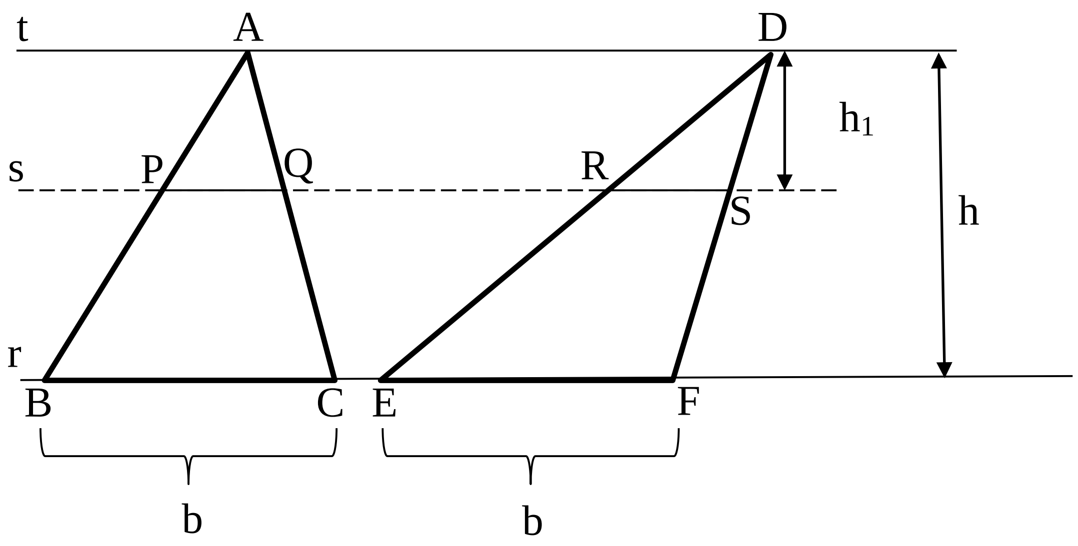
Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Princípio de Cavalieri
Prof.Ledo Vaccaro Machado

1 solução



Os triângulos ABC e DEF são triângulos de bases b e altura h.

Sendo $r \,//\, s \,//\, t$, temos $\Delta ABC \approx \Delta APQ$ e $\Delta DEF \approx \Delta DRS$, e dessas semelhanças podemos estabelecer as proporções:

$(h_1/h) = (PQ/b)$ e $(h_1/h) = (RS/b) \Rightarrow (PQ/b) = (RS/b) \Rightarrow PQ = RS$

Pelo princípio enunciado, os dois triângulos têm a mesma área.

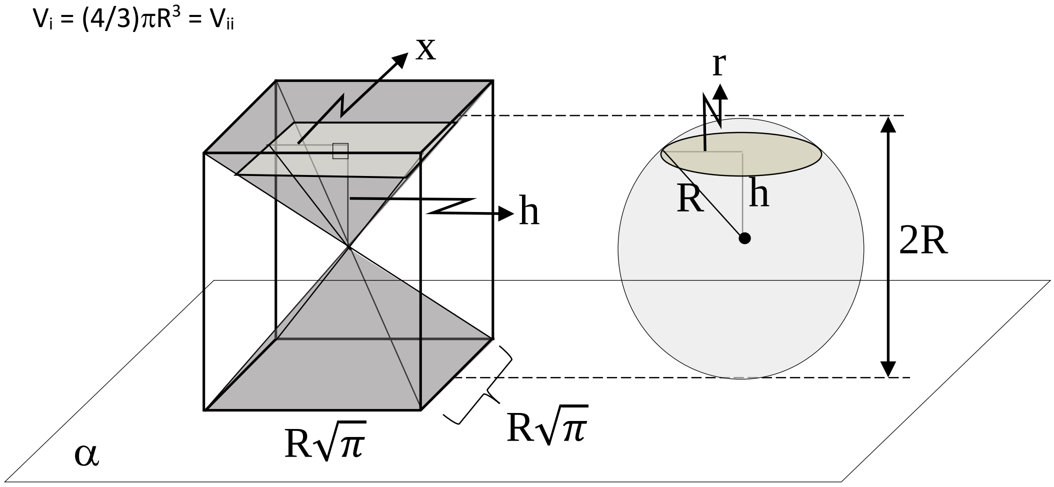
Estrada Dona Castorina, 110Rio de Janeiro - Brasil 22460-320 Fone: 55 21 2529 5000/5284 Fax: 55 21 2512 4115
http://www.impa.br

2 solução

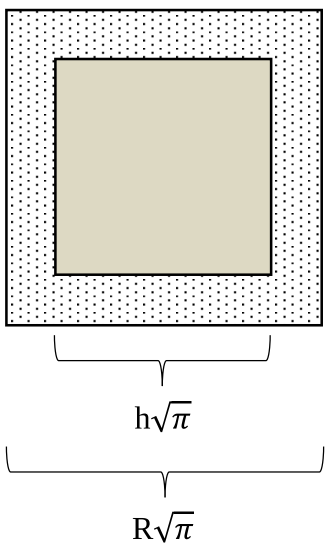
i) $V_i = V_{bloco} - 2V_{pirâmide} = \left(R\sqrt{\pi}\right)^2 \cdot 2R - 2(1/3)\left(R\sqrt{\pi}\right)^2 \cdot R = 2\pi R^3 - (2/3)\pi R^3 = (4/3)\pi R^3$

ii) V_{ii} é o volume de uma esfera de raio R, $V_{ii} = (4/3)\pi R^3$

$V_i = (4/3)\pi R^3 = V_{ii}$

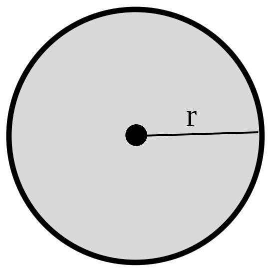


$2x/h = R\sqrt{\pi}/R \Rightarrow 2x = h\sqrt{\pi}$



$A_1 = (R\sqrt{\pi})^2 - (h\sqrt{\pi})^2 = \pi(R^2 - h^2)$

$r^2 = R^2 - h^2$



$A_2 = \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$

$$\mathbf{A_1 = A_2 = \pi(R^2 - r^2)}$$

Estrada Dona Castorina, 110Rio de Janeiro - Brasil 22460-320 Fone: 55 21 2529 5000/5284 Fax: 55 21 2512 4115
http://www.impa.br

3 solução

$V_i = \pi(R\sqrt{2/3})^2 \cdot 2R = (4/3)\pi R^3$

$V_{ii} = \pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot (1/3) \cdot \pi R^2 \cdot R = (6/3)\pi R^3 - (2/3) \cdot \pi R^3 = (4/3)\pi R^3$

$\mathbf{V_i = V_{ii} = (4/3)\pi R^3}$

O próprio plano α não determina, nos dois sólidos, seções de áreas iguais.

Outras seções de fácil verificação são as geradas por um plano paralelo ao α e que passa a uma distância R/2 do vértice do cone: no cilindro de raio $R\sqrt{2/3}$, a área da seção é $\pi(R\sqrt{2/3})^2 = (2/3)\pi R^2$; e no cilindro de raio R, a parte do cilindro que não pertente ao cone tem área $\pi R^2 - (1/4)\pi R^2 = (3/4)\pi R^2$.