Uma Introdução a Soluções de Viscosidade para Equações de Hamilton-Jacobi

Publicações Matemáticas

Uma Introdução a Soluções de Viscosidade para Equações de Hamilton-Jacobi

Helena J. Nussenzveig Lopes
UNICAMP

Milton C. Lopes Filho
UNICAMP

impa

Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Noni Geiger / Sérgio R. Vaz

Publicações Matemáticas

- Introdução à Análise Funcional – César R. de Oliveira
- Introdução à Topologia Diferencial – Elon Lages Lima
- Les Équations Différentielles Algébriques et les Singularités Mobiles – Ivan Pan e Marcos Sebastiani
- Criptografia, Números Primos e Algoritmos – Manoel Lemos
- Introdução à Economia Dinâmica e Mercados Incompletos – Aloísio Araújo
- Conjuntos de Cantor, Dinâmica e Aritmética – Carlos Gustavo Moreira
- Geometria Hiperbólica – João Lucas Marques Barbosa
- Introdução à Economia Matemática – Aloísio Araújo
- Superfícies Mínimas – Manfredo Perdigão do Carmo
- The Index Formula for Dirac Operators: an Introduction – Levi Lopes de Lima
- Introduction to Symplectic and Hamiltonian Geometry – Ana Cannas da Silva
- Primos de Mersenne (e outros primos muito grandes) – Carlos Gustavo T. A. Moreira e Nicolau Saldanha
- The Contact Process on Graphs – Márcia Salzano
- Canonical Metrics on Compact almost Complex Manifolds – Santiago R. Simanca
- Introduction to Toric Varieties – Jean-Paul Brasselet
- Birational Geometry of Foliations – Marco Brunella
- Introduction to Nonlinear Dispersive Equations – Felipe Linares e Gustavo Ponce
- Introdução à Teoria das Probabilidades – Pedro J. Fernandez
- Teoria dos Corpos – Otto Endler
- Introdução à Dinâmica de Aplicações do Tipo Twist – Clodoaldo G. Ragazzo, Mário J. Dias Carneiro e Salvador Addas Zanata
- Elementos de Estatística Computacional usando Plataformas de Software Livre/Gratuito - Alejandro C. Frery e Francisco Cribari-Neto
- Uma Introdução a Soluções de Viscosidade para Equações de Hamilton-Jacobi - Helena J. Nussenzveig Lopes, Milton C. Lopes Filho

Distribuição:
IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
E-mail: ddic@impa.br - http://www.impa.br
ISBN: 85-244-0123-0

Contents

Introdução

Esta monografia consiste de uma introdução à noção de solução de viscosidade, no contexto de equações de Hamilton-Jacobi. A definição de solução de viscosidade que vamos tratar é uma elaboração da definição introduzida por M. Crandall e P.-L. Lions, [5], em 1983 para equações de Hamilton-Jacobi e posteriormente estendida a uma vasta classe de equações diferenciais parciais fortemente não-lineares, particularmente de natureza elíptica ou parabólica. Esta é uma área de pesquisa ativa e de importância crescente em equações diferenciais parciais.

As equações de Hamilton-Jacobi são equações de primeira ordem do tipo $F(x, u, \nabla u) = 0$, que aparecem naturalmente em mecânica clássica, em teoria de controle ótimo determinística e em teoria dos jogos. A aplicação em teoria de controle desempenhou um papel importante no desenvolvimento da teoria, dando origem a algumas das idéias centrais e fornecendo uma classe interessante de problemas modelo, veja [19]. Além de fornecer o ponto de partida histórico para o desenvolvimento da teoria de soluções de viscosidade, as equações de Hamilton-Jacobi são um contexto natural para uma introdução a esta teoria. As idéias básicas estão presentes de forma não-trivial. Além disso, em contraposição à teoria geral de soluções de viscosidade para equações de segunda ordem, os aspectos técnicos ficam consideravelmente simplificados.

Sob um ponto de vista mais amplo, esta monografia tem a intenção de introduzir alguns dos temas, preocupações e dificuldades fundamentais no estudo de soluções fracas de equações diferenciais parciais não-lineares. Um dos desenvolvimentos centrais em equações diferenciais parciais neste século foi a teoria de distribuições de L. Schwartz, que possibilitou o tratamento rigoroso de soluções de equações diferenciais parciais com pouca regularidade, ampliando o próprio conceito de derivada. Existem dificuldades quase intransponíveis em se estender para equações não-lineares o sucesso alcançado pela teoria de distribuições em equações lineares. O interesse prático de definir e trabalhar com soluções "irregulares" de equações diferenciais parciais não-lineares (ondas de choque, fenômenos turbulentos, meios materiais de natureza irregular ou fractal, ruído aleatório, condições iniciais singulares, entre outros) tem motivado um esforço continuado por desenvolver técnicas capazes de dar sentido e de estudar propriedades destas soluções. Entretanto, a pesquisa nesta área necessita em geral de ferramentas analíticas bastante sofisticadas, utilizando idéias de teoria da medida, espaços de Sobolev, análise harmônica, operadores pseudo-diferenciais, entre outros.

A teoria de soluções de viscosidade para equações de Hamilton-Jacobi é uma exceção notável precisamente neste aspecto. Veremos que é possível desenvolver uma teoria completa e poderosa fazendo uso de técnicas elementares de análise real. Neste contexto específico é possível desenvolver uma teoria sofisticada do ponto de vista de equações diferenciais parciais não-lineares sem depender de um pesado arcabouço analítico desenvolvido previamente ou concorrentemente. Este texto pretende, em princípio, ser acessível a um aluno de mestrado que tenha feito cursos de análise em várias variáveis, de equações diferenciais ordinárias e que tenha sido exposto à integral de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. Um curso básico de equações diferenciais parciais, a nível de graduação ou mestrado, torna as questões tratadas aqui mais naturais. O principal pré-requisito que este assunto exige é a maturidade matemática, possibilitando a apreensão de alguns conceitos pouco familiares e razoavelmente sofisticados. Nosso público alvo são alunos de pós-graduação com interesse em equações diferenciais parciais e especialistas na área que desejem uma introdução rápida às soluções de viscosidade.

O material coberto nestas notas, no que diz respeito às soluções de viscosidade, apareceu entre os anos de 1983 e 1986. Os pioneiros desta teoria foram M. Crandall, P.-L. Lions, L. C. Evans e H. Ishii. Os resultados sobre soluções de viscosidade que apresentamos aqui são devidos a estes autores e as referências básicas que utilizamos na elaboração deste material são: [3, 5, 6, 8, 12, 15, 19]. Para uma introdução ao estado da arte posterior, veja [4]. Os autores também recomendam que o leitor interessado assista o videotape de uma palestra de 80 minutos, proferida por M. Crandall em 1991, e editada pela A.M.S. [2]. Um assunto que teria lugar natural neste texto são as técnicas de aproximação numérica de soluções de viscosidade. A decisão de omitir este material foi arbitrária; referimos contudo as leitoras interessadas ao artigo [7] para uma introdução ao tema.

Vamos fazer uma observação sobre notação. No decorrer desta monografia, utilizamos diversas notações para derivadas. Derivadas parciais são denotadas alternativamente $\partial/\partial s$ ou $(\cdot)_s$ e derivadas em uma variável por d/ds ou $\dot{()}$. Um abuso de notação que cometeremos com alguma frequência é denotar o gradiente de uma função $H = H(p,x)$, com p, $x \in I\!R^n$, por $(\partial H/\partial p, \partial H/\partial x)$.

O conteúdo desta monografia encontra-se dividido da seguinte maneira: No Capítulo 1 fazemos uma introdução à teoria de controle ótimo, que serve de motivação e fonte de exemplos para a teoria que se segue. No Capítulo 2, desenvolvemos a teoria de soluções fracas para o caso de Hamiltoniana autônoma e convexa. No Capítulo 3, introduzimos a noção de solução de viscosidade e provamos algumas de suas propriedades básicas. No Capítulo 4, demonstramos unicidade e dependência contínua nos dados iniciais. No Capítulo 5, demonstramos velocidade finita de propagação de informação, estabelecemos a conexão da teoria desenvolvida com o problema de controle ótimo e ampliamos a discussão sobre a questão de existência. Por fim, incluímos alguns exercícios, que são citados frequentemente no texto.

Esta monografia é uma ampliação das notas de um minicurso ministrado pelos autores na UFPb - João Pessoa em junho de 1995 e no 42o. Seminário Brasileiro de Analise. Esta versão das notas se encontra publicada nas atas do 42o. SBA. A presente redação corresponde, aproximadamente, ao conteúdo de um minicurso, em seis palestras de 90 minutos, ministrado no programa de verão do Instituto de Matemática Pura e Aplicada, em fevereiro de 1996.

Os autores agradecem a L. Craig Evans, pela sua generosa permissão para reelaborar, e em algumas instâncias, traduzir material contido em [8]. Mais ainda, os autores têm uma profunda dívida intelectual para com Prof. Evans, pelo seu ponto de vista sobre soluções de viscosidade e sobre equações diferenciais parciais não-lineares em geral, que absorveram tanto por convívio pessoal como por estudar e ensinar equações diferenciais através de [8]. Devemos também agradecer a Hitoshi Ishii, por ter gentilmente atendido a nossas dúvidas. A exposição sobre o método de Perron contida na Seção 5.3 foi baseada de perto em suas sugestões.

Os autores também agradecem a Marcelo M. Santos e Rafael Iório Jr. pelas oportunidades de apresentar este material em minicursos, ao Departamento de Matematica da UFPb-J.Pessoa e ao IMPA pela acolhedora hospitalidade, à datilografia técnica do IMECC-UNICAMP, pelo excelente trabalho em transcrever a versão anterior desta monografia a partir de um original manuscrito e ao CNPq, pelos diversos financiamentos envolvidos na elaboração desta monografia.

Chapter 1

Teoria de controle ótimo

Este capítulo é uma introdução sumária à teoria de controle ótimo, direcionada ao papel que equações de Hamilton-Jacobi desempenham nesta teoria. Os objetivos centrais são de introduzir um contexto de aplicações para a teoria de soluções fracas que desenvolveremos nestas notas e ilustrar a origem de algumas das idéias no desenvolvimento desta teoria.

As equações de Hamilton-Jacobi são equações diferenciais parciais de primeira ordem cuja característica predominante é encontrar-se derivadas espaciais da função incógnita inseridas na não-linearidade. Vamos nos concentrar em um tipo específico de problema de valor inicial, para equações de Hamilton-Jacobi, com uma estrutura de equação de evolução, como descrevemos abaixo.

Sejam $x = (x_1, \ldots, x_n) \in I\!R^n$, $H : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R$ contínua. O problema de valor inicial para a equação de Hamilton-Jacobi no nosso contexto é:

$$\begin{cases} u_t + H(\nabla u, x) = 0, & \text{em } I\!R^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = g(x) & \text{em } I\!R^n \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde o dado inicial $g : I\!R^n \to I\!R$ é uma função contínua. Chamamos a função H de *Hamiltoniana* da equação. Uma solução clássica de (1.1) é uma função $u : I\!R^n \times [0, \infty) \to I\!R$, de classe $C^1(I\!R^n \times (0, \infty)) \cap C^0(I\!R^n \times [0, \infty))$ que satisfaz o problema (1.1).

Antes de mais nada, vamos introduzir os conceitos básicos de controle ótimo e determinar em que sentido a solução do problema acima é relevante em teoria do controle ótimo.

1.1 Controle ótimo

O problema de controle ótimo, formulado de maneira vaga, consiste de determinar uma estratégia para guiar um sistema, de maneira a otimizar um dado funcional custo ou valor. Este tipo de problema aparece naturalmente quando se deseja gerenciar um sistema de forma eficiente, por exemplo, na exploração econômica de recursos renováveis, no gerenciamento de uma unidade de produção industrial ou na administração de uma economia. Do ponto de vista matemático, problemas de controle ótimo podem tomar diversas formas e incorporar diversos níveis de complexidade, dependendo de quão realístico seja o modelo em questão. Vamos nos utilizar de um problema modelo idealizado, para introduzir as idéias que nos interessam da forma mais simples possível.

Vamos considerar o seguinte problema específico de controle ótimo.

Seja $A \subset I\!R^m$ compacto e $f : I\!R^n \times A \to I\!R^n$ uma função contínua, Lipschitz na primeira variável, uniformemente na segunda. Considere a equação diferencial ordinária com fluxo f:

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = f(x(s), a) \\ x(t) = x. \end{cases}$$

Esta equação é entendida como a equação que descreve a evolução do sistema que se deseja controlar, através de um programa que varie o parâmetro a de forma conveniente no tempo. A variável x representa um conjunto de valores descrevendo o estado do sistema, de modo que esta equação diferencial ordinária é chamada de equação de estado do problema de controle.

Para formular o nosso problema de controle ótimo primeiramente especificamos uma classe de controles admissíveis, que é interessante tomar a mais abrangente possível. Defina o conjunto de controle admissíveis:

$$\mathcal{A} = \{\alpha : [0, T] \to A \text{ tal que } \alpha(\cdot) \text{ é Lebesgue mensurável.}\}$$

A equação de estado passa a ter a forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = f(x(s), \alpha(s)) \quad \text{qtp para } s \in (t, T); \alpha \in \mathcal{A} \\ x(t) = x. \end{cases} \tag{1.2}$$

Para cada controle admissível $\alpha \in \mathcal{A}$ o sistema possui uma única solução $x(\cdot)$, absolutamente contínua, definida no intervalo $[t, T]$ (Exercício 2). Vamos chamar $x(\cdot)$ de *resposta do sistema ao controle* α.

O objetivo do problema de controle ótimo é determinar um controle $\alpha^* \in \mathcal{A}$ que guie o estado $x(\cdot)$ de modo a minimizar um dado funcional custo. Introduzimos um funcional custo da forma:

$$C_{x,t}[\alpha] = \int_t^T h(x(s), \alpha(s))ds + g(x(T)).$$

Este é chamado um problema com horizonte de planejamento finito.

