# Números Complexos

Prof.Luciano Monteiro de Castro

**1.** Resolva a equação $x^4 - 10x^2 + 169 = 0$ no universo dos números complexos.

**2.** Determine o valor máximo de $|z+1|$ quando $|z-2| = 1$, $(z \in \mathbb{C})$.

**3.** Dados os vértices $A(3,4)$ e $C(5,8)$ do quadrado $ABCD$, determine as coordenadas de $B$ e $D$.

**4.** Dado $w = \dfrac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}i\right)$,

(a) calcule $\displaystyle\sum_{n=1}^{89} w^n$;

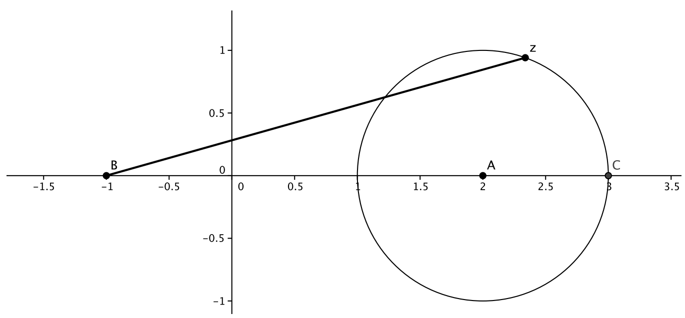
(b) verifique que o resultado da rotação de um complexo $a$ em torno da origem por um ângulo de $120°$ no sentido trigonométrico é o complexo $aw$;

(c) prove que os complexos $a$, $b$, $c$ formam, nesta ordem, um triângulo equilátero no sentido trigonométrico se, e somente se, $a + bw + cw^2 = 0$.

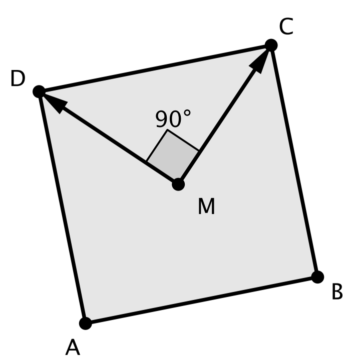
## Soluções

1. Temos $x^4 - 10x^2 + 25 = -169 + 25$, ou seja, $(x^2 - 5)^2 = -144$. Como as raízes quadradas de $-144$ são $12i$ e $-12i$, deduzimos que $x^2 = 5 \pm 12i$. Agora, para calcular as raízes quadradas de $5 \pm 12i$, podemos usar a fórmula de transfomação de radicais duplos ou então observar que $5 \pm 12i = 9 - 4 \pm 2 \cdot 3 \cdot 2i = (3 \pm 2i)^2$. Logo as quatro raízes da equação são $3+2i, 3-2i, -3-2i, -3+2i$.

2. $|z-2| = 1$ significa que a imagem de $z$ dista $1$ do ponto $A(2,0)$, logo pertence à circunferência de centro $A$ e raio $1$. $|z+1|$ representa a distância da imagem de $z$ à imagem do complexo $-1$, o ponto $B(-1,0)$. O ponto da circunferência mais distante de $B$ deve pertencer à reta $AB$, logo é o ponto $C(3,0)$. Como $BC = 4$, o valor máximo de $|z+1|$ é igual a 4.




3. Seja $M$ o ponto médio de $AC$, ou seja $M\left(\frac{3+5}{2}, \frac{4+8}{2}\right) = (4,6)$. Considerando os vértices $A, B, C, D$ no sentido trigonométrico, temos que o vetor $\overrightarrow{MD}$ é o resultado da rotação de $90°$ do vetor $\overrightarrow{MC}$, no sentido trigonométrico. Assim, identificando pontos e vetores com seus correspondentes afixos em $\mathbb{C}$, temos $\overrightarrow{MD} = i \cdot \overrightarrow{MC}$, ou seja, $D - M = i(C - M) \Leftrightarrow D = 4 + 6i + i(5 + 8i - 4 - 6i) = 2 + 7i$, ou seja, $D(2,7)$. Agora, uma das várias formas de calcular B é $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow B - A = C - D \Leftrightarrow B = (3,4) + (5,8) - (2,7) = (6,5)$.



4. (a) Basta observar que $w = \cos 120° + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,120°$.

   (b) O item anterior implica que $w^3 = 1 \Leftrightarrow (w-1)(w^2+w+1) = 0$. Como $w \neq 1$, concluímos que $1 + w + w^2 = 0$. Agora, se $n$ é maior ou igual a 3, seja $r$ o resto da divisão de $n$ por 3. Como $n = 3q + r$, com $q$ inteiro, deduzimos que $w^n = w^{3q+r} = \left(w^3\right)^q \cdot w^r = w^r$. Assim, a soma de três parcelas consecutivas do somatório pedido é sempre igual a $1 + w + w^2$, ou seja, igual a zero. Como 87 é múltiplo de 3, temos $\displaystyle\sum_{n=1}^{87} w^n = 0$, logo $\displaystyle\sum_{n=1}^{89} w^n = w^{88} + w^{89} = w + w^2 = -1$.

   (c) Identificando os complexos com suas imagens, $a, b, c$ formam, nesta ordem, um triângulo equilátero no sentido trigonométrico se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{ca}$ é a rotação de $120°$ do vetor $\overrightarrow{bc}$, ou seja, $a - c = w(c - b) \Leftrightarrow a + bw + (-1 - w)c = 0 \Leftrightarrow a + bw + bw^2 = 0$. (Usamos mais uma vez a igualdade $w^2 + w + 1 = 0$).