

Circunferência Trigonométrica
Prof. Ledo Vaccaro Machado
Soluções

1) $\text{Plog}(1/2)$ é a abscissa do ponto $1/2$ sobre a circunferência. Esse ponto está associado a um ângulo central de 45° . O que procuramos é o cateto de um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa $2/\pi$.

$$\cos 45^\circ = \text{Plog}(1/2) / (2/\pi) = \sqrt{2} / 2$$

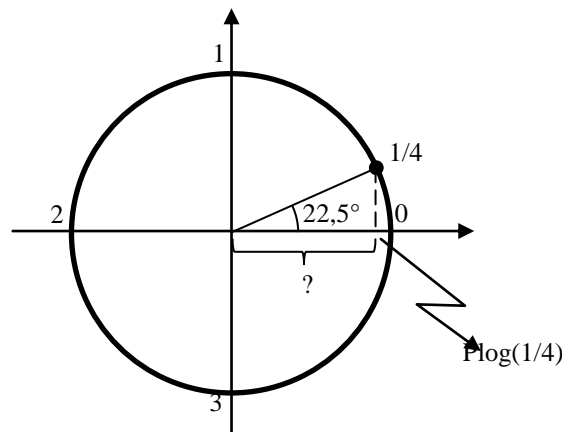
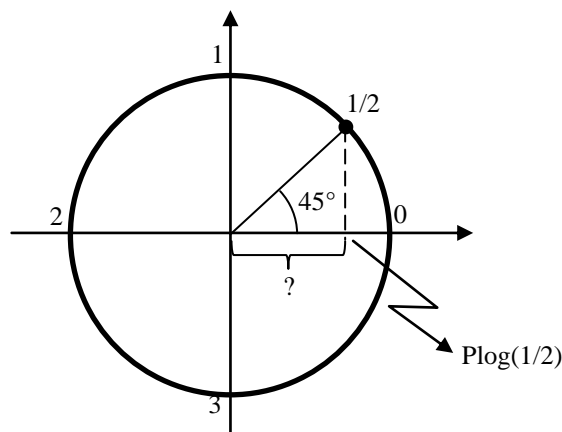
$$\text{Plog}(1/2) = \sqrt{2}/\pi$$

De forma semelhante, o $\text{Plog}(1/4)$ é o maior cateto de um triângulo de hipotenusa $2/\pi$ e um ângulo agudo de $22,5^\circ$.

$$\cos 22,5^\circ = \text{Plog}(1/4) / (2/\pi)$$

$$(\sqrt{\sqrt{2} + 2}) / 2 = \text{Plog}(1/4) / (2/\pi)$$

$$\text{Plog}(1/4) = (\sqrt{\sqrt{2} + 2}) / \pi$$



$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$$

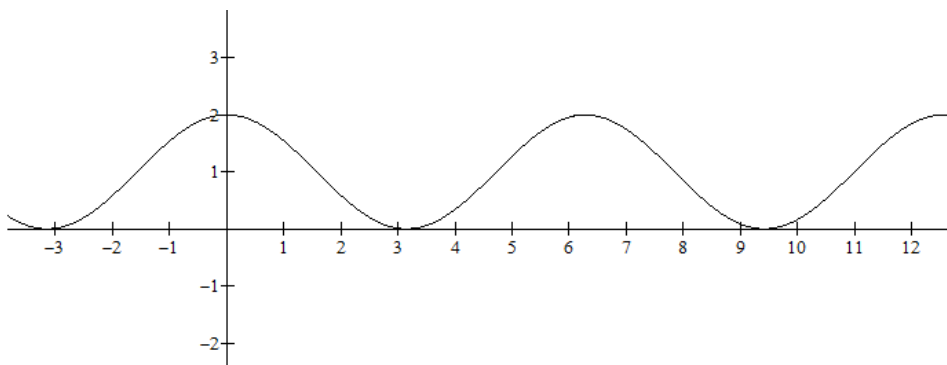
$$\cos 45^\circ = 2 \cos^2 22,5^\circ - 1 \Rightarrow \sqrt{2}/2 = 2 \cos^2 22,5^\circ - 1 \Rightarrow \cos^2 22,5^\circ = (\sqrt{2} + 2) / 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 22,5^\circ = (\sqrt{\sqrt{2} + 2}) / 2$$

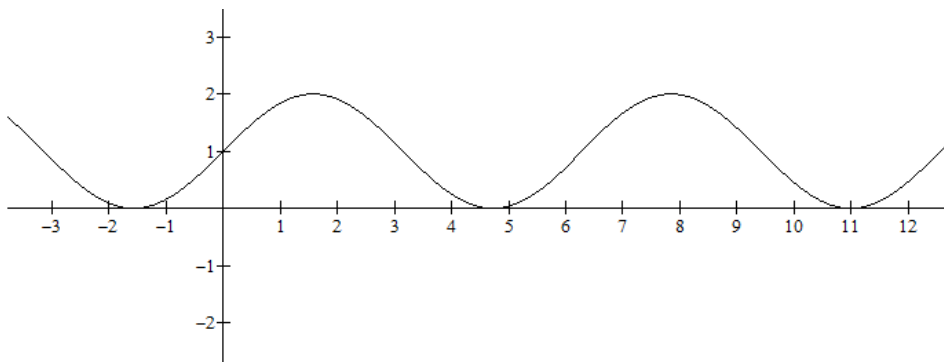
Pode-se, também, usar uma calculadora, obtendo-se o valor aproximado de $\cos 22,5^\circ$, $\cos 22,5^\circ = 0,92$.

2) Se as projeções fossem tomadas sobre eixos determinados pelas retas pontilhadas, teríamos $P_{log}(x) = \cos x$ e $P_{lig}(x) = \sin x$. Nos eixos do sistema considerado, os valores das abscissas e das ordenadas de qualquer ponto sofrem um acréscimo de uma unidade em relação aos respectivos valores nos eixos pontilhados. Portanto:

$$P_{log}(x) = 1 + \cos x$$

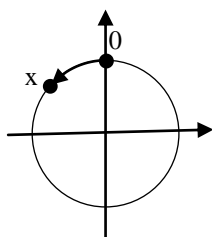
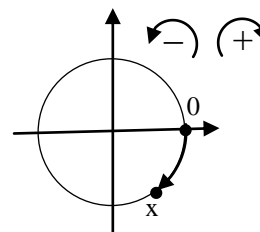


$$P_{lig}(x) = 1 + \sin x$$



3 solução

Os pontos correspondentes aos números reais x , com a circunferência tendo o sentido invertido, seriam os pontos correspondentes aos números reais $-x$, da circunferência trigonométrica que usamos. Como $\cos x = \cos(-x)$, o gráfico da função $f(x) = \cos x$ não sofreria alteração. Por sua vez, $\sin x = -\sin(-x)$, o que faz com que o gráfico da função $g(x) = \sin x$ sofra uma reflexão em relação ao eixo das abscissas.



Os pontos correspondentes aos números x , com a origem da circunferência no ponto de interseção com o eixo das ordenadas, corresponderiam aos pontos associados aos reais $x + \pi/2$, da circunferência que usamos. Temos

$$\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin \alpha \quad \text{e} \quad \sin(\alpha + \pi/2) = \cos \alpha$$

Assim, o gráfico da função $f(x) = \cos x$, na nova circunferência trigonométrica, coincidiria com o gráfico da função $f(x) = -\sin x$, da circunferência que usamos. O gráfico da função $g(x) = \sin x$, na nova circunferência, coincidiria com o gráfico da função $g(x) = \cos x$, da circunferência que usamos.