A função $h : I\!R^n \times A \to I\!R$ é chamada de custo operacional e a função $g : I\!R^n \to I\!R$ é chamada de custo terminal. Por razões técnicas, vamos assumir que elas satisfazem as seguintes propriedades:

$$h \in C^0(I\!R^n \times A), \; g \in C^0(I\!R^n)$$

$$|h(x,a)|, \; |g(x)| \leq C$$

$$|h(x,a) - h(y,a)|, \; |g(x) - g(y)| \leq C|x-y|, \; x, y \in I\!R^n, a \in A.$$

As constantes acima são independentes de a.

Dados um estado $x_0 \in I\!R^n$ e tempo de partida $t_0 \leq T$ queremos, se possível, encontrar o controle α^* que minimize o funcional custo entre todos os controles admissíveis. Formulamos isto da seguinte maneira.

Problema:

$$\begin{array}{l} \text{Ache } \alpha^* \in \mathcal{A} \text{ tal que:} \\ C_{x_0,t_0}[\alpha^*] = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} C_{x_0,t_0}[\alpha]. \end{array} \tag{1.3}$$

Nosso ponto de partida para o estudo deste problema é uma análise informal do ponto de vista do cálculo de variações. Vamos tratar a equação de estado como um vínculo do problema, por uma técnica análoga à dos multiplicadores de Lagrange. Introduzimos uma função incógnita adicional $p = p(s)$ no problema, que desempenhará o papel de multiplicador de Lagrange. A função p é chamada variável de co-estado em teoria do controle. O funcional estendido tem a forma:

$$I(x, \alpha, p) = \int_{t_0}^T h(x, \alpha) - p \cdot (\dot{x} - f(x, \alpha)) \, ds + g(x(T)).$$

A análise é informal porque vamos assumir suficiente suavidade das funções f, h e g, e das incógnitas x, α e p de modo que o funcional I esteja bem definido e que a derivação das equações de Euler-Lagrange abaixo possa ser realizada. Assume-se tambem que $x(t_0) = x_0$.

Considere x^*, α^* e p^* um mínimo de I e tome variações $\phi_i = \phi_i(s)$, com $i = 1, 2, 3$, suaves, definidas no intervalo $[t_0, T]$, com $\phi_1(t_0) = 0$. Defina $x^\varepsilon = x^* + \varepsilon\phi_1$, $\alpha^\varepsilon = \alpha^* + \varepsilon\phi_2$, e $p^\varepsilon = p^* + \varepsilon\phi_3$. Defina também $i(\varepsilon) \equiv I(x^\varepsilon, \alpha^\varepsilon, p^\varepsilon)$. Portanto,

$$\frac{di}{d\varepsilon} = \int_{t_0}^{T} \frac{\partial h}{\partial x}\phi_1 + \frac{\partial h}{\partial a}\phi_2 - (\dot{x}^\varepsilon - f)\phi_3 - p^\varepsilon(\dot{\phi}_1 - \frac{\partial f}{\partial x}\phi_1 - \frac{\partial f}{\partial a}\phi_2)ds + \frac{\partial g}{\partial x}(x^\varepsilon(T))\phi_1(T).$$

Integramos por partes o termo $-p^\varepsilon\dot{\phi}_1$. O termo de fronteira correspondente a $s = t_0$ se anula pois assumimos que $\phi_1(t_0) = 0$. O termo de fronteira correspondente a $s = T$ é incorporado ao termo do custo final, fora da integral. Coletamos os termos envolvendo cada uma das funções teste na integral e fazemos $\varepsilon = 0$. Como x^*, α^* e p^* são um mínimo, a expressão resultante se anula, isto é:

$$0 = \left.\frac{di}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} =$$

$$\int_{t_0}^{T} \phi_1\left(\frac{\partial h}{\partial x}(x^*, \alpha^*) + p^*\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, \alpha^*) + \dot{p}^*\right) + \phi_2\left(\frac{\partial h}{\partial a}(x^*, \alpha^*) + p^*\frac{\partial f}{\partial a}(x^*, \alpha^*)\right) +$$

$$+\phi_3\left(-\dot{x}^* + f(x^*, \alpha^*)\right) ds + \phi_1(T)\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(T)) - p^*(T)\right).$$

Tomando-se $\phi_1 = \phi_2 = 0$ e ϕ_3 arbitrário, recupera-se a equação de estado:

$$\dot{x}^* = f(x^*, \alpha^*).$$

Fazendo-se agora $\phi_1 = 0$ e tomando-se ϕ_2 arbitrário, obtém-se uma relação entre x^*, α^* e p^* que é chamada *condição de otimalidade*:

$$\frac{\partial h}{\partial a}(x^*, \alpha^*) + p^*\frac{\partial f}{\partial a}(x^*, \alpha^*) = 0.$$

Agora, com ϕ_1 com $\phi_1(T) = 0$ arbitrário, obtem-se a *equação de co-estado*:

$$\dot{p}^* = -\frac{\partial h}{\partial x}(x^*, \alpha^*) - p^*\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, \alpha^*).$$

Finalmente, tomando-se ϕ_1 com $\phi_1(T) \neq 0$ obtem-se uma instância da *condição de transversalidade*:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(T)) - p^*(T) = 0.$$

Se a condição de otimalidade puder ser utilizada para exprimir $\alpha^* = \alpha^*(x^*, p^*)$, poderemos reorganizar estas relações em um sistema de equações diferenciais ordinárias, que assumirá a forma:

$$\begin{cases} \dot{x}^* & = f(x^*, \alpha^*(x^*, p^*)) \\ \\ \dot{p}^* & = -\dfrac{\partial h}{\partial x}(x^*, \alpha^*(x^*, p^*)) - p^* \dfrac{\partial f}{\partial x}(x^*, \alpha^*(x^*, p^*)) \\ \\ & x^*(t_0) = x_0; \quad p^*(T) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(x^*(T)) \end{cases} \tag{1.4}$$

Defina a função H por:

$$H(p, x) = \min_{a \in A} \{h(x, a) + p \cdot f(x, a)\}. \tag{1.5}$$

Se supusermos que o mínimo acima é atingido em um único ponto $a = a(x, p)$, que depende suavemente de x e p, então o sistema (1.4) é Hamiltoniano, com Hamiltoniana H. De fato, se $a = a(x, p)$ é o ponto de mínimo na definição de H, derivamos a expressão $h + p \cdot f$ com respeito a a e concluimos que:

$$\frac{\partial h}{\partial a}(x, a) = -p \cdot \frac{\partial f}{\partial a}(x, a).$$

Isto é precisamente a condição de otimalidade, de modo que podemos concluir que, para qualquer $s \in [t_0, T]$, $a(x^*, p^*) = \alpha^*(x^*, p^*)$.

Temos que:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial h}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Temos também que:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial h}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial p} + f(x, a) + p \cdot \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial p} = f(x, a).$$

Portanto, avaliando estas identidades em x^*, p^* segue-se que o sistema (1.4) assume a forma:

$$\begin{cases} \dot{x}^* & = \dfrac{\partial H}{\partial p}(p^*, x^*) \\ \\ \dot{p}^* & = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(p^*, x^*). \end{cases} \tag{1.6}$$

Observamos que as situações onde esta análise informal pode ser tornada rigorosa são, de certa forma, as situações onde o problema de controle ótimo é trivial. A solução do problema depende apenas de resolver o sistema (1.4), o que em certas situações de interesse pode ser feito de maneira explícita. Sob o ponto de vista de teoria do controle, nosso interesse é de obter resultados em situações onde esta análise não é válida. Neste sentido, esta discussão informal servirá tambem para motivar o tratamento rigoroso que se segue.

1.2 Programação dinâmica

O método de programação dinâmica consiste de estudar o problema de controle ótimo através da função valor:

$$u(x,t) = \inf_{\alpha(\cdot)\in\mathcal{A}} C_{x,t}[\alpha].$$

Primeiramente recordemos as hipóteses que fizemos na seção 1.1 sobre o problema (1.3):

1. O conjunto $A \subset I\!R^m$ é compacto, e consequentemente, os controles são $L^\infty([t,T];A)$.

2. O fluxo $f \in C^0(I\!R^n \times A)$ é Lipschitz na primeira variável, uniformemente na segunda variável.

3. As funções h e g são contínuas, uniformemente limitadas e Lipschitz na variável de estado, uniformemente no controle.

Com estas hipóteses, segue-se que a função valor é limitada inferiormente. De fato, basta observar que a trajetória $x(\cdot)$ não sai de um compacto, independente do controle α, pelo Lema de Gronwall (Exercício 4).

Uma propriedade fundamental da função valor é chamada *princípio de programação dinâmica*, que se traduz na idéia de que, para otimizar, é necessário otimizar a cada instante. Rigorosamente isto é expresso no Teorema abaixo, devido a R. Bellman [1].

Teorema 1.1 *Seja $\delta > 0$ tal que $\delta \leq T - t$. Temos:*

$$u(x,t) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \int_t^{t+\delta} h(x(s), \alpha(s))ds + u(x(t+\delta), t+\delta) \right\}, \tag{1.7}$$

onde $x(s)$ é a resposta do sistema (1.2) ao controle $\alpha(s)$.

Demonstração: Escolha um controle $\alpha_1 \in \mathcal{A}$ e resolva a equação diferencial ordinária:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1(s), \alpha_1(s)) & \text{qtp para } t < s < t+\delta \\ x_1(t) = x. \end{cases}$$

Escolha um outro controle $\alpha_2 \in \mathcal{A}$ tal que, dado $\varepsilon > 0$,

$$u(x_1(t+\delta), t+\delta) + \varepsilon \geq \int_{t+\delta}^T h(x_2(s), \alpha_2(s))ds + g(x_2(T)),$$

onde

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = f(x_2, \alpha_2) & \text{qtp para } t+\delta < s < T \\ x_2(t+\delta) = x_1(t+\delta). \end{cases}$$

Defina o controle

$$\alpha_3(s) = \begin{cases} \alpha_1(s), & t \leq s \leq t+\delta \\ \alpha_2(s), & t+\delta \leq s \leq T. \end{cases}$$

Seja

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = f(x_3, \alpha_3) & t < s < T \\ x_3(t) = x. \end{cases}$$

Por unicidade,

$$x_3(s) = \begin{cases} x_1(s), & t \leq s \leq t+\delta \\ x_2(s), & t+\delta \leq s \leq T. \end{cases}$$

Portanto, temos:

$$u(x,t) \leq C_{x,t}[\alpha_3] = \int_t^T h(x_3(s), \alpha_3(s))ds + g(x_3(T)) =$$

$$= \int_t^{t+\delta} h(x_1(s),\alpha_1(s))ds + \int_{t+\delta}^T h(x_2(s),\alpha_2(s))ds + g(x_2(T)) \leq$$

$$\leq \int_t^{t+\delta} h(x_1(s),\alpha_1(s))ds + u(x_1(t+\delta),t+\delta) + \varepsilon.$$

Logo, já que α_1 é arbitrário,

$$u(x,t) \leq \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \left\{ \int_t^{t+\delta} h(x(s),\alpha(s))ds + u(x(t+\delta),t+\delta) \right\} + \varepsilon.$$

Fixando ε novamente positivo, escolha $\alpha_4 \in \mathcal{A}$ tal que

$$u(x,t) + \varepsilon \geq \int_t^T h(x_4(s),\alpha_4(s))ds + g(x_4(T)), \text{ onde}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_4 = f(x_4(s),\alpha_4(s)) & t < s < T \\ x_4(t) = x. \end{cases}$$

Portanto, $u(x_4(t+\delta),t+\delta) \leq \int_{t+\delta}^T h(x_4(s),\alpha_4(s))ds + g(x_4(T))$.

Consequentemente,

$$u(x,t) + \varepsilon \geq \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \left\{ \int_t^{t+\delta} h(x(s),\alpha(s))ds + u(x(t+\delta),t+\delta) \right\}.$$

Da arbitrariedade de ε, concluímos a demonstração.

■

Vamos utilizar este resultado para deduzir a equação de programação dinâmica de modo informal. Esta equação também é conhecida como equação de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Este é um caso particular de equação de Hamilton-Jacobi, que é satisfeita pela função valor.

Fixe $\delta > 0$. Da relação (1.7) segue-se que:

$$\frac{1}{\delta}\left(\inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \int_t^{t+\delta} h(x,\alpha)ds + u(x(t+\delta),t+\delta) - u(x,t) \right) +$$

$$+ \frac{u(x,t+\delta) - u(x,t+\delta)}{\delta} = 0.$$

Reescrevemos a relação acima da seguinte maneira:

$$\frac{u(x,t+\delta)-u(x,t)}{\delta}+$$

$$+\inf_{\alpha\in\mathcal{A}}\left\{\frac{1}{\delta}\int_t^{t+\delta}h(x,\alpha)ds+\frac{u(x(t+\delta),t+\delta)-u(x,t+\delta)}{\delta}\right\}=0.$$

Se u for suave, tomamos o limite quando $\delta\to 0$ e obtemos:

$$u_t+\inf_{a\in A}\{h(x,a)+\nabla u\cdot f(x,a)\}=0.$$

Portanto, tomando precisamente a função $H=H(p,x)$, definida em (1.5) e que apareceu naturalmente na formulação variacional do problema de controle ótimo, obtemos o seguinte problema de valor terminal para a função valor:

$$\begin{cases} u_t+H(\nabla u,x)=0 & \text{em } I\!R^n\times(t,T)\\ u(x,T)=g(x) & \text{em } I\!R^n\times\{t=T\},\end{cases} \tag{1.8}$$

A função valor incorpora uma parte importante da solução do problema de controle ótimo: o menor custo possível para guiar o sistema. De posse da função valor, resta apenas determinar uma estratégia que guie o sistema de modo a atingir este custo mínimo, exata ou aproximadamente. Esta segunda etapa chama-se a síntese do controle ótimo. O estudo das propriedades básicas da função valor se presta a um tratamento analítico no contexto de uma teoria geral. Por contrapartida, o problema de sintetizar um controle ótimo é mais delicado, necessitando de uma análise detalhada do problema de controle específico sob consideração. Contudo, conhecimento prévio da estrutura da função valor também é útil na resolução deste problema. Ilustramos isto com a construção de controles por "feedback", que apresentamos informalmente a seguir. Para mais detalhes, veja [12].

