Princípio das Gavetas -- Soluções
Professor Paulo Cezar Carvalho

1.

(a) O conjunto de possibilidades de respostas para as 5 primeiras questões, cada uma com 4 alternativas, é 4^5. É possível distribuir as respostas de $2 \cdot 4^5 = 2048$ candidatos de forma que cada conjunto de respostas se repita exatamente duas vezes, mas se houver $2 \cdot 4^5 + 1 = 2049$ candidatos isso não é mais possível, sempre haverá ao menos 3 provas iguais nas cinco primeiras questões.

(b) Considerando agora as n primeiras questões, há 4^n possibilidades de resposta. Para garantir que em 1000 candidatos pelo menos 2 respondam de forma igual a essas primeiras n questões, é necessário que $1000 \geq 4^n + 1$, isto é, $4^n \leq 999$. O valor máximo de n tal que $4^n \leq 999$ é 4 (pois $4^4 = 2^8 = 256$ e $4^5 = 2^{10} = 1024$). Resposta: $n = 4$.

2.

(a) Os 5 cartões de mesmo número não podem ser os cartões numerados de 1 a 4. Esses cartões são 10. Há 6 números que são candidatos a terem 5 cartões repetidos: 5, 6, 7, 8, 9 e 10. Então, pelo Princípio das Gavetas, é suficiente retirar $10 + 4 \cdot 6 + 1 = 35$ cartões.

(b) Não aparecem dois números com diferença maior do que 5 enquanto todos os cartões retirados tiverem todos os números dentro de uma mesma sequência de 6 números consecutivos (um "bloco de 6"). Os blocos de 6 possíveis são: 1-2-3-4-5-6, 2-3-4-5-6-7, 3-4-5-6-7-8, 4-5-6-7-8-9 e 5-6-7-8-9-10. O bloco com mais cartões é o último: ele tem $5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 45$ cartões. Então, pelo Princípio das Gavetas, com 46 cartões retirados não é possível que todos eles estejam num mesmo bloco de 6, ou seja, certamente existirá um par com diferença maior do que 5.

3.

a) Sejam $x_1 \leq x_2 ... \leq x_{26}$ as idades em ordem não decrescente. Por hipótese temos que $x_1 \geq 16$ e $x_{26} \leq 65$. Como

$$(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_{26} - x_{25}) = x_{26} - x_1 \leq 65 - 16 = 49,$$

então a média aritmética

$$\frac{(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_{26} - x_{25})}{25}$$

é menor do que $49/25$ e pelo menos uma das diferenças $(x_{i+1} - x_i)$ é menor ou igual do que $49/25$ e, portanto, menor do que 2.

Obs.: A rigor, $x_{26} - x_1$ não é, necessariamente, igual a 49; isto ocorre quando discretizamos o tempo em anos, mas, de fato, a pessoa com idade x_1 pode ter acabado de completar 16 anos e a pessoa com idade x_{26} pode estar prestes a fazer 66. Em qualquer caso certamente $x_{26} - x_1$ é estritamente menor que 50, o que faz com que a conclusão seja válida.

b) A resposta é $k = 3$. Como há 26 pessoas e 12 possibilidades para o mês de aniversário, há um mês em que nasceram no mínimo $26/12 = 2,1...$ pessoas. Portanto, há um mês em que nasceram pelo menos três pessoas. Não se pode garantir que haja 4 pessoas em um mesmo mês (basta distribuir as pessoas colocando duas em cada um de 10 meses e três em cada um dos outros 2 meses).

c) Há 24 combinações (gavetas) possíveis de sexo e mês de aniversário. Logo, para que se possa garantir que haja 4 pessoas em uma mesma gaveta, é preciso que haja pelo menos $24 \times 3 + 1 = 73$ objetos (pessoas). Portanto, é preciso que cheguem mais $73 - 26 = 47$ pessoas.