1$, mas nenhum desses dois valores representa uma raiz de $x^3 - 3x + 1 = 0$.

2. Como 9 está bem próximo de 8, cuja raiz cúbica vale 2, podemos obter uma boa aproximação de $\sqrt[3]{9}$ já na primeira interação do método de Newton, começando com a aproximação $x_0 = 2$. Para isso, consideramos a função $f(x) = x^3 - 9$, e calculamos a aproximação x_1 fazendo a interseção da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(2, f(2)) = (2, -1)$ com o eixo das abscissas. O coeficiente angular desta tangente é igual a $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$, logo $\dfrac{0 - (-1)}{x_1 - 2} = 12$, e obtemos $x_1 = 2\frac{1}{12} = 2,08333\ldots$, aproximação correta até a segunda casa decimal.

3. Como o polinômio tem coeficientes reais e i e $1+i$ são raízes, os conjugados $-i$ e $1-i$ também são raízes. Isto significa que o polinômio é divisível por $(x^2+1)(x^2-2x+2) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$. Façamos a divisão.

$$
\begin{array}{r|rrrrrrrr}
 & & & & & x^3 & -4x^2 & +4x & -3 \\ \hline
x^4-2x^3+3x^2-2x+2 & x^7 & -6x^6 & +15x^5 & -25x^4 & +28x^3 & -25x^2 & +14x & -6 \\
 & -x^7 & +2x^6 & -3x^5 & +2x^4 & -2x^3 & & & \\ \cline{2-6}
 & & -4x^6 & +12x^5 & -23x^4 & +26x^3 & -25x^2 & & \\
 & & 4x^6 & -8x^5 & +12x^4 & -8x^3 & +8x^2 & & \\ \cline{3-7}
 & & & 4x^5 & -11x^4 & +18x^3 & -17x^2 & +14x & \\
 & & & -4x^5 & +8x^4 & -12x^3 & +8x^2 & -8x & \\ \cline{4-8}
 & & & & -3x^4 & +6x^3 & -9x^2 & +6x & -6 \\
 & & & & 3x^4 & -6x^3 & +9x^2 & -6x & +6 \\ \cline{5-9}
 & & & & & & & & 0
\end{array}
$$

Agora, antes de tentar a fórmula de Cardano, vale a pena pesquisar possíveis raízes inteiras (qualquer raiz racional deverá ser inteira) do quociente, $x^3 - 4x^2 + 4x - 3$. Os únicos candidatos são os divisores de -3, ou seja, $1, -1, 3, -3$. Utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini, descobrimos que a única raiz inteira é 3.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -4 & 4 & -3 \\
3 & & 3 & -3 & 3 \\ \hline
 & 1 & -1 & 1 & 0
\end{array}
$$

Para terminar, basta resolver a equação do segundo grau $x^2 - x + 1 = 0$, cujas raízes são $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Assim, o conjunto-solução da equação original é $\left\{3, i, -i, 1+i, 1-i, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.