Dados $0\le t\le T$ e um estado inicial $x\in I\!R^n$ considere a equação de estado:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(s)=f(x^*(s),a^*(s)) & \text{qtp } t<s<T\\ x^*(t)=x,\end{cases}$$

construída de forma que, a cada tempo s, o controle $\alpha^*(s)$ é selecionado de modo que:

$$f(x^*(s),\alpha^*(s))\cdot\nabla u(x^*(s),s)+h(x^*(s),s)=H(\nabla u(x^*(s),s),x^*(s)).$$

Em outras palavras, ajustamos $\alpha^*(s)$ de modo a atingir o mínimo na definição da Hamiltoniana H, sabendo que o sistema está em $x^*(s)$ no tempo s. Chama-se o controle α^* construído desta maneira de *controle por feedback.*

É fácil provar que o controle por feedback gera uma trajetória de custo mínimo, pelo menos em regiões onde a função valor u for suave (Exercício 5). É claro que haverá problemas em interpretar a condição de feedback onde u não for suave.

1.3 O método de características

Nesta seção vamos estudar existência local para (1.1), o problema de valor inicial para a equação de Hamilton-Jacobi. Vamos assumir que a Hamiltoniana H e o dado inicial g sejam suaves (pelo menos duas vezes diferenciáveis).

Apesar de tratarmos apenas o problema de valor inicial para a equação de Hamilton-Jacobi, nossa análise também se aplica a problemas de valor terminal, tais como (1.8). De fato, se $u = u(x,t)$ é solução de $u_t + H(\nabla u, x) = 0$, com $u(x,T) = g(x)$, então $v(x,t) = u(x, T-t)$ satisfaz $v_t + G(\nabla v, x) = 0$, $v(x,0) = g(x)$, com $G = -H$.

O método de características, quando aplicado a equações diferenciais parciais de primeira ordem, consiste de encontrar uma solução resolvendo-se uma família de equações diferenciais ordinárias. Seja $u(x,t)$ uma solução clássica de (1.1) que, por um momento, suporemos ser duas vezes diferenciável.

Considere $q(s)$ solução do sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \dot{q}(s) = \dfrac{\partial H}{\partial p}(\nabla u(q(s), s), q(s)) \\ \\ q(0) = x_0 \in I\!R^n. \end{cases}$$

A curva $(q(s), s)$ em $I\!R^n \times (0, \infty)$ é chamada *característica projetada* de (1.1). Vamos verificar que (1.1) escreve-se como uma família de equações diferenciais ordinárias sobre essas curvas. Defina $p(s) = \nabla u(q(s), s)$. Então:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds}(u(q(s), s) = \nabla u(q(s), s) \cdot \dot{q}(s) + u_s(q(s), s) \\ &= p(s) \cdot \frac{\partial H}{\partial p}(p(s), q(s)) - H(p(s), q(s)), \end{aligned} \tag{1.9}$$

pois u é solução de (1.1).

Diferenciando (1.1) em relação a x_i vem:

$$(u_{x_i})_t = \left(\sum_{j=1}^{n} -\frac{\partial H}{\partial p_j}(\nabla u, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) - \frac{\partial H}{\partial q_i}(\nabla u, x).$$

Logo,

$$\frac{d}{ds}(p_i(s)) = \frac{d}{ds}(u_{x_i}(q(s), s)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(q(s), s)\dot{q}_j(s) + (u_{x_i})_s =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} u_{x_i x_j}\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j}(\nabla u, x)\ u_{x_i x_j} \right) - \frac{\partial H}{\partial q_i}(\nabla u, x) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(p(s), q(s)).$$

Concluimos que as funções $q(\cdot)$ e $p(\cdot)$ definidas acima satisfazem o sistema fechado de $2n$ equações diferenciais ordinárias dado por:

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p}(p, q) \\ \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q}(p, q) \\ \\ q(0) = x_0,\ p(0) = \nabla g(x_0). \end{cases} \tag{1.10}$$

O sistema (1.10) é chamado de sistema de equações características para (1.1); suas soluções são as *características* de (1.1). Denotaremos por $q(x_0; t)$ e $p(x_0; t)$ as soluções do problema (1.10). Mais ainda, integrando a equação para $u(q(s), s)$, podemos determinar os valores da solução ao longo da característica projetada fazendo:

$$u(q(s), s) = u(x_0) + \int_0^t p(\bar{s}) \cdot \frac{\partial H}{\partial p}(p(\bar{s}), q(\bar{s})) - H(p(\bar{s}), q(\bar{s}))d\bar{s}. \tag{1.11}$$

Gostaríamos de utilizar (1.10) e (1.11) para resolver o problema (1.1).

Precisamos para isto demonstrar três fatos:

1. Para t suficientemente pequeno a aplicação $x_0 \mapsto q(x_0; t)$ é um difeomorfismo.

2. Com $u(x,t)$ e $p(x,t)$ definidos a partir de (1.10) e (1.11) e o difeomorfismo acima, temos que $p(x,t) = \nabla u(x,t)$.

3. A função $u(x,t)$ é solução da equação diferencial parcial.

A demonstração destes fatos está codificada na demonstração do seguinte resultado.

Teorema 1.2 *Dado $x_0 \in I\!R^n \times \{t = 0\}$ existe uma vizinhança U de x_0 em $I\!R^n \times (-\infty, +\infty)$ e uma solução clássica $u(x,t)$ de (1.1) satisfazendo $u(x,0) = g(x)$ em $U \cap \{t = 0\}$.*

Demonstração: Seguiremos o esquema proposto acima.

1. Veja que a equação (1.10) define um fluxo suave, que em tempo $t = 0$ é a identidade. Como o fluxo é contínuo, temos que a aplicação $x_0 \mapsto q(x_0;t)$ tem derivada inversível para t suficientemente pequeno. Pelo Teorema da Aplicação Inversa, $x \mapsto q(x;t)$ é um difeomorfismo, definido numa vizinhança de x_0. Dado t suficientemente pequeno, seja $\Phi^t = \Phi^t(x)$ definido numa vizinhança de $q(x_0;t)$ de modo que $x = q(\Phi^t(x);t)$.

2. Denote $y \equiv \Phi^t(x)$. Defina $\tilde{p}(x,t) = p(y;t)$ e

$$u(x,t) = g(y) + \int_0^t p(y;\bar{s}) \cdot \frac{\partial H}{\partial p}(p(y;\bar{s}), q(y;\bar{s})) - H(p(y;\bar{s}), q(y;\bar{s}))d\bar{s}.$$

Vamos mostrar que $\tilde{p}(x,t) = \nabla u(x,t)$. Seja

$$r(s) = \frac{\partial}{\partial y_i}(u(q(y;s),s)) - \sum_{j=1}^{n} p_j(y;s)\frac{\partial}{\partial y_i}(q_j(y;s)).$$

Primeiro observe que:

$$r(0) = \frac{\partial}{\partial y_i}(u(y,0)) - \sum_{j=1}^{n} p_j(y;0)\frac{\partial y_j}{\partial y_i} = \frac{\partial g}{\partial y_i}(y) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_j}\delta_{ij} = 0.$$

Em seguida, observe que:

$$\dot{r}(s) = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(p(y;s)\cdot\frac{\partial H}{\partial p}(p,q) - H(p,q)\right) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial H}{\partial q_j}(p,q)\frac{\partial}{\partial y_i}(q_j) - p_j(y;s)\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}(p,q)\right)\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial y_i}(p_j)\frac{\partial H}{\partial p_j}(p,q)\right] - \frac{\partial}{\partial y_i}(H(p,q)) + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_j}(p,q)\frac{\partial}{\partial y_i}(q_j) = 0,$$

usando a regra da cadeia no segundo termo da última expressão.

Logo, $r = 0$. Por outro lado,

$$\sum_{j=1}^{n} p_j(y;s)\frac{\partial}{\partial y_i}(q_j) = \frac{\partial}{\partial y_i}(u(q(y;s),s)) = \sum_{j=1}^{n} u_{x_j}(q(y;s),s)\frac{\partial}{\partial y_i}(q_j).$$

Como esta igualdade vale para todo i e a transformação Φ^s é um difeomorfismo, a matriz $\left[\frac{\partial}{\partial y_i}(q_j)\right]_{ij}$ é inversível, e portanto concluimos que $p_j(y;s) = u_{x_j}(q(y;s),s)$ para qualquer j e s, como desejávamos.

3. Finalmente, precisamos mostrar que $u(x,t)$ satisfaz a equação. A fórmula (1.11) nos diz que, ao longo de uma característica temos:

$$\frac{d}{ds}(u(q(y;s),s)) = p\cdot\frac{\partial H}{\partial p}(p,q) - H(p,q) = p\cdot q_s - H.$$

Por outro lado, $\frac{d}{ds}(u(q(y,s),s)) = \nabla u(q(y;s),s)\cdot q_s + \frac{\partial u}{\partial t}(q(y;s),s)$. Contudo, no ítem 2 acima, provamos que $\nabla u(q(y;s),s) = p(y;s)$.

Concluimos que (1.1) é identicamente satisfeita ao longo das características, isto é:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(q(y;s),s) = -H(p(y;s),q(y;s)).$$

$\blacksquare$

Portanto demonstramos que o método de características nos fornece uma solução de (1.1) numa vizinhança do hiperplano $\{t = 0\}$. O argumento usado no Teorema 1.2 deixa claro que o método funciona enquanto o difeomorfismo Φ^t for localmente inversível; a perda da inversibilidade local pode ser interpretada como cruzamento das características projetadas. Em princípio o método de características não nos diz nada sobre a solução local para além deste cruzamento. Vejamos um exemplo ilustrando este colapso do método.

Exemplo 1: Considere para $n = 1$, o problema

$$\begin{cases} u_t + (u_x)^2/2 = 0 \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$

Seja $u(x,t)$ uma solução clássica, em $C^2(I\!R \times (0,T))$.

Defina $v(x,t) = u_x(x,t)$. Vamos obter uma equação para a evolução de $v(\cdot)$. Diferenciamos a equação com respeito a x e obtemos a equação de Burgers:

$$\begin{cases} v_t + (v^2/2)_x = 0 \\ v(x,0) = g'(x). \end{cases}$$

Esta equação é quaselinear, e portanto o sistema característico se reduz a uma única equação diferencial ordinária, que é:

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x,t) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Então, $\dfrac{d}{dt}(v(x(t),t)) = v_x x_t + v_t = v_x v + v_t = (v^2/2)_x + v_t = 0.$

Donde, v é constante ao longo das caraterísticas, portanto as características são linhas retas. A mudança de coordenadas que resolve o problema (análoga ao difeomorfismo Φ do teorema anterior) neste caso pode ser escrita explicitamente:

$$x = y + g'(y)t,$$

onde y é o pé da característica que passa por x em tempo t. Portanto:

$$v(x,t) = v(y,0),$$

e esta transformação deixa de ser inversível quando

$$\frac{d}{dy}(y + g'(y)t) = 0, \text{ o que ocorre em } t = -1/g''(y).$$

Portanto se existir um $y_0 \in I\!R$ onde $g''(y) < 0$ então existirá um tempo positivo em que duas características "se encontram". Observe que $|v_x(x,t)| \to \infty$ quando $t \to -1/g''(y)$ e portanto $v(\cdot)$ tende a ficar descontínua. Consequentemente a solução $u(x,t)$ da equação de Hamilton-Jacobi está perdendo suavidade e ficando, na melhor hipótese, Lipschitz contínua. Evidentemente cria-se uma dificuldade séria em interpretar em que sentido uma função Lipschitz contínua satisfaria a equação. Nesta monografia vamos repensar a noção de solução de modo a resolver esta dificuldade.

Chapter 2

Hamiltoniana autônoma e convexa

Neste capítulo vamos estudar um caso especial de problema de valor inicial para a equação de Hamilton-Jacobi, em que a Hamiltoniana é autônoma, isto é, só depende de p, e é convexa. Veremos que isto corresponde a uma classe de sistemas de controle em que a equação de estado se reduz a $\dot{x} = \alpha$, que são os sistemas controlados pela velocidade.

O resultado principal deste capítulo é um teorema de unicidade, devido a E. Hopf [14], que diz que a função valor, neste caso, é a única solução fraca global da equação de Hamilton-Jacobi correspondente. O sentido de solução fraca terá que ser cuidadosamente especificado. O conteúdo deste capítulo está intimamente relacionado com a teoria de solução fraca de P. Lax e O. Oleinik para leis de conservação com função de fluxo convexa, veja [8].

2.1 Sistemas controlados pela velocidade

Considere o problema de controle com equação de estado:

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = \alpha(s) \; t < s < T \\ x(t) = x. \end{cases} \tag{2.1}$$

O funcional custo é dado por uma função de custo operacional $L(\alpha)$ contínua e convexa e uma função de custo terminal contínua $g = g(x)$, de modo que:

$$C_{x,t}[\alpha] = \int_t^T L(\dot{x})ds + g(x(T)). \tag{2.2}$$

Esta é a formulação como problema de controle ótimo de um problema de cálculo de variações clássico. No contexto de cálculo de variações a função L que introduzimos como custo operacional costuma ser chamada de Lagrangiano do problema. Esta é a terminologia que vamos utilizar no restante deste capítulo.

