Combinatória -- Soluções

Professor Paulo Cezar Carvalho

1.

ALTERNATIVA C

Vamos primeiro contar quantos pacotes distintos é possível fazer com qualquer número de figurinhas, incluindo o pacote sem nenhuma figurinha. Para fazer um pacote, Bruno pode, por exemplo, escolher primeiramente quantas figurinhas da Alemanha, depois quantas do Brasil e finalmente quantas da Colômbia ele deseja colocar no pacote. Pelo princípio multiplicativo, isso pode ser feito de 6 x 7 x 5 = 210 maneiras diferentes; observemos que o fator 6 nessa expressão corresponde ao fato de que Bruno tem 6 escolhas (a saber, 0, 1, 2, 3, 4, 5) para o número de figurinhas da Alemanha; já o fator 7 é o número de escolhas para o número que figurinhas do Brasil e 5 é o número de escolhas para o número de figurinhas da Colômbia que ele pode colocar no pacote.

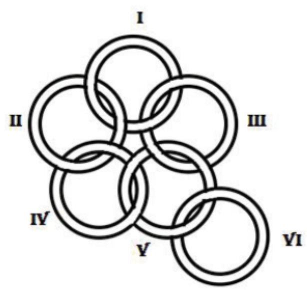
Por outro lado, o número de pacotes com menos que três figurinhas é 10, como vemos na tabela abaixo (na segunda coluna, usamos letras A, B e C para denotar Alemanha, Brasil e Colômbia, respectivamente):

Quantidade de figurinhas escolhidas para colocar no pacote	O que fica dentro do pacote	Quantidade de pacotes
0 figurinha	nada	1
1 figurinha	A ou B ou C	3
2 figurinhas	AA ou BB ou CC ou AB ou AC ou BC	6
Total		1 + 3 + 6 = 10

Segue, então, que o número de pacotes distintos com pelo menos três figurinhas é 210 – 10 = 200.

2.

ALTERNATIVA D



Numerando os anéis como na figura e iniciando a contagem pelas possibilidades de pintura do anel **I**, dividimos o problema em 3 casos.

1) O anel **III** deve ser pintado com a mesma cor que o anel **II**, o que garante que os anéis **III** e **IV** tenham cores diferentes. Então, pelo princípio multiplicativo, temos as seguintes possibilidades de escolha das cores:

I	II	III	IV	V	VI	
3	2	1	2	1	2	→24

2) O anel **III** deve ser pintado com cor diferente do anel **II** e o anel **IV** com a mesma cor que o anel **III**. Então, pelo princípio multiplicativo, temos as seguintes possibilidades de escolha das cores:

I	II	III	IV	V	VI	
3	2	1	1	2	2	→24

3) O anel **III** deve ser pintado com cor diferente do anel **II** e o anel **IV** com cor diferente do anel **III**. Então, pelo princípio multiplicativo, temos as seguintes possibilidades de escolha das cores:

I	II	III	IV	V	VI	
3	2	1	1	1	2	→12

Logo, o número de maneiras possíveis de pintar o símbolo é 24 + 24 + 12 = 60.

3.

Item a)

O único número de dois algarismos que não é setespalhado é o 77. De 10 a 99 existem 90 números e, excluindo o 77, há 89 números setespalhados de dois algarismos.

Item b)

Dividimos em dois casos: quando o algarismo das unidades do número é 7 ou quando o algarismo das unidades não é 7.

No primeiro caso, já que o algarismo das unidades é 7, há 9 possibilidades para o algarismo das dezenas (só não pode ser 7) e 9 possibilidades para o algarismo das centenas, o que resulta em um total de 9 x 9 = 81 possibilidades de números setespalhados que terminam com 7.

No segundo caso, há 9 possibilidades para o algarismo das unidades e 89 possibilidades para centenas e dezenas (como visto no item anterior para dois algarismos). Assim há 89 x 9 = 801 números setespalhados com algarismo das unidades diferente de 7.

Juntando os dois casos, concluímos que existem 81 + 801 = 882 números que são setespalhados e possuem três algarismos.

Item c)

Se o algarismo das unidades não é 7, há 882 possibilidades para milhar, centena e dezena para que o número de quatro algarismos seja setespalhado (fato análogo ao que foi visto no item b)). Isso fornece 9 x 882 = 7938 números setespalhados que não terminam em 7.

Se o algarismo das unidades é 7, há 9 possibilidades para a casa das dezenas e 89 possibilidades para centena e milhar, o que resulta em 9 x 89 = 801 números que são setespalhados e terminam em 7.

Item d) Pelos exemplos anteriores, podemos inferir que $a_n = 9\,a_{n-1} + 9a_{n-2}$. Veremos que de fato isso ocorre, levando em conta que o número pode ou não terminar com o algarismo 7.

Se o número não terminar em 7, ele será setespalhado se, e só se, o número obtido suprimindo-se o algarismo das unidades for setespalhado, isso contribui com o fator $9\,a_{n-1}$ na igualdade acima, pois há 9 possibilidades para o algarismo das unidades e a_{n-1} possibilidades para o número em que o algarismo das unidades foi suprimido.

Caso 7 apareça na casa das unidades, há 9 possibilidades para a casa das dezenas (todos os algarismos que não são 7) e o número obtido suprimindo-se dezena e unidade deve ser setespalhado. Isso contribui para o fator $9\,a_{n-2}$ na igualdade $a_n = 9\,a_{n-1} + 9\,a_{n-2}$.