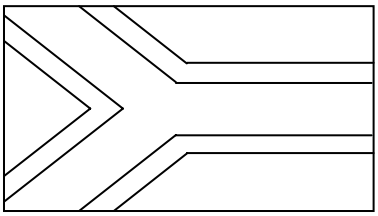
PAPMEM – Avaliação – julho de 2010

Nome (opcional): _____

Cidade: _____Estado: _____

Questão 1
A figura abaixo mostra uma bandeira que possui 7 regiões. Cada região deve ser pintada de uma cor e duas regiões vizinhas não podem ter a mesma cor. Se você possui 7 cores determine de quantas formas diferentes a bandeira pode ser pintada lembrando que não é necessário usar sempre todas as cores.
Atenção: basta indicar os cálculos, não é necessário fazer todas as contas.



Resp: $7 \cdot 6^6$

Questão 2
Uma superfície esférica *E* tem centro *O* e raio *R*. Um plano α é tal que a distância de *O* a α é menor do que *R*. Prove que $E \cap \alpha$ é uma circunferência.

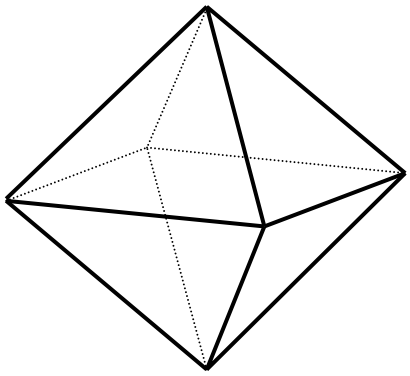
Resp: Sejam: *A* a projeção de *O* sobre α e *P* um ponto de $E \cap \alpha$. A distância de *O* a α é $OA = d$. Como $P \in E$ temos, $OP = R$ e, no triângulo retângulo *OAP*, $AP = \sqrt{R^2 - d^2}$ que é constante. Assim, *P* está na circunferência contida no plano α com centro *A* e raio $\sqrt{R^2 - d^2}$.

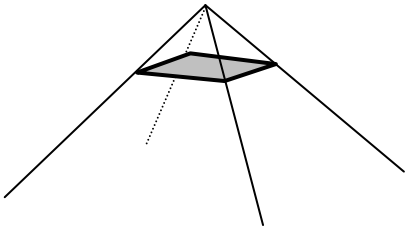
Obs: Não vamos exigir a volta. Basta qualquer argumentação semelhante ‘a que está acima.

Questão 3
A igreja de São Francisco de Assis em São João del-Rei teve sua construção iniciada em 1774 e foi inaugurada com uma grande festa em 1781 por Dom Frei Manuel da Cruz, bispo de Mariana. Como a construção tinha durado 7 anos, Dom Frei Manuel manifestou a vontade de que, a cada 7 anos, fosse realizada uma festa comemorativa. Imaginando que sua vontade tenha sido cumprida até hoje, determine quantas festas foram realizadas (incluindo a da inauguração).

Resp: Devemos encontrar o maior natural *n* tal que $1781 + (n-1)7 < 2010$. Fazendo as contas temos $n = 33$.

Questão 4





A primeira figura acima mostra um octaedro regular. Todas as faces do octaedro regular são triângulos equiláteros.

a) Se *AB* é uma aresta, diga quantas arestas do octaedro são reversas a *AB*.

Resp: 4

b) Divida cada aresta do octaedro em três partes iguais. Pelos quatro pontos mais próximos de um vértice faça uma seção, como mostra a segunda figura acima, e retire a pequena pirâmide formada. Fazendo o mesmo em todos os vértices, obtém-se um poliedro *P*.
Descreva as faces de *P* e determine os números de arestas, faces e vértices de *P*.

Resp: $F_4 = 6$, $F_6 = 8$.
$F = 14$, $A = 36$, $V = 24$

c) Sendo *V* o volume do octaedro, determine o volume do poliedro *P*.

Resp: Cada pirâmide pequena que sera retirada tem volume $\frac{1}{27} \cdot \frac{V}{2}$. O volume de *P* é $V_P = V - 6 \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{V}{2} = \frac{8V}{9}$.