No caso do problema (2.1,2.2) acima, o conjunto de controles admissíveis que consideraremos será $\mathcal{A} \equiv C^0([t,T], I\!R^n)$. Podemos eliminar o controle α, simplesmente introduzindo um conjunto de trajetórias admissíveis $\tilde{\mathcal{A}} = \{z \in C^1([t,T]) : z(t) = x \text{ e } z(T) = y\}$. Assim, a função valor $u = u(x,t)$ se escreve da seguinte maneira:

$$u(x,t) = \inf_{y \in I\!R^n} \inf_{z \in \tilde{\mathcal{A}}} \left\{ \int_t^T L(\dot{z})ds + g(y) \right\}. \tag{2.3}$$

Proposição 2.1 *Para $x \in I\!R^n$, $t < T$ temos:*

$$u(x,t) = \inf_{y \in I\!R^n} \left\{ (T-t)L\left(\frac{y-x}{T-t}\right) + g(y) \right\}.$$

Demonstração: Para demonstrar isto, basta verificar que:

$$I \equiv \inf_{z \in \tilde{\mathcal{A}}} \int_t^T L(\dot{z})ds = (T-t)L\left(\frac{y-x}{T-t}\right),$$

e utilizar esta informação em (2.3).

Primeiramente tome

$$z(s) = \frac{y-x}{T-t}(s-t) + x,$$

e observe que $z(\cdot) \in \tilde{\mathcal{A}}$. Portanto,

$$I \le \int_t^T L(\dot{z})ds = (T-t)L\left(\frac{y-x}{T-t}\right).$$

A desigualdade no sentido oposto segue da convexidade do Lagrangiano L. De fato, seja $z \in \tilde{\mathcal{A}}$. Pela desigualdade de Jensen (veja [20]) temos:

$$\frac{1}{T-t}\int_t^T L(\dot{z})ds \ge L\left(\frac{1}{T-t}\int_t^T \dot{z}ds\right) = L\left(\frac{y-x}{T-t}\right).$$

Multiplicando por $T-t$ de ambos os lados e tomando o ínfimo sobre $\tilde{\mathcal{A}}$, temos o que queríamos.

∎

Com esta fórmula explícita para a função valor, o problema de controle ótimo está, em príncipio, resolvido. Nosso objetivo agora é estudar o problema de valor inicial para a equação de Hamilton-Jacobi (1.1), no caso de Hamiltoniana autônoma e convexa.

Vimos no capítulo anterior que espera-se que a função valor satisfaça, em algum sentido, o problema de valor terminal para a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman com Hamiltoniana definida em (1.5). No caso dos sistemas controlados pela velocidade estudados acima (2.1,2.2) a expressão para a Hamiltoniana fica:

$$H(p) = \min_{q \in I\!R^n} \{L(q) + p \cdot q\}. \tag{2.4}$$

Como queremos estudar um problema de valor inicial definimos: $\tilde{u}(x,t) = u(x, T-t)$ e $\tilde{L}(q) = L(-q)$ e observamos que $\tilde{u}$ satisfaz, informalmente, o problema de valor inicial para a equação de Hamilton-Jacobi (1.1) com Hamiltoniana

$$\tilde{H}(p) = \max_{q \in I\!R^n} \{p \cdot q - \tilde{L}(q)\}, \tag{2.5}$$

e dado inicial $\tilde{u}(x,0) = g(x)$. A partir deste momento abandonaremos a notação com "til".

A fórmula dada pela Proposição 2.1 nos fornece o seguinte para a solução com o tempo revertido:

$$u(x,t) = \inf_{y \in I\!R^n} \left\{ tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right\}. \tag{2.6}$$

Esta fórmula, no contexto de equações de Hamiton-Jacobi, é conhecida como *fórmula de Hopf-Lax.*

Se interpretarmos o princípio de programação dinâmica, Teorema 1.1, neste contexto, revertendo o tempo como acima, obtemos o resultado expresso no corolário abaixo.

Corolário 2.1 *Para $x \in I\!R^n$, $0 \leq s < t$ temos:*

$$u(x,t) = \min_{y \in I\!R^n} \left\{ (t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + u(y,s) \right\}.$$

A demonstração é deixada como exercício (Exercício 6).

Pode parecer que tenhamos encontrado um candidato natural para solução do problema de valor inicial para a equação (1.1), possivelmente válida para todo o tempo. Entretanto, a situação é bastante insatisfatória. De fato, a relação entre o Lagrangiano L e a Hamiltoniana H não está estabelecida rigorosamente. Mais ainda, esta relação está nos fornecendo a equação diferencial parcial a partir da solução, dada em termos de L. A pergunta natural, e que ainda não foi nem sequer informalmente respondida, é como encontrar a solução dada a equação diferencial parcial e os dados iniciais. Para responder esta pergunta teremos que compreender a conexão entre o Lagrangiano e a Hamiltoniana; este é o objetivo da próxima seção.

2.2 Dualidade convexa

Nesta seção vamos estabelecer a relação precisa entre a Hamiltoniana H e o Lagrangiano L, através da noção de dualidade convexa.

Seja $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, contínua, convexa i.e. tal que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $0 \leq t \leq 1$, $L(tx + (1-t)y) \leq tL(x) + (1-t)L(y)$, e superlinear, isto é:

$$\lim_{|q| \to +\infty} \frac{L(q)}{|q|} = +\infty.$$

Definição 2.1 *Seja $p \in \mathbb{R}^n$. A transformada de Legendre de L em p é:*

$$L^*(p) \equiv \sup_{q \in \mathbb{R}^n} \{p \cdot q - L(q)\}.$$

Observe que este supremo acima é de fato assumido, devido à superlinearidade de L (Exercício 7).

Exemplo: Seja $\alpha > 1$. Se $L(q) = |q|^\alpha$, para $q \in \mathbb{R}$, então

$$L^*(p) = (\alpha - 1) \left| \frac{p}{\alpha} \right|^{\frac{\alpha}{\alpha - 1}}.$$

O próximo resultado estabelece a conexão precisa entre Lagrangianos e suas transformadas de Legendre, mostrando que existe uma relação de dualidade entre eles.

Teorema 2.1 *Suponha que* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *seja* C^1*, convexa e superlinear. Considere sua transformada de Legendre* L^**. Então:*

1. L^* *é contínua, convexa e superlinear.*

2. $L^{**} = L$.

Demonstração:
Começamos por demonstrar a convexidade de L^*. Sejam $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0,1]$. Temos:

$$L^*(tp_1 + (1-t)p_2) = \sup_{q \in \mathbb{R}^n} \{t(p_1 \cdot q - L(q)) + (1-t)(p_2 \cdot q - L(q))\} \leq$$

$$\leq \sup_{q \in \mathbb{R}^n} \{t(p_1 \cdot q - L(q))\} + \sup_{q \in \mathbb{R}^n} \{(1-t)\ (p_2 \cdot q - L(q))\} =$$

$$= tL^*(p_1) + (1-t)L^*(p_2).$$

Continuidade é uma questão mais técnica. Primeiro observe que L^* é localmente limitada. De fato, por um lado, $-L(0) \leq L^*(p)$, para qualquer p. Por outro lado, da superlinearidade de L, segue-se que $p \cdot q - L(q)$ tende a $-\infty$ quando $|q| \to \infty$, uniformemente para p em um compacto. Logo, para qualquer p em um compacto, existe K suficientemente grande tal que $p \cdot q - L(q) \leq 1$, se $|q| \leq K$. Portanto, da continuidade de L:

$$L^*(p) \leq \max \left\{ \max_{|q| \leq K} \{p \cdot q - L(q)\},\ 1 \right\} \leq C,$$

para alguma constante C.

Fixemos $p_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$. Observemos agora que L^* é semicontínua inferiormente, pois é um supremo de funções contínuas (veja [20]). Portanto, existe $\delta > 0$ tal que se $|p - p_0| \leq \delta$ então:

$$L^*(p) \geq L^*(p_0) - \varepsilon.$$

Para mostrar a desigualdade que falta na demonstração de continuidade, utilizaremos a convexidade de L^*.

Seja $M \equiv \max_{|\theta - p_0| = 1} L^*(\theta) - L^*(p_0)$. Seja p tal que $|p - p_0| \leq \delta_0 < 1$. Defina

$$\bar{p} = \frac{p - (1 - |p - p_0|)p_0}{|p - p_0|}.$$

Observe que, fazendo $s = |p - p_0|$ temos $p = s\bar{p} + (1-s)p_0$ e $\bar{p}$ está na esfera de centro p_0 e raio 1. Da convexidade de L^* vem:

$$L^*(p) \leq |p - p_0| L^*(\bar{p}) + (1 - |p - p_0|) L^*(p_0).$$

Disto segue-se que:

$$L^*(p) \leq L^*(p_0) + |p - p_0|(L^*(\bar{p}) - L^*(p_0)) \leq L^*(p_0) + \delta_0 M \equiv L^*(p_0) + \varepsilon,$$

tomando-se $\delta_0 = \varepsilon / M$. Isto prova a continuidade de L^*.

Para demonstrar a superlinearidade, fixe $R > 0$. Então, dado p,

$$L^*(p) \geq p \cdot \frac{Rp}{|p|} - L\left(\frac{Rp}{|p|}\right) \geq$$

$$\geq R|p| - \max_{|q| \leq R} L(q). \text{ Logo, } \frac{L^*(p)}{|p|} \geq R - \frac{1}{|p|} \max_{|q| \leq R} L(q) \text{ e}$$

$$\lim \inf_{|p| \to \infty} \frac{L^*(p)}{|p|} \geq R. \text{ Como } R \text{ é arbitrário, temos o que queríamos.}$$

Para ver que $L(q) = \sup_{p \in \mathbb{R}^n} \{p \cdot q - L^*(p)\}$ observe primeiro que:

$$L(q) \geq p \cdot q - L^*(p) \ \ \forall p, q \in \mathbb{R}^n, \text{ pela definição de } L^*.$$

Tomando o supremo em relação a p, temos que $L(q) \geq L^{**}(q)$.

Por outro lado temos:

$$L^{**}(q) = \sup_{p \in \mathbb{R}^n} \left\{ p \cdot q - \sup_{r \in \mathbb{R}^n} \{p \cdot r - L(r)\} \right\} = \sup_{p \in \mathbb{R}^n} \inf_{r \in \mathbb{R}^n} \{p \cdot (q - r) + L(r)\}.$$

Da hipótese que L é convexa e C^1 vem:

$$L(r) \geq L(q) + \nabla L(q) \cdot (r - q).$$

Logo, $L^{**}(q) \geq \inf_{r \in \mathbb{R}^n} \ \{\nabla L(q) \cdot (q - r) + L(r)\} \geq L(q)$.

$\blacksquare$

Observe que a definição da Hamiltoniana $\tilde{H}$, dado o Lagrangiano $\tilde{L}$, em (2.5), diz que $\tilde{H}$ é precisamente a transformada de Legendre de $\tilde{L}$. Passaremos a denotar a transformada de Legendre L^* por H e a chamaremos de Hamiltoniana associada a L. O Teorema 2.1 dá condições precisas para que, dada a Hamiltoniana, possamos determinar o Lagrangiano associado utilizando a transformada de Legendre (para ver isto aplique o Teorema 2.1 a H). Com isso, resolvemos a questão levantada no fim da seção anterior. Dada a Hamiltoniana H, ou equivalentemente, a equação de Hamilton-Jacobi (com Hamiltoniana autônoma, C^1, superlinear e convexa), encontramos um candidato natural a solução fornecido pela fórmula de Hopf-Lax (2.6), com Lagrangiano $L = H^*$.

Veremos a seguir que, com hipóteses adicionais sobre a Hamiltoniana H, podemos obter informações mais detalhadas sobre a relação entre L e H.

Definição 2.2 *Suponha que H seja uma função C^2. Dizemos que H é estritamente convexa se, para qualquer $p \in \mathbb{R}^n$ existe $\theta(p) > 0$ tal que:*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}(p)\zeta_i\zeta_j \geq \theta(p)|\zeta|^2, \ \forall \zeta \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^n.$$

Dizemos também que H é uniformemente estritamente convexa se θ acima puder ser escolhido independente de p.

Proposição 2.2 *Seja $H \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 2$, estritamente convexa e superlinear. Então:*

1. *$\nabla H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo global.*
2. *Se $L = H^*$ então $L(\nabla H(p)) = p \cdot \nabla H(p) - H(p)$ e ∇L é a aplicação inversa de ∇H (logo L é C^k).*

Demonstração: Primeiro mostramos que ∇H é injetiva. Considere $r(t) = tp + (1-t)q$, com $p, q \in \mathbb{R}^n$ fixos e $t \in [0, 1]$. Suponha que $\nabla H(p) = \nabla H(q)$. Vamos mostrar que $p = q$. Seja

$$h(t) \equiv \frac{d}{dt}(H(r(t))) = \nabla H(r(t)) \cdot (p - q).$$

Observe que $h(0) = h(1)$, e portanto, pelo Teorema do Valor Médio, existe um $s \in [0, 1]$ tal que:

$$0 = h(s) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}(r(s))(p_i - q_i)\ (p_j - q_j) \geq$$

$$\geq \theta(r(s))|p-q|^2.$$

Portanto, $p = q$.

Mostremos agora que ∇H é sobrejetiva. Seja $L = H^*$. Então temos que:

$$L(q) = \sup_{p \in I\!R^n} \{p \cdot q - H(p)\}.$$

Da superlinearidade, sabemos que este supremo é de fato um máximo, e consequentemente, a derivada de $p \cdot q - H(p)$ com respeito a p se anula no ponto de máximo $\bar{p}$. Isto é:

$$q = \nabla H(\bar{p}).$$

Portanto, todo $q \in I\!R^n$ é imagem por ∇H do ponto onde o máximo na definição de L é assumido. Pela hipótese de convexidade estrita, a Hessiana de H, interpretada como a derivada de ∇H é inversível. Pelo Teorema da Aplicação Inversa, ∇H é um difeomorfismo C^{k-1} global e podemos escrever $\bar{p} = \bar{p}(q)$.

