Contagem
Prof. Luciano Monteiro
Soluções

1. Como todos os algarismos são diferentes, as desigualdades serão determinadas pelos algarismos das dezenas de cada um dos três números formados. Há $\binom{6}{3} = 20$ maneiras de se escolher 3 algarismos para as dezenas, e feita esta escolha há uma única maneira de posicioná-los respeitando as desigualdades. Feito isto, podemos escolher livremente os algarismos das unidades entre os três algarismos restantes, o que pode ser feito de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneiras. Assim, a resposta é $20 \times 6 = 120$.

2. Basta escolhermos as imagens dos números $2, 4, 5, 6$ e 7, sem repetição. Isso pode ser feito de $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$ maneiras.

3. Como $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, temos $\binom{n}{k}^2 = \binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k}$. A soma que queremos calcular é igual a $\binom{n}{0} \times \binom{n}{n} + \binom{n}{1} \times \binom{n}{n-1} + \binom{n}{2} \times \binom{n}{n-2} + \cdots \binom{n}{n} \times \binom{n}{0}$. Uma maneira de fazer o cálculo é interpretar como a solução do seguinte problema de contagem: Quantas comissões com n pessoas podem ser formadas a partir de um grupo com n mulheres e n homens? Se a comissão tiver k mulheres, deverá ter $n-k$ homens, e há $\binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k}$ maneiras de formá-la. Como o número de mulheres na comissão varia de 0 a n, o total de comissões é igual ao resultado da soma que queremos calcular. Por outro lado, sabemos que esse total é $\binom{2n}{n}$. Logo
$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

4. Suponha que todos os carros tenham estacionado. Seguindo a ordem das vagas, os números dos carros estacionados formam uma permutação dos números de 1 a n. Cada permutação válida pode ser formada da seguinte maneira: escrevemos o número 1, depois escrevemos o número 2 à esquerda ou à direta do 1, depois escrevemos o número 3 à direita ou à esquerda do bloco formado por 1 e 2, e assim sucessivamente. Logo há $1 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^{n-1}$ sequências válidas. Como cada maneira de estacionar gera uma única sequência válida, e vice-versa, há 2^{n-1} configurações distintas.