Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

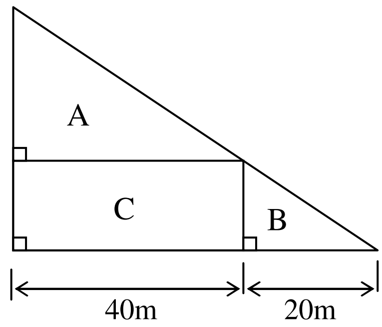
PAPMEM – Julho 2013

Áreas
Professor Eduardo Wagner

Exercícios

1) **Profmat-2011**

Um terreno triangular foi dividido em três terrenos menores conforme a figura ao lado.

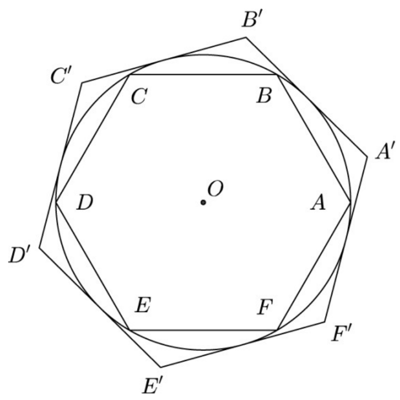


Então:

A) A área do terreno B é a metade da área do terreno A.
B) A área do terreno C é maior do que a área do terreno A.
C) A área do terreno B é 1/3 da área do terreno A.
D) A área do terreno A é igual à área do terreno C.
E) A área do terreno B é maior que a área do terreno A.

2) **Profmat-2012**

Na figura ao lado, os hexágonos regulares $ABCDEF$ e $A'B'C'D'E'F'$ estão, respectivamente, inscrito e circunscrito a uma circunferência de centro O.

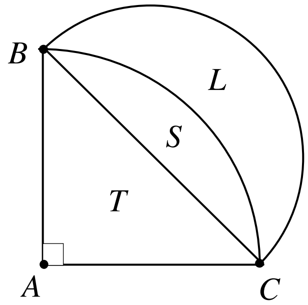


A razão $\dfrac{\text{área}(A'B'C'D'E'F')}{\text{área}(ABCDEF)}$ vale:

A) $\dfrac{3}{2}$ B) $\dfrac{4}{3}$
C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3}$
E) 2

3) **Profmat-2011**

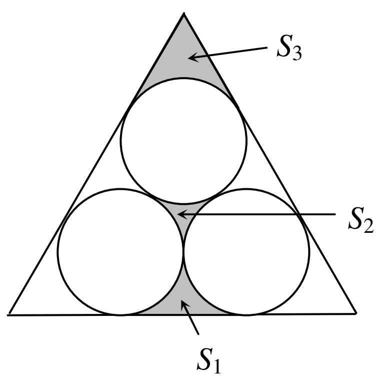
Considere um triângulo isósceles ABC com hipotenusa BC. Tomando o ponto A como centro e AB como raio, consideramos o arco de circunferência delimitado pela corda BC. Consideremos ainda a semicircunferência de diâmetro BC, conforme a figura ao lado. Designamos por T a área da região triangular ABC e por S e L as áreas das outras duas regiões. Prove que $L = T$.



4) **Profmat-2012**

A figura ao lado mostra três circunferências de 1cm de raio tangentes entre si duas a duas e um triângulo equilátero circunscrito a essas circunferências.

a) Calcule o lado do triângulo equilátero.
b) Sendo S_1, S_2 e S_3 as áreas das regiões sombreadas da figura, mostre que $S_3 > S_1 + S_2$.



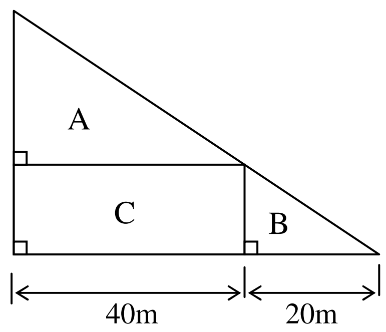
Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

PAPMEM – Julho 2013

Áreas
Professor Eduardo Wagner

Soluções

1) Sejam A, B e C as áreas das regiões A, B e C. Seja T a área do triângulo.



O triângulo B e o triângulo grande são semelhantes na razão $\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$.

Portanto, $\frac{B}{T}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$, ou seja, $B=\frac{T}{9}$.

Os triângulos B e A são semelhantes na razão $\frac{20}{40}=\frac{1}{2}$.

Portanto, $\frac{B}{A}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, ou seja, $A=4B=\frac{4T}{9}$.

Assim, $C=T-\frac{T}{9}-\frac{4T}{9}=\frac{4T}{9}$.

2) Os triângulos $OA'B'$ e OAB são equiláteros. A razão de semelhança (do maior para o menor) é $\frac{A'B'}{AB}=\frac{R}{R\sqrt{3}/2}=\frac{2}{\sqrt{3}}$. A razão de semelhança entre os hexágonos é a mesma.

Logo, a razão entre as áreas dos hexágonos é $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4}{3}$.

3) Considere $AB=AC=2a$. Assim, $BC=2a\sqrt{2}$ e o semicírculo de diâmetro BC tem raio $a\sqrt{2}$. Passamos a calcular as áreas.

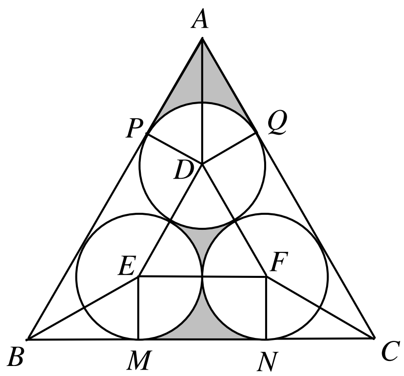
$$T=\frac{2a\cdot 2a}{2}=2a^2$$

$$S=\frac{\pi(2a)^2}{4}-T=\pi a^2-2a^2$$

$$L=\frac{\pi(a\sqrt{2})^2}{2}-S=\pi a^2-(\pi a^2-2a^2)=2a^2$$

Assim, $L=T$.

4)



Na figura ao lado, *D*, *E* e *F* são os centros das circunferências. Cada um dos segmentos: *DP*, *DQ* *EM* e *FN* é perpendicular a um lado do triângulo equilátero *ABC*.

a) Como, $EM = FN = 1$ e $\angle EBM = \angle FCN = 30^{\circ}$ então, $BM = NC = \sqrt{3}$.
Observando que $MN = EF = 2$, o lado do triângulo equilátero é $BC = 2 + 2\sqrt{3}$.

b) S_1 é igual à área do retângulo *MNEF* subtraída de dois setores de 90°, ou seja, de meio círculo. Assim, $S_1 = 2 - \frac{\pi}{2}$.
S_2 é igual à área do triângulo equilátero *DEF* subtraída de três setores de 60°, ou seja, de meio círculo. Assim, $S_2 = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$.
S_3 é igual à soma das áreas dos triângulos *ADP* e *ADQ* subtraída do setor *DPQ* de 120°, a terça parte do círculo. Como $AP = AQ = \sqrt{3}$ temos que a área de cada um dos triângulos *ADP* e *ADQ* é $\sqrt{3}/2$. Assim, $S_3 = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$.

$$S_3 > S_1 + S_2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} > 2 + \sqrt{3} - \pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\pi}{2} > 3 \quad \Leftrightarrow \quad \pi > 3$$

Como a última é verdadeira, a primeira também é.