Para demonstrar o segundo item, temos $L(\nabla H(p)) = \bar{p} \cdot \nabla H(p) - H(\bar{p})$. Da análise acima, fazendo $q = \nabla H(p)$, vem que $\nabla H(p) = \nabla H(\bar{p})$. Pela injetividade de ∇H, $p = \bar{p}$. Em resumo, $L(\nabla H(p)) = p \cdot \nabla H(p) - H(p)$.

Finalmente, veja que se diferenciarmos a expressão $L(q) = \bar{p}(q) \cdot q - H(\bar{p}(q))$ em relação a q_i obtemos:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \bar{p}_i + \sum_{j=1}^{n} q_j \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial q_i} = \bar{p}_i,$$

pois $\bar{p}$ é tal que $\nabla H(\bar{p}) = q$. Logo, aplicando ∇H em $\nabla L(q)$, e usando a relação entre $\bar{p}$ e q obtemos que $\nabla H(\nabla L(q)) = q$. Como ∇H é inversível, temos também que $\nabla L(\nabla H(p)) = p$.

$\blacksquare$

2.3 Solução de Hopf-Lax

Nesta seção, vamos começar a estabelecer em que sentido a fórmula de Hopf-Lax (2.6) nos fornece uma solução da equação de Hamilton-Jacobi:

$$\begin{cases} u_t + H(\nabla u) = 0 \\ u(x,0) = g(x). \end{cases} \tag{2.7}$$

Passaremos a nos referir à função u determinada pela fórmula de Hopf-Lax como solução de Hopf-Lax do problema (2.7).

Primeiro vamos mostrar que este candidato a solução estende a solução obtida no Teorema 1.2 através do método de características. Em seguida, estudaremos algumas de suas propriedades. Concluiremos a seção demonstrando que onde a função dada pela fórmula de Hopf for diferenciável ela satisfaz (2.7), e, mais ainda, que ela é diferenciável em quase toda parte.

Seja $H = H(p)$ uma Hamiltoniana C^2, superlinear, estritamente convexa e $L = H^*$ o Lagrangiano associado. Suponha que o dado inicial g é C^1, com derivada globalmente limitada. Vamos assumir que o Teorema 1.2 nos fornece uma solução $v \in C^1$ e definida em $\mathbb{R}^n \times [0, T)$. Em particular, não há cruzamento de características projetadas para $t < T$. Seja $u = u(x, t)$ a função dada pela fórmula de Hopf-Lax.

Proposição 2.3 *As funções u e v coincidem em $\mathbb{R}^n \times [0, T)$.*

Demonstração: Fixe $x \in \mathbb{R}^n$ e $0 < t < T$. Como L é superlinear e g é globalmente Lipschitz, temos que o ínfimo na fórmula de Hopf é assumido. Portanto, existe y^* tal que

$$u(x, t) = tL\left(\frac{x - y^*}{t}\right) + g(y^*).$$

No ponto de mínimo temos que:

$$\nabla L\left(\frac{x - y^*}{t}\right) = \nabla g(y^*).$$

Logo, pela Proposição 2.2,

$$\nabla H(\nabla g(y^*)) = \frac{x - y^*}{t}.$$

Defina as curvas:

$$q(s) = s\frac{x - y^*}{t} + y^*, \quad p(s) = p_0 \equiv \nabla g(y^*).$$

Temos que:

$$\dot{q} = \frac{x - y^*}{t} = \nabla H(\nabla g(y^*)) \equiv \frac{\partial H}{\partial p}(p(s)),$$

$$\dot{p} = 0 \equiv -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Portanto, o par $(q(\cdot), p(\cdot))$ é a característica emanando de $(y^*, \nabla g(y^*))$.

Observe que para $s \leq t$,

$$u(q(s), s) = \min_{y \in I\!R^n} \{sL((q(s) - y)/s) + g(y)\}$$

e o mínimo tem que ser assumido exatamente em y^*. De fato, caso o mínimo fosse atingido em $y^{**} \neq y^*$, então $q(s)$ estaria ao mesmo tempo na característica projetada emanando de y^* e de y^{**}, o que não pode ocorrer. Portanto, para $s \leq t$ temos:

$$u(q(s), s) = sL\left(\frac{q(s) - y^*}{s}\right) + g(y^*) = sL\left(\frac{x - y^*}{t}\right) + g(y^*) =$$

$$= sL(\nabla H(\nabla g(y^*))) + g(y^*).$$

Logo, pela Proposição 2.2 temos:

$$u(q(s), s) = s\left[\nabla g(y^*) \cdot \nabla H(\nabla g(y^*)) - H(\nabla g(y^*))\right] + g(y^*).$$

Consequentemente, $\frac{d}{ds}(u(q(s), s)) = p \cdot \dot{q} - H(p) = p \cdot \nabla H(p) - H(p)$ e $u(q(0), 0) = u(y^*, 0) = g(y^*)$. Portanto, u satisfaz a relação (1.9), logo, $u = v$.

∎

Mostramos acima que a solução de Hopf-Lax, coincide com a solução obtida pelo método de características, enquanto não houver cruzamento de características projetadas. Por outro lado, a fórmula de Hopf-Lax está pontualmente definida para todo $t > 0$ e para g globalmente Lipschitz. Ela nos dá um candidato "natural" para estender a solução obtida pelo método de caraterísticas. A fórmula de Hopf-Lax generaliza o método de características, tanto do ponto de vista de permitir estender a solução para além do instante de cruzamento de características, quanto pelo fato de permitir o tratamento de dados iniciais e Hamiltonianas menos regulares. Nosso objetivo a partir de agora, até o fim deste capítulo é de mostrar que a solução de Hopf-Lax é a solução correta da equação de Hamilton-Jacobi (2.7), em um sentido a ser especificado.

O próximo resultado trata da regularidade de u e tem como consequência o fato de que o colapso do método de características não se deve à formação de “choques” (aparecimento espontâneo de descontinuidades na solução), mas sim à formação de descontinuidade na derivada, conforme indicado no exemplo 1 da seção 1.3.

Lema 2.1 *Suponha que $g : I\!R^n \to I\!R^n$ é globalmente Lipschitz contínua, i.e.*

$$\sup_{x,y\in I\!R^n, x\neq y} \left\{ \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|} \right\} = C < \infty.$$

Denotamos a constante de Lipschitz C por $Lip(g)$. Então u é Lipschitz contínua em $I\!R^n \times [0,\infty)$ e $u(x,0) = g(x)$.

Demonstração: Para mostrar que u é Lipschitz, basta mostrar que é Lipschitz no espaço para tempo fixo e no tempo para posição fixa. Primeiro fixe $t \in (0,\infty)$, x, $\tilde{x} \in I\!R^n$. Então:

$$u(x,t) - u(\tilde{x},t) = \min_{z\in I\!R^n} \left\{ tL\left(\frac{x-z}{t}\right) + g(z) \right\} - \left(tL\left(\frac{\tilde{x}-z^*}{t}\right) + g(z^*) \right),$$

onde z^* é escolhido de modo que o mínimo na definição de $u(\tilde{x},t)$ é assumido em z^*. Logo,

$$u(x,t) - u(\tilde{x},t) \leq$$

$$\leq tL\left(\frac{x-(x-\tilde{x}+z^*)}{t}\right) + g(x-\tilde{x}+z^*) - \left(tL\left(\frac{\tilde{x}-z^*}{t}\right) + g(z^*) \right)$$
$$= g(x-\tilde{x}+z^*) - g(z^*) \leq Lip(g)|x-\tilde{x}|.$$

Trocando-se x e $\tilde{x}$ ganha-se a estimativa desejada. Para mostrar a dependência Lipschitz no tempo e a convergência de $u(x,t)$ para $g(x)$ quando $t \to 0$ utiliza-se a estimativa a seguir. Sejam $x \in I\!R^n$, $0 \leq s < t$ fixos. Então, pelo Corolário 2.1, para $s \neq 0$ temos:

$$u(x,t) = \min_y \left\{ (t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + u(y,s) \right\}.$$

A mesma igualdade é satisfeita, com $g(y)$ no lugar de $u(y,s)$, quando $s = 0$. Primeiramente temos:

$$u(x,t) \leq \quad (t-s)L(0) + u(x,s), \text{ fazendo } x = y. \text{ Logo:}$$

$$u(x,t) - u(x,s) \leq (t-s)L(0). \text{ Por outro lado,}$$

$$u(x,t) \geq \min_y \left\{ (t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) - Lip(g)|x-y| \right\} + u(x,s),$$

pois u é Lipschitz contínua no espaço. Tomando $z = \dfrac{x-y}{t-s}$ temos:

$$u(x,t) \geq \min_z \{(t-s)L(z) - Lip(g)(t-s)|z|\} + u(x,s) =$$

$$= -(t-s)\max_z\{-L(z) + Lip(g)|z|\} + u(x,s) =$$

$$= -(t-s) \max_{|w|\leq Lip(g)} \{\max_{z\in \mathbb{R}^n}\{-L(z) + w\cdot z\}\} + u(x,s) =$$

$$= -(t-s) \max_{|w|\leq Lip(g)} H(w) + u(x,s). \text{ Seja } C = \max\{L(0), \max_{|w|\leq Lip(g)} H(w)\}.$$

Então mostramos que, para $s \neq 0$:

$$|u(x,t) - u(x,s)| \leq C|t-s|.$$

Uma demonstração análoga para $s = 0$ funciona substituindo-se $u(x,s)$ por $g(x)$.

∎

Observe que demonstramos que $u \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, e que portanto o dado inicial é assumido continuamente. O teorema a seguir é um resultado de consistência, que diz que a solução de Hopf-Lax é pontualmente compatível com a noção de solução clássica.

Teorema 2.2 *Sejam $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ fixos. Se u é diferenciável em (x,t) então:*

$$u_t(x,t) + H(\nabla u(x,t)) = 0.$$

Demonstração: Fixe $q \in \mathbb{R}^n$, $h > 0$. Então:

$$\frac{u(x+hq, t+h) - u(x,t)}{h} \to \nabla u(x,t)\cdot q + u_t(x,t), \quad \text{quando } h \to 0^+.$$

Por outro lado, pelo Corolário 2.1,

$$u(x+hq,t+h) = \min_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{hL\left(\frac{x+hq-y}{h}\right) + u(y,t)\right\} \leq hL(q) + u(x,t),$$

fazendo $x = y$. Logo,

$$\frac{u(x + hq, t + h) - u(x, t)}{h} \leq L(q) \text{ e portanto}$$

$$u_t(x, t) + \nabla u(x, t) \cdot q \leq L(q).$$

Segue-se que $u_t(x, t) + H(\nabla u(x, t)) = u_t + \max_{q \in I\!R^n} \{q \cdot \nabla u(x, t) - L(q)\} \leq 0$. Portanto u é uma *subsolução* em (x, t).

Agora, escolha z^* tal que:

$$u(x, t) = tL\left(\frac{x - z^*}{t}\right) + g(z^*).$$

Fixe $h > 0$ e tome $s = t - h$. Escolhemos y como a posição em tempo s da reta que liga x a z^*:

$$y = \frac{s}{t}x + (1 - \frac{s}{t})z^*, \text{ ou seja, } \frac{x - z^*}{t} = \frac{y - z^*}{s}.$$

Usando a fórmula de Hopf-Lax obtemos:

$$u(x, t) - u(y, s) \geq tL\left(\frac{x - z^*}{t}\right) + g(z^*) - \left[sL\left(\frac{y - z^*}{s}\right) + g(z^*)\right]$$

$$= (t - s)L\left(\frac{x - z^*}{t}\right).$$

Logo,

$$\frac{1}{h}\left(u(x, t) - u\left(\frac{t - h}{t}x + \left(1 - \frac{t - h}{t}\right)z^*, t - h\right)\right) \geq L\left(\frac{x - z^*}{t}\right).$$

O lado esquerdo desta desigualdade converge, quando $h \to 0^+$, para:

$$u_t(x, t) + \nabla u(x, t) \cdot \frac{x - z^*}{t}.$$

Temos então, que u também é uma *supersolução* em (x, t) pois:

$$u_t(x, t) + H(\nabla u(x, t)) = u_t(x, t) + \max_{q \in I\!R^n} \{q \cdot \nabla u(x, t) - L(q)\} \geq$$

$$\geq u_t(x,t) + \frac{x-z^*}{t} \cdot \nabla u(x,t) - L\left(\frac{x-z^*}{t}\right) \geq 0.$$

∎

Chamamos atenção do seguinte resultado de análise real clássica: Toda função Lipschitz contínua em $I\!R^n$ é diferenciável em quase toda parte. Este fato é conhecido como Teorema de Rademacher. A demonstração deste resultado é razoavelmente elementar em dimensão 1, porém é mais delicada em dimensões mais altas. Omitiremos esta demonstração, porém referimos o leitor interessado ao Cap. 5 de [8], onde este resultado é provado utilizando a desigualdade de Poincaré para espaços de Sobolev.

Nesta seção demonstramos que a solução de Hopf-Lax u é Lipschitz contínua em $I\!R^n \times (0,\infty)$, com extensão contínua a $t=0$. Mais ainda, do Teorema 2.2 e do Teorema de Rademacher, concluimos que $u_t + H(\nabla u) = 0$, qtp-$I\!R^n \times (0,\infty)$, ou seja, u satisfaz (2.7) em quase toda parte.

Poderíamos pensar em definir solução fraca para (2.7) da seguinte maneira:

"Dizemos que u é solução fraca de (2.7) se u é Lipschitz em $I\!R^n \times (0,\infty)$, contínua em $I\!R^n \times [0,\infty)$, $u(x,0) = g(x)$ e u satisfaz a equação de Hamilton-Jacobi em quase toda parte".

