Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

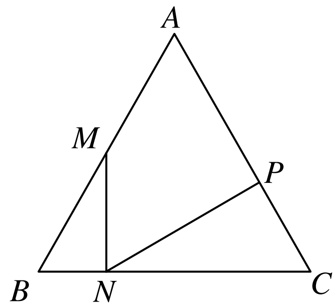
PAPMEM – Julho 2013

Teorema de Pitágoras
Professor Eduardo Wagner

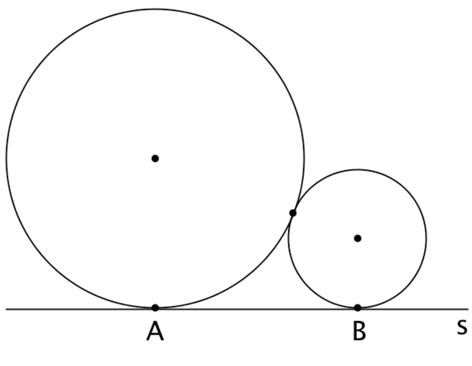
Exercícios

1) **Profmat-2012**
Na figura ao lado, ABC é um triângulo equilátero, M é o ponto médio do lado AB, o segmento MN é perpendicular ao lado BC e o segmento NP é perpendicular ao lado AC.
Sabendo que $AP = 12$ unidades, a medida do lado do triângulo ABC nessa mesma unidade é:

A) 15,2 B) 16,4
C) 17,5 D) 18,6
E) 19,2



2) Na figura abaixo as circunferências de raios R e r são tangentes entre si e são tangentes em A e B à uma reta s.
a) Determine o comprimento de AB.
b) Considerando $R = 9$ e $r = 4$ calcule o raio da pequena circunferência que é tangente às circunferências dadas e à reta s.



3) Em um triângulo retângulo de hipotenusa a, catetos b e c e altura relativa à hipotenusa h, mostre que:

a) $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$

b) $a + h > b + c$

4) Um helicóptero sai de um ponto P no solo e faz os seguintes movimentos sucessivos: 500m verticalmente para cima, 900m horizontalmente na direção norte, 200m verticalmente para cima, 700m horizontalmente na direção oeste e 100m verticalmente para baixo pousando no ponto Q de uma montanha próxima. Determine um valor aproximado para a distância PQ.

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

PAPMEM – Julho 2013

Teorema de Pitágoras
Professor Eduardo Wagner

Soluções

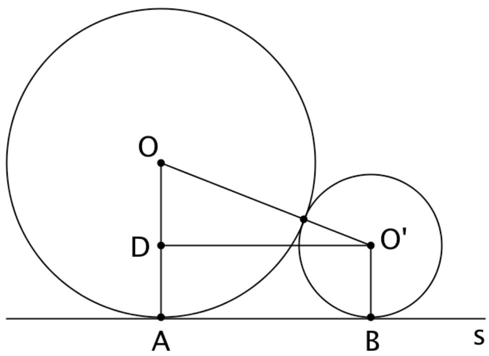
1) Considere o lado do triângulo equilátero igual a $8a$.

Assim, $MB = 4a$, $NC = 6a$ e $CP = 3a$. Logo, $12 + 3a = 8a$ e $a = \frac{12}{5}$.

O lado do triângulo equilátero é $8a = 8 \cdot \frac{12}{5} = \frac{96}{5} = 19{,}2$.

2) a) Sejam O e O' os centros das circunferências de raios R e r, respectivamente. Traçando $O'D \perp OA$ temos $OO' = R + r$, $OD = R - r$ e seja $AB = t$.
O teorema de Pitágoras no triângulo ODO' dá $(R+r)^2 = (R-r)^2 + t^2$.
Desenvolvendo e simplificando temos

$$t = 2\sqrt{Rr}$$



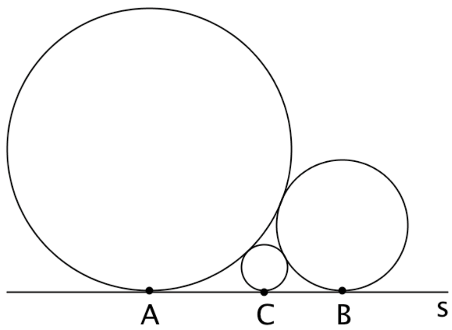
2) b) Os raios das circunferências dadas são $R = 9$ e $r = 4$. Seja x o raio da circunferência menor.
Considerando a resposta do exercício 1, temos $AC + CB = AB$, ou seja,

$$2\sqrt{9x} + 2\sqrt{4x} = 2\sqrt{9 \cdot 4}$$

$$3\sqrt{x} + 2\sqrt{x} = 6$$

$$\sqrt{x} = \frac{6}{5}$$

$$x = \frac{36}{25} = 1{,}44 .$$



3) a) A partir das relações $b^2 = am$ $c^2 = an$ e $h^2 = mn$ temos:

$$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{am}+\frac{1}{an}=\frac{m+n}{amn}=\frac{a}{amn}=\frac{1}{mn}=\frac{1}{h^2}$$

b) Começamos com $h^2 > 0$

Somando $2ah$ dos dois lados,

$$2ah + h^2 > 2ah$$

Como $ah = bc$,

$$2ah + h^2 > 2bc$$

Somando a^2 de um lado e $b^2 + c^2$ do outro,

$$a^2 + 2ah + h^2 > b^2 + c^2 + 2bc$$

Daí,

$$(a+h)^2 > (b+c)^2$$

Como todos os termos são positivos,

$$a + h > b + c$$

4) Observe que a ordem dos movimentos não muda a posição do ponto final. Foram feitos movimentos em três direções do espaço perpendiculares duas a duas.
Direção norte = 900
Direção oeste = 700
Direção vertical = 500 + 200 – 100 = 600

A distância *PQ* é a diagonal do paralelepípedo que tem essas arestas.
$PQ = \sqrt{900^2 + 700^2 + 600^2} = 100\sqrt{166} \cong 1300$ m.