

**INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA**

**AVALIAÇÃO - PAPMEM**

26 de janeiro de 2012

Nome: \_\_\_\_\_

**Questão 1** (valor: 2,0)

Verifique se o número  $x = \sqrt{7 + \sqrt{24}} - \sqrt{7 - \sqrt{24}}$  é racional ou irracional.

**Questão 2** (valor: 2,0)

A função quadrática  $f$  é tal que  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 8$  e  $f(3) = 27$ . Determine  $f(4)$ .

**Questão 3** (valor: 2,0)

Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \max\{2x + 5, (x + 1)^2\}$ , ou seja, para cada  $x$  real,  $f(x)$  é o maior entre os números  $2x + 5$  e  $(x + 1)^2$ .

Determine a imagem de  $f$ .

**Questão 4** (valor: 2,0)

Dado  $a > 1$ , mostre que existe um número real  $x$  tal que  $a^x$  é maior do que um milhão.

**Questão 5** (valor: 2,0)

Seja  $X$  o conjunto dos números naturais diferentes de 10. Obtenha uma função bijetiva  $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ .

# INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

## SOLUÇÕES - AVALIAÇÃO - PAPMEM

26 de janeiro de 2012

### Questão 1

É claro que  $x > 0$ .

$$x^2 = 7 + 7 - 2\sqrt{(7 + \sqrt{24})(7 - \sqrt{24})} = 14 - 2\sqrt{25} = 4.$$

Logo,  $x = 2$  (racional).

### Questão 2

Seja  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Substituindo os dados temos:

$$a + b + c = 1$$

$$4a + 2b + c = 8$$

$$9a + 3b + c = 27$$

Resolvendo, encontramos  $a = 6$ ,  $b = -11$  e  $c = 6$ .

Assim,  $f(x) = 6x^2 - 11x + 6$  e  $f(4) = 58$ .

### Questão 3

Determinamos os pontos comuns entre os gráficos de

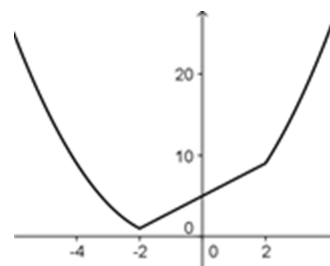
$$y = 2x + 5 \text{ e } y = (x - 1)^2.$$

$$x^2 + 2x + 1 = 2x + 5 \Rightarrow x = \pm 2.$$

Os pontos comuns são  $(-2, 1)$  e  $(2, 9)$ .

O gráfico de  $f$  está ao lado.

A imagem de  $f$  é o intervalo  $[1, +\infty)$ .



### Questão 4

Temos  $a = 1 + d$ , com  $d > 1$ . Pela desigualdade de Bernoulli (ou pelo binômio de Newton),  $(1 + d)^n > 1 + nd$ . Assim, para termos  $a^n > 10^6$  basta tomar  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $1 + nd > 10^6$ , ou seja  $n > (10^6 - 1)/d$ . A resposta é: basta tomar  $n \in \mathbb{N}$  maior do que  $\frac{(10^6 - 1)}{(a - 1)}$ .

### Questão 5

Definição da bijeção  $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ :

Se  $n$  é um número natural menor do que 10 (isto é,  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ , ou 9), ponha  $f(n) = n$ . Para  $n \geq 10$ , ponha  $f(n) = n + 1$ . Então  $f: \mathbb{N} \rightarrow X$  é uma bijeção.