Se utilizássemos isto como definição de solução fraca já teríamos um teorema de existência global nas mãos. Veremos na próxima seção que esta definição permite um sutil tipo de não-unicidade, que contornaremos restringindo-a um pouco mais.

2.4 Soluções fracas e unicidade

Vamos formular uma noção de solução fraca que nos permitirá provar que a solução de Hopf-Lax é a única solução fraca do problema (2.7).

Não se espera, em geral, que um problema de evolução não-linear possua uma solução clássica global. Existem mecanismos, bem compreendidos, que levam à perda de suavidade espontânea de soluções em tempo finito. Vimos uma instância disso no exemplo 1 da seção 1.3, em que a perda espontânea de suavidade se deve a cruzamento de características. Este é apenas um dos diversos mecanismos possíveis que levam à perda de regularidade, e é o mais elementar.

Um desafio típico no estudo de soluções fracas de equações diferenciais parciais não-lineares consiste de escolher uma noção de solução fraca que seja, ao mesmo tempo, ampla o bastante para permitir a inclusão, como solução válida, de todo o comportamento irregular que surja espontaneamente (isto é, de obter existência global de solução fraca) e restritiva o suficiente para garantir unicidade. Uma noção de solução fraca adequada no sentido descrito acima em geral incorpora um entendimento profundo do problema em questão.

Esta seção completa um exemplo clássico do tipo de estudo descrito acima. Antes de mais nada, veremos que a noção de "solução fraca" sugerida no fim da seção anterior não é adequada por conduzir à não-unicidade. Ilustraremos isso no exemplo a seguir. Veremos que o conceito chave necessário para completar nossa definição de solução fraca é a noção de *semiconcavidade*.

Exemplo: Considere o problema:

$$\begin{cases} u_t + (u_x)^2/2 = 0 \text{ em } \quad I\!R \times (0, \infty) \\ u(x,0) = 0, \text{ em } I\!R \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Claramente, a função $u_1(x,t) \equiv 0$ é solução (clássica!). Contudo o leitor pode facilmente verificar que a função:

$$u_2(x,t) = \begin{cases} 0, & |x| \geq t/2 \\ x - t/2, & 0 \leq x \leq t/2 \\ -x - t/2, & -t/2 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

é Lipschitz contínua e satisfaz a equação fora das retas $\{x = 0\}$ e $\{x = \pm t/2\}$. Portanto, u_2 também é "solução fraca". De fato, infinitas soluções desta natureza podem ser obtidas (Exercício 8).

Definição 2.3 *Seja $g : I\!R^n \to I\!R$ contínua. Diremos que g é semicôncava se para todo $x, z \in I\!R^n$ e para algum C independente de x e z vale:*

$$g(x+z) - 2g(x) + g(x-z) \leq C|z|^2.$$

Semiconcavidade é um tipo de estimativa unilateral de segunda derivada. É possível mostrar que, se $u : I\!R \to I\!R$ é C^2, semiconcavidade é equivalente a exigir uma cota superior para a segunda derivada de u. Para funções contínuas, semiconcavidade é equivalente à existência de $C \in I\!R$ tal que

$u(x) - C|x|^2$ seja côncava. Para funções Lipschitz, semiconcavidade evita a ocorrência de bicos convexos; $|x|$ não é semicôncava, enquanto que $-|x|$ é. (Verifique estas propriedades - Exercício 9.)

Em seguida veremos que a solução de Hopf-Lax é semicôncava, em duas situações.

Lema 2.2 *Suponhamos que g é Lipschitz contínua e semicôncava. Então $u(\cdot, t)$ é semicôncava para todo $t \in [0, \infty)$. A constante de semiconcavidade de $u(\cdot, t)$ pode ser tomada igual à de g.*

Demonstração: Fixe x, t e seja y^* tal que:

$$u(x,t) = tL\left(\frac{x-y^*}{t}\right) + g(y^*).$$

Então temos:

$$u(x+z,t) - 2u(x,t) + u(x-z,t) \leq$$

$$\leq tL\left(\frac{x-y^*}{t}\right) + g(y^*+z) - 2tL\left(\frac{x-y^*}{t}\right) - 2g(y^*) + tL\left(\frac{x-y^*}{t}\right) + g(y^*-z) \leq$$

$$\leq C|z|^2.$$

$\blacksquare$

Lema 2.3 *Suponha que H seja uniformemente estritamente convexa (veja a Definição 2.2) e considere u a solução de Hopf-Lax. Então, para todo $x, z \in I\!\!R^n$, $t > 0$, temos:*

$$u(x+z,t) - 2u(x,t) + u(x-z,t) \leq \frac{1}{\theta t}|z|^2.$$

Demonstração: Seja θ a constante na definição de convexidade uniforme estrita de H. Primeiramente observemos que:

$$H\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}H(p_1) + \frac{1}{2}H(p_2) - \frac{\theta}{8}|p_1 - p_2|^2. \tag{2.8}$$

Isto se deduz expandindo $H(p_1)$ e $H(p_2)$ em série de Taylor até segunda ordem com resto de Lagrange em torno de $\dfrac{p_1+p_2}{2}$ e estimando o resto usando a convexidade uniforme de H (Exercício 10).

Pela Proposição 2.2, para qualquer p, $\nabla L(\nabla H(p)) = p$. Portanto, a matriz Hessiana de L avaliada em $\nabla H(p)$ é igual à inversa da matriz Hessiana de H em p. Como, novamente pela Proposição 2.2, L é C^2, vale:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_j}(q)\zeta_1\zeta_j \leq \frac{1}{\theta}|\zeta|^2.$$

A razão disso é que θ é uma cota inferior para o menor autovalor da matriz Hessiana de H, o que acarreta que $1/\theta$ é uma cota superior para o maior autovalor da matriz Hessiana de L.

Portanto, por um argumento análogo ao utilizado para H na dedução de (2.8) temos que:

$$\frac{1}{2}L(q_1) + \frac{1}{2}L(q_2) \leq L\left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right) + \frac{1}{8\theta}|q_1 - q_2|^2.$$

Agora fixe x e t e escolha y^* de modo que:

$$u(x,t) = tL\left(\frac{x - y^*}{t}\right) + g(y^*).$$

Estimemos:

$$\begin{aligned} & u(x+z,t) - 2u(x,t) + u(x-z,t) \leq \\ & \leq \left[tL\left(\frac{x+z-y^*}{t}\right) + g(y^*)\right] - \left[2tL\left(\frac{x-y^*}{t}\right) + 2g(y^*)\right] + \\ & + \left[tL\left(\frac{x-z-y^*}{t}\right) + g(y^*)\right] = 2t\left[\frac{1}{2}L\left(\frac{x+z-y^*}{t}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}L\left(\frac{x-z-y^*}{t}\right) - L\left(\frac{x-y^*}{t}\right)\right] \leq \\ & \leq 2t\frac{1}{8\theta}\left|\frac{2z}{t}\right| \leq \frac{1}{\theta t}|z|^2. \end{aligned}$$

∎

O que está sendo observado acima é um sutil efeito regularizante da evolução induzida pela equação de Hamilton-Jacobi, desde que a Hamiltoniana seja uniformemente estritamente convexa. Note que a constante de semiconcavidade de $u(\cdot,t)$ explode quando $t \to 0$.

Definição 2.4 *Seja $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitz contínua. Dizemos que u é uma solução fraca de (2.7) se:*

1. *$u(x, 0) = g(x)$ e u satisfaz a equação (2.7) qtp em $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$,*

2. *$u(x+z, t) - 2u(x, t) + u(x-z, t) \leq C(1+1/t)|z|^2$ para alguma constante $C \geq 0$, para todo $x, z \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.*

Já demonstramos existência de solução fraca (pela fórmula de Hopf-Lax) em dois casos: Se H é uniformemente convexa ou se $g(x)$ é Lipschitz e semicôncava. Finalmente, vamos demonstrar a unicidade de solução fraca.

Teorema 2.3 *Suponha que H seja uma função convexa, autônoma e C^2 e que g seja Lipschitz contínua. Então existe no máximo uma solução fraca de (2.7).*

Demonstração: Sejam u e $\tilde{u}$ duas soluções fracas de (2.7) com o mesmo dado inicial. Seja $w(x, t) \equiv u(x, t) - \tilde{u}(x, t)$. Observe que se (y, s) é um ponto onde ambas u e $\tilde{u}$ são diferenciáveis (e portanto satisfazem a equação diferencial parcial) temos:

$$w_t(y, s) = -H(\nabla u(y, s)) + H(\nabla \tilde{u}(y, s)) =$$

$$= -\int_0^1 \frac{d}{dr} \left[H(r\nabla u(y, s) + (1-r)\nabla \tilde{u}(y, s))\right] dr =$$

$$= \left(-\int_0^1 \nabla H(r\nabla u(y, s) + (1-r)\nabla \tilde{u}(y, s)) dr\right) \cdot (\nabla(u - \tilde{u})(y, s)) \equiv$$

$$\equiv -b(y, s) \cdot \nabla w(y, s).$$

Portanto w satisfaz uma equação diferencial parcial (tipo equação de transporte) dada por:

$$w_t + b \cdot \nabla w = 0 \text{ qtp.} \tag{2.9}$$

Espera-se que o fluxo b da equação acima seja pouco regular.

Seja $\phi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ uma função C^∞ e $v = \phi(w) \geq 0$. Multiplicando (2.9) por $\phi'(w)$ temos:

$$v_t + b \cdot \nabla v = 0 \text{ qtp .}$$

Agora defina o suavisador $\eta^\varepsilon : I\!R^m \to I\!R$, $\eta^\varepsilon(x) = 1/\varepsilon^m \eta(x/\varepsilon)$, $(m = n+1)$ onde η é uma função C^∞, de suporte compacto, positiva e de integral 1. Fixe $\varepsilon > 0$ e defina:

$$u^\varepsilon = \eta^\varepsilon * u \equiv \int_{I\!R_+^{n+1}} \eta^\varepsilon(x-y, t-s)u(y,s)dyds, \quad \tilde{u}^\varepsilon = \eta^\varepsilon * \tilde{u}.$$

As funções regularizadas u^ε, $\tilde{u}^\varepsilon$ satisfazem algumas propriedades: u^ε, $\tilde{u}^\varepsilon$ são C^∞, $u^\varepsilon \to u$ uniformemente quando $\varepsilon \to 0$ em compactos e $|\nabla u^\varepsilon| \leq Lip(u)$; $|\nabla \tilde{u}^\varepsilon| \leq Lip(\tilde{u})$; $\nabla u^\varepsilon \xrightarrow{\text{qtp}} \nabla u$, quando $\varepsilon \to 0$. Estas propriedades são simples de serem demonstradas; a leitora pode verificá-las ou consultar o Apêndice C.4 de [8].

A hipótese de semiconcavidade implica que as matrizes Hessianas de u^ε e $\tilde{u}^\varepsilon$, que denotaremos por D^2u^ε e $D^2\tilde{u}^\varepsilon$, são ambas limitadas por $C(1+\frac{1}{s})I$ no sentido de formas quadráticas. Isto decorre do fato que, para cada $\varepsilon > 0$ fixo, se $z \in I\!R^n$, $|z| = 1$ então temos:

$$\left(D^2u^\varepsilon(x,t)\right)(z,z) = \lim_{h\to 0} \frac{u^\varepsilon(x+hz,s) - 2u(x,s) + u(x-hz,s)}{h^2},$$

e o mesmo vale para $\tilde{u}^\varepsilon$.

Considere a regularização do fluxo b, dada por

$$b_\varepsilon(y,s) = \int_0^1 \nabla H(r\nabla u^\varepsilon(y,s) + (1-r)\nabla\tilde{u}^\varepsilon(y,s))dr.$$

Reescrevemos a equação para v da seguinte maneira:

$$v_t + b_\varepsilon \cdot \nabla v = (b_\varepsilon - b)\cdot\nabla v \text{ ou}$$

$$v_t + \operatorname{div}(vb_\varepsilon) = (\operatorname{div}\, b_\varepsilon)v + (b_\varepsilon - b)\cdot\nabla v.$$

Observe que:

$$\operatorname{div}(b_\varepsilon) = \int_0^1 \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_l}(r\nabla u^\varepsilon + (1-r)\nabla\tilde{u}^\varepsilon)(ru^\varepsilon_{x_l x_k} + (1-r)\tilde{u}^\varepsilon_{x_l x_k})dr$$

$$\leq C\left(1+\frac{1}{s}\right),$$

devido às estimativas sobre D^2u^ε e $D^2\tilde{u}^\varepsilon$.

Fixe $x_0 \in I\!R^n$, $t_0 > 0$ e tome:

$$R \equiv \max\{|\nabla H(p)| : |p| \leq \max\{Lip(u), Lip(\tilde{u})\}\}.$$

Defina também o cone

$$C \equiv \{(x,t) : 0 \leq t \leq t_0,\ |x - x_0| \leq R(t_0 - t)\}.$$

Seja $e(t)$ definida por:

$$e(t) \equiv \int_{B(x_0,R(t_0-t))} v(x,t)dx.$$

Decomponha esta integral, na bola original, como integrais em esferas concêntricas e use a regra de Leibnitz para obter, para quase todo $t > 0$:

$$e'(t) = \int_{B(x_0,R(t_0-t))} v_t dx - R\int_{\partial B(x_0,R(t_0-t))} vdS =$$

$$= \int_{B(x_0,R(t_0-t))} (-\mathrm{div}(vb_\varepsilon) + \mathrm{div}(b_\varepsilon)v + (b_\varepsilon - b)\cdot\nabla v)\, dx - R\int_{\partial B(x_0,R(t_0-t))} vdS$$

$$= -\int_{\partial B(x_0,R(t_0-t))} v(b_\varepsilon\cdot\hat{n} + R)dS + \int_{B(x_0,R(t_0-t))} (\mathrm{div}(b_\varepsilon)v + (b_\varepsilon - b)\cdot\nabla v)\, dx,$$

pelo Teorema da Divergência,

$$\leq + \int_{B(x_0,R(t_0-t))} (\mathrm{div}(b_\varepsilon)v + (b_\varepsilon - b)\cdot\nabla v)\, dx.$$

Isto foi obtido usando a definição de R, de b_ε, as estimativas de $\nabla u^\varepsilon, \nabla\tilde{u}^\varepsilon$ pelas normas $Lip(u)$, $Lip(\tilde{u})$ e a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Consequentemente,

$$e'(t) \leq C\left(1 + \frac{1}{t}\right)e(t) + \int_{B(x_0,R(t_0-t))} (b_\varepsilon - b)\cdot\nabla v dx.$$

A integral acima tende a zero quando $\varepsilon \to 0$, pelo Teorema da Convergência Dominada e pelas estimativas mencionadas. Portanto obtemos a desigualdade diferencial:

$$e'(t) \leq C\left(1 + \frac{1}{t}\right)e(t),$$

para $0 < t < t_0$.

Esta estimativa ainda não é suficiente para conseguir o que queremos pois ela é singular em $t = 0$. Escolheremos agora uma $\phi(\cdot)$ conveniente que nos possibilite usar esta estimativa para tempos longe de zero.

Fixe δ, r e t de modo que $0 < \delta < r < t < t_0$ e tome $\phi(z)$ tal que $\phi(z) = 0$ se $|z| \leq \delta(Lip(u) + Lip(\tilde{u}))$ e $\phi(z) > 0$ caso contrário. Em tempo $t = \delta$ temos:

$$|u(x,\delta) - u(x,0) - (\tilde{u}(x,\delta) - \tilde{u}(x,0))| = |u(x,\delta) - \tilde{u}(x,\delta)| \text{ pois } u(x,0) = \tilde{u}(x,0),$$

$$\leq \delta Lip(u) + \delta Lip(\tilde{u}).$$

Portanto, $v = \phi(w) = \phi(u - \tilde{u}) = 0$ em $\{t = \delta\}$. Consequentemente, $e(\delta) = 0$.

Por outro lado, aplicando o lema de Gronwall à desigualdade diferencial para $e(t)$, obtemos:

$$0 \leq e(r) \leq e(\delta) \exp\left\{\int_\delta^r C\left(1 + \frac{1}{s}\right) ds\right\} = 0.$$

Portanto, $e(r) \equiv 0$ para $\delta < r < t$.

Disto concluímos que $v(x,t) \equiv 0$ na bola $B(x_0, R(t_0 - r))$. Como $v = \phi(w)$ e ϕ só se anula na bola $B(0, \delta(Lip(u) + Lip(\tilde{u})))$ temos que:

$$w(B(x_0, R(t_0 - r)), r) \subseteq B(0, \delta(Lip(u) + Lip(\tilde{u}))),$$

isto é:

$$|w| = |u - \tilde{u}| \leq \delta(Lip(u) + Lip(\tilde{u})) \text{ em } B(x_0, R(t_0 - r)).$$

Como δ é arbitrário, obtemos que $u \equiv \tilde{u}$ nesta bola, e em particular $u(x_0, t_0) = \tilde{u}(x_0, t_0)$.

$\blacksquare$

Observação: No exemplo dado no início desta seção H é uniformemente convexa e a solução u_2 não é solução fraca por não satisfazer semiconcavidade na reta $\{x = 0\}$.

Resumindo os resultados obtidos neste capítulo para o problema de valor inicial (2.7) temos:

Corolário 2.2 *Seja $H \in C^2(\mathbb{R}^n)$, autônoma, convexa e superlinear e seja g Lipschitz. Se g for semicôncava ou H for uniformemente convexa, então a solução de Hopf-Lax é a única solução fraca do problema (2.7).*

Consideremos agora o problema de controle dado por (2.1, 2.2) com função valor $u = u(x,t)$. Considere a Hamiltoniana H definida em (2.4). Observe que se L for convexa, C^1 e superlinear, então H será côncava, contínua e superlinear. De fato, $H = -\tilde{L}^*$, com $\tilde{L}(q) = L(-q)$ e as conclusões sobre H seguem do Teorema 2.1.

Considere agora o problema de valor terminal:

$$\begin{cases} u_t + H(\nabla u) = 0 \\ u(x,T) = g(x). \end{cases} \tag{2.10}$$

Adaptaremos a Definição 2.4 para problemas de valor terminal. Observe que a definição essencialmente não muda.

Definição 2.5 *Seja $u : \mathbb{R}^n \times (-\infty, T] \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitz contínua. Dizemos que u é uma solução fraca de (2.10) se:*

1. *$u(x,T) = g(x)$ e u satisfaz a equação (2.10) qtp em $\mathbb{R}^n \times (-\infty, T)$*
2. *$u(x+z,t) - 2u(x,t) + u(x-z,t) \leq C\left(1 + \frac{1}{T-t}\right)|z|^2$ para alguma constante $C \geq 0$, para todo $x, z \in \mathbb{R}^n$, $t < T$.*

A teoria desenvolvida neste capítulo nos fornece o seguinte resultado para o problema de controle ótimo para sistemas controlados pela velocidade.

Corolário 2.3 *Suponha que L seja C^2, uniformemente estritamente convexa e superlinear e que g seja Lipschitz contínua. Então a função valor é a única solução fraca do problema de valor terminal (2.10).*

A verificação deste resultado fica como exercício (Exercício 11).

Chapter 3

Soluções de viscosidade

O objetivo deste capítulo é introduzir a noção de solução de viscosidade de M. Crandall e P.-L. Lions para equações de Hamilton-Jacobi não necessariamente autônomas.

3.1 Método de viscosidade

A principal dificuldade em definir solução fraca de equações de Hamilton-Jacobi é a ausência de estrutura divergente. O procedimento usual para definir solução fraca de equações não-lineares em forma divergente consiste de multiplicar a equação por uma função teste suave e integrar por partes (esta é a idéia de solução distribucional). Veremos que, na definição de solução de viscosidade, também faremos uso de funções teste suaves e de um procedimento para fazer as derivadas que aparecem na equação incidirem sobre as funções teste. Entretanto, este procedimento será não-linear, em contraste com o procedimento linear de integração por partes. A definição de solução de viscosidade é inspirada no princípio do máximo para equações elípticas e parabólicas (veja [17]).

Antes de definir solução de viscosidade vamos apresentar, a título de motivação, uma situação em que a definição surge de forma natural.

Uma estratégia comum para obter soluções de (1.1) consiste de regularizar a equação pela adição de um pequeno termo difusivo:

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon + H(\nabla u^\varepsilon, x) = \varepsilon \Delta u^\varepsilon & \text{em } I\!R^n \times (0,\infty) \\ u^\varepsilon = g & \text{em } I\!R^n \times \{t=0\}, \end{cases}$$

e procurar soluções de (1.1) que sejam limites das soluções do problema regularizado quando $\varepsilon \to 0$.

A equação regularizada é uma equação semilinear de natureza parabólica. A dissipação introduzida pelo termo difusivo torna este problema muito mais tratável do ponto de vista analítico. A estratégia descrita acima é comum em equações diferenciais parciais e se chama método de viscosidade evanescente.

Espera-se que u^ε convirja a uma solução da equação original quando $\varepsilon \to 0$. No limite, contudo, perde-se controle sobre as derivadas da sequência de soluções aproximadas. Não se espera obter uma solução clássica deste processo de aproximação. O que seria plausível esperar para a família de soluções aproximadas $\{u^\varepsilon\}$ seria limitação uniforme e equicontinuidade, o que implicaria a existência de uma sequência $\{u^{\varepsilon_j}\}$ convergindo uniformemente em compactos de $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ a um limite $u \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, pelo Teorema de Arzela-Ascoli.

Para motivar a noção de solução fraca, considere uma sequência $\{u^{\varepsilon_j}\}$, $j = 1, 2, \dots$ de soluções aproximadas, obtida pelo método de viscosidade evanescente, convergindo a uma função contínua u, uniformemente em compactos de $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$. Vamos inicialmente demonstrar um lema que, apesar de ser uma observação elementar de análise real, desempenha um papel importante na teoria que vamos desenvolver.

Lema 3.1 *Sejam φ e ψ funções contínuas definidas em $\overline{B(x_0, R)}$, a bola fechada de centro $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e raio R. Suponha que φ possua um máximo (mínimo) estrito em x_0. Seja:*

$$m = \varphi(x_0) - \max_{|x-x_0|=R} \varphi \left(m = \min_{|x-x_0|=R} \varphi - \varphi(x_0) \right).$$

Se ψ satisfaz a condição: $\max_{|x-x_0|\leq R} |\psi - \varphi| < m/2$ então ψ tem um máximo (mínimo) em $B(x_0, R)$.

Demonstração: Começamos por observar que, para todo $x \in \overline{B(x_0, R)}$, temos:

$$-\frac{m}{2} < \psi(x) - \varphi(x) < \frac{m}{2}.$$

Portanto:

$$\psi(x_0) > \varphi(x_0) - \frac{m}{2} = \max_{|x-x_0|=R} \varphi + \frac{m}{2} \geq \max_{|x-x_0|=R} \psi.$$

A conclusão segue imediatamente para pontos de máximo e a demonstração para mínimos é inteiramente equivalente.

∎

Em outras palavras, se φ possui um extremo estrito em x_0, então toda função contínua, suficientemente próxima de φ na norma da convergência uniforme, também possui um extremo local próximo a x_0.

Seja $v = v(x,t)$ uma função teste $C^\infty(I\!R^n \times (0,\infty))$. Suponha que $z_0 \equiv (x_0, t_0) \in I\!R^n \times (0,\infty)$ seja um ponto de máximo local estrito de $u - v$. Vamos mostrar que nestas condições, v é uma subsolução da equação de Hamilton-Jacobi em z_0. Seja R_0 tal que $(u-v)(z) < (u-v)(z_0)$ para todo $z \equiv (x,t)$ na bola $B(z_0, R_0)$, $z \neq z_0$. Sejam $R_k = \dfrac{R_0}{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$ e

$$m_k = (u-v)(z_0) - \max_{|z-z_0|=R_k}(u-v).$$

Defina $\{j_k\}$ uma sequência crescente de números naturais tal que, se $u^k \equiv u^{\varepsilon_{j_k}}$, então

$$\max_{|z-z_0|\leq R_0}|u^k - u| < m_k/2.$$

Pelo Lema 3.1 existe uma sequência $z_k \equiv (x_k, t_k)$ tal que $|z_k - z_0| < R_k$, isto é, $z_k \to z_0$ quando $k \to \infty$, e $u^k - v$, tem máximo local em z_k.

Observe que $u^k - v$ é uma função suave, com máximo local em z_k, o que acarreta $\nabla u^k(z_k) = \nabla v(z_k)$ e $u^k_t(z_k) = v_t(z_k)$.

Além disso, $-\Delta u^k(z_k) \geq -\Delta v(z_k)$.

Portanto, temos que:

$$v_t(x_k,t_k) + H(\nabla v(x_k,t_k), x_k) =$$

$$u^k_t(x_k,t_k) + H(\nabla u^k(x_k,t_k), x_k) = \varepsilon_{j_k}\Delta u^k(x_k,t_k)$$
$$\leq \varepsilon_{j_k}\Delta v(x_k,t_k).$$

Mandando $k \to \infty$ vemos que: $v_t(x_0,t_0) + H(\nabla v(x_0,t_0), x_0) \leq 0$.

Se $(u-v)$ tiver apenas um máximo local (ao invés de um máximo local estrito), substituimos v por $\hat{v} = v + \delta(|x-x_0)^2 + (t-t_0)^2)$, que agora é tal que $(u-\hat{v})$ tem um máximo estrito, e obtemos:

$$\hat{v}_t(x_0,t_0) + H(\nabla\hat{v}(x_0,t_0), x_0) \leq 0.$$

Contudo, $\hat{v}_t(x_0, t_0) = v_t(x_0, t_0)$ e $\nabla\hat{v}(x_0, t_0) = \nabla v(x_0, t_0)$, já que a função quadrática que foi adicionada não afeta as derivadas de primeira ordem de v em (x_0, t_0). Desse modo, obtemos que v ainda é uma subsolução da equação de Hamilton-Jacobi em (x_0, t_0).

A mesma análise pode ser efetuada tomando-se funções teste v tais que $u - v$ tenha um mínimo local em (x_0, t_0); estas v serão supersoluções das equações de Hamilton-Jacobi em (x_0, t_0).

O que observamos é que limites uniformes de soluções das aproximações parabólicas da equação de Hamilton-Jacobi têm uma propriedade especial com respeito a funções teste. A definição de solução de viscosidade incorporará precisamente esta propriedade.

Definição 3.1 *Seja u uma função limitada, uniformemente contínua.*

1. *Diz-se que u é uma* subsolução de viscosidade *da equação de Hamilton-Jacobi (1.1) se:*

   (a) *$u \leq g$ em $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$ e*

   (b) *para todo $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ e cada $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ tal que $(u - v)$ tem máximo local em (x_0, t_0) vale:*

   $$v_t(x_0, t_0) + H(\nabla v(x_0, t_0), x_0) \leq 0.$$

2. *Diz-se que u é uma* supersolução de viscosidade *da equação de Hamilton-Jacobi (1.1) se:*

   (a) *$u \geq g$ em $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$ e*

   (b) *para todo $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ e cada $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ tal que $(u - v)$ tem mínimo local em (x_0, t_0) vale:*

   $$v_t(x_0, t_0) + H(\nabla v(x_0, t_0), x_0) \geq 0.$$

3. *Diz-se que u é uma* solução de viscosidade *se u for ao mesmo tempo subsolução e supersolução de viscosidade.*

Nos referiremos a subsoluções e supersoluções de viscosidade conjuntamente como semisoluções de viscosidade.

É imediato estender esta definição para um problema de valor de fronteira geral de primeira ordem, da forma $F(x, u, \nabla u) = 0$. Vamos adiar isto para a próxima seção.

A noção de solução de viscosidade foi introduzida por M. Crandall e P.-L. Lions em 1983 [5], tendo sido reformulada e colocada na forma acima por M. Crandall, L. C. Evans e P.-L. Lions em 1984 [3]. Posteriormente esta noção foi estendida a problemas fortemente não-lineares de segunda ordem por R. Jensen [16] em 1988. Desde então esta idéia de solução de viscosidade teve impacto marcante na literatura recente em equações diferenciais parciais não-lineares, especialmente no que tange a problemas fortemente não-lineares de natureza elíptica ou parabólica. Referimos o leitor interessado a [4], que contém uma descrição do desenvolvimento recente desta teoria.

Vamos iniciar o estudo de soluções de viscosidade verificando que esta nova noção de solução é compatível com o conceito de solução clássica. Isto é chamado um resultado de consistência. É fácil ver que uma solução $u = u(x,t)$ em $C^1(I\!R^n \times [0,\infty))$, limitada, é solução de viscosidade. De fato, se v é suave e $u-v$ possui máximo local em (x_0, t_0), então $\nabla u(x_0,t_0) = \nabla v(x_0,t_0)$ e $u_t(x_0,t_0) = v_t(x_0,t_0)$ e portanto

$$v_t(x_0,t_0) + H(\nabla v(x_0,t_0), x_0) = u_t(x_0,t_0) + H(\nabla u(x_0,t_0), x_0) = 0.$$

Logo v é, em particular, uma subsolução de viscosidade. Similarmente, se $u - v$ possui mínimo local, v é supersolução de viscosidade.

Podemos mostrar uma forma muito mais forte de consistência. Uma solução de viscosidade diferenciável em um ponto (x_0, t_0) satisfaz a equação no sentido clássico no ponto (x_0, t_0). Para demonstrar isto, precisamos primeiro de um lema de análise real, que nos fornecerá a função teste que precisaremos para demonstrar consistência.

Lema 3.2 *Seja $u : I\!R^m \to I\!R$ contínua e diferenciável em $y_0 \in I\!R^m$. Então existe $v \in C^1(I\!R^m)$ tal que $v(y_0) = u(y_0)$ e $u-v$ tem um máximo local estrito em y_0.*

Demonstração: Vamos assumir, sem perda de generalidade, que $y_0 = 0$, $\nabla u(y_0) = 0$ e $u(y_0) = 0$. De fato, dados u e y_0, defina:

$$\tilde{u}(y) = u(y + y_0) - u(y_0) - \nabla u(y_0) \cdot y.$$

Esta função $\tilde{u}$ satisfaz as condições acima, e se encontrarmos a função $\tilde{v}$ correspondente, obteremos a função v desejada fazendo:

$$v(y) = \tilde{v}(y - y_0) + u(y_0) + \nabla u(y_0) \cdot (y - y_0).$$

Da diferenciabilidade de u, temos que existe $\rho_1(y)$ contínua, $\rho_1(0) = 0$ tal que $u(y) = |y|\rho_1(y)$. Defina:

$$\rho_2(r) = \max_{z \in B(0;r)} |\rho_1(z)|.$$

Então $\rho_2 : [0, \infty) \to [0, \infty)$ é contínua, $\rho_2(0) = 0$ e ρ_2 é não-decrescente. Seja

$$v(y) = \int_{|y|}^{2|y|} \rho_2(r)dr + |y|^2.$$

Temos:

$$|v(y)| \leq |y|\rho_2(2|y|) + |y|^2,$$

logo $v(0) = 0$. Temos também que:

$$\nabla v(y) = \frac{2y}{|y|}\rho_2(2|y|) - \frac{y}{|y|}\rho_2(|y|) + 2y$$

para $y \neq 0$, e portanto, se definirmos $\nabla v(0) = 0$, segue-se que $v \in C^1$. Contudo, se $y \neq 0$ temos:

$$u(y) - v(y) = |y|\rho_1(y) - \int_{|y|}^{2|y|} \rho_2(r)dr - |y|^2$$

$$\leq |y|\rho_2(|y|) - \int_{|y|}^{2|y|} \rho_2(r)dr - |y|^2 \leq -|y|^2 < 0 = u(0) - v(0).$$

Logo, $u - v$ tem um máximo local estrito em 0.

∎

Podemos também obter uma função C^1, v tal que $u(y_0) = v(y_0)$ e $u - v$ tem mínimo local estrito em y_0. Basta aplicar o Lema 3.2 em $-u$.

Teorema 3.1 *Seja u uma função diferenciável em $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Suponha que u é solução de viscosidade da equação de Hamilton-Jacobi (1.1). Então*

$$u_t(x_0, t_0) + H(\nabla u(x_0, t_0), x_0) = 0.$$

Demonstração: Seja $v = v(x,t) \in C^1(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ tal que $u - v$ tem um máximo local estrito em (x_0, t_0). Defina o suavisador $\eta^\varepsilon : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\eta^\varepsilon(x) = 1/\varepsilon^m \eta(x/\varepsilon)$, $(m = n+1)$ onde $\eta(x)$ é uma função C^∞, de suporte compacto, positiva e de integral 1.

Seja $v^\varepsilon(x,t) = \eta^\varepsilon * v$, uma função C^∞. Então, quando $\varepsilon \to 0$:

1. $v^\varepsilon \to v$ uniformemente em compactos,
2. $\nabla v^\varepsilon \to \nabla v$ uniformemente em compactos,
3. $v_t^\varepsilon \to v_t$ uniformemente em compactos.

Estas propriedades da regularização por convolução são bem conhecidas. Suas demonstrações ficam como exercícios para a leitora (veja Exercício 12).

Do mesmo modo que fizemos no início desta seção, usa-se o Lema 3.1 para obter uma sequência de pontos $(x_k, t_k) \to (x_0, t_0)$ e números $\varepsilon_k \to 0$, quando $k \to \infty$, tais que $u - v^{\varepsilon_k}$ tem um máximo local em (x_k, t_k).

Portanto v^{ε_k} é uma função teste legítima. Pela definição de solução de viscosidade temos que:

$$v_t^{\varepsilon_k}(x_k, t_k) + H(\nabla v^{\varepsilon_k}(x_k, t_k), x_k) \le 0.$$

Passando ao limite quando $k \to \infty$ concluímos que

$$v_t(x_0, t_0) + H(\nabla v(x_0, t_0), x_0) \le 0.$$

Por outro lado, da diferenciabilidade de u em (x_0, t_0), temos que u é subsolução no sentido clássico em (x_0, t_0), posto que u e suas primeiras derivadas coincidem com v em (x_0, t_0).

Por outro lado, como observado após o Lema 3.2, existe $v \in C^1$ tal que $u - v$ tem mínimo local estrito em (x_0, t_0). O argumento análogo demonstra que u será também supersolução no sentido clássico em (x_0, t_0), o que conclui a demonstração.

∎

3.2 Definições alternativas de solução de viscosidade

Do ponto de vista prático, de estudar soluções de viscosidade, veremos que é útil estar de posse de uma definição alternativa, porém equivalente, de solução de viscosidade que prescinde do uso de funções teste. Contudo essa definição alternativa se apoia no conceito de *semidiferencial* de uma função contínua, que não faz parte do conteúdo usual de um curso de análise real. Começaremos esta seção com a definição de semidiferenciais e algumas de suas propriedades básicas.

Seja u uma função contínua em um domínio $\Omega \subseteq I\!\!R^m$ e $x_0 \in \Omega$.

Definição 3.2 *A superdiferencial de u em x_0 é definida por:*

$$D^+u(x_0) \equiv \left\{ p \in I\!\!R^m \;\middle|\; \limsup_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0) - p \cdot (x - x_0)}{|x - x_0|} \leq 0 \right\}.$$

A subdiferencial de u em x_0 é definida por:

$$D^-u(x_0) \equiv \left\{ p \in I\!\!R^m \;\middle|\; \liminf_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0) - p \cdot (x - x_0)}{|x - x_0|} \geq 0 \right\}.$$

As semidiferenciais $D^+u(x_0)$ e $D^-u(x_0)$ são subconjuntos fechados e convexos de $I\!\!R^m$ (Exercício 13).

Exemplos:

1. A função u é diferenciável em x_0 se e somente se $D^+u(x_0) = D^-u(x_0) = \{\nabla u(x_0)\}$ se e somente se $D^+u(x_0) \cap D^-u(x_0) \neq \emptyset$.

2. Se $m = 1$ e $u(x) = -|x|$ então $D^+u(0) = [-1, 1]$ e $D^-u(0) = \emptyset$.

3. Se $m = 1$ e $u(x) = x \sin(1/x)$ então $D^+u(0) = D^-u(0) = \emptyset$.

Estes fatos são uma consequência do Lema abaixo. Sua demonstração é deixada como exercício (Exercício 14).

Lema 3.3 *Seja u uma função contínua e $x_0 \in \Omega$. Então $p_0 \in D^+u(x_0)$ se e somente se existe uma função C^1, φ, tal que:*

(i) $u - \varphi$ *tem um máximo local em* x_0*;*

(ii) $(u - \varphi)(x_0) = 0$*;*

(iii) $\nabla \varphi(x_0) = p_0$*;*

Mais ainda, podemos escolher φ de modo que $(u-\varphi)(x) \leq -|x-x_0|^2$.

Similarmente, $q_0 \in D^-u(x_0)$ se e somente se existe uma função C^1, ψ, satisfazendo as três condições acima com mínimo no lugar de máximo. Também podemos escolher ψ de modo que $(u-\psi)(x) \geq |x-x_0|^2$.

Demonstração: Primeiro, vamos supor que $p_0 \in D^+u(x_0)$. Da mesma maneira que na demonstração do Lema 3.2, vamos assumir, sem perda de generalidade, que $x_0 = 0$, $u(x_0) = 0$ e $p_0 = 0$.

Defina $\rho_1 = \rho_1(x) \equiv u(x)/|x|$. Como $0 \in D^+u(0)$, temos que

$$\limsup_{x\to 0} \rho_1(x) \leq 0.$$

Defina $\rho_1^+ \equiv \max\{\rho_1, 0\}$, a parte não-negativa de ρ_1 e considere:

$$\rho_2(r) \equiv \max_{|x|\leq r} \rho_1^+(x).$$

Como $0 \in D^+u(0)$, temos que ρ_1^+ é contínua. Portanto a definição de ρ_2 acima é um máximo genuíno, e não um supremo, e ρ_2 é contínua.

A demonstração agora segue precisamente como a do Lema 3.2, tomando:

$$\varphi(x) = \int_{|x|}^{2|x|} \rho_2(r)dr + |x|^2.$$

Neste caso, $\varphi(0) = 0 = u(0)$, φ é C^1 e

$$\nabla\varphi(0) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|}\left[\int_{|x|}^{2|x|} \rho_2(r)dr + |x|^2\right] = 0.$$

Temos também que:

$$u(x) - \varphi(x) = |x|\rho_1(x) - \int_{|x|}^{2|x|} \rho_2(r)dr - |x|^2 \leq$$

$$\leq |x|\rho_2(|x|) - |x|\rho_2(|x|) - |x|^2 = -|x|^2 < 0,$$

se $x \neq 0$.

Suponha agora a existência de φ satisfazendo (i)-(iii). Para x suficientemente próximo de x_0 temos:

$$u(x) - \varphi(x) \leq u(x_0) - \varphi(x_0).$$

Portanto temos a seguinte estimativa para o quociente de diferenças:

$$\frac{u(x) - u(x_0) - p_0 \cdot (x - x_0)}{|x - x_0|} \leq \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0) - p_0 \cdot (x - x_0)}{|x - x_0|}.$$

Tomando $\limsup_{x \to x_0}$ de ambos os lados e usando o fato que $\nabla\varphi(x_0) = p_0$, vem que $p_0 \in D^+u(x_0)$.

A demonstração do resultado no caso de subdiferenciais é inteiramente análoga.

■

Observe que, na demonstração acima, dado $p_0 \in D^+u(x_0)$, constrói-se a função φ de modo que o máximo de $u - \varphi$ em x_0 seja global e estrito.

Vamos agora formular a definição de solução de viscosidade em termos de semidiferenciais. Na prática é, em geral, bastante simples traduzir uma demonstração que utiliza a definição baseada em funções teste em uma demonstração expressa em termos de semidiferenciais. A vantagem das semidiferenciais é estritamente notacional: os cálculos ficam mais compactos, e portanto mais fáceis de visualizar.

Para efeitos da teoria a ser desenvolvida nos próximos capítulos, é conveniente tratar equações diferenciais parciais mais gerais do que a equação de Hamilton-Jacobi. Seja $\Omega \subseteq I\!R^m$ e $F : \Omega \times I\!R \times I\!R^m \to I\!R$ contínua. Vamos definir solução de viscosidade para o problema de valor de fronteira:

$$\begin{cases} F(y, u, Du) = 0, \text{ em } \Omega \\ u = g, \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Estaremos interessados em três contextos distintos para este problema: $\Omega \subset I\!R^n$ um domínio aberto e limitado, $\Omega = I\!R^n$, sem condição no infinito, e $\Omega = I\!R^n \times (0, \infty)$ com a estrutura específica do problema de valor inicial (1.1). Nos dois primeiros casos $Du \equiv \nabla u$ e no terceiro caso, $y = (x, t)$ e $Du \equiv (\nabla u, u_t)$.

Definição 3.3 *Seja $u : \overline{\Omega} \to I\!R$ uma função limitada e uniformemente contínua.*

1. *Diz-se que u é uma* subsolução de viscosidade *da equação (3.1) se:*

   (a) $u \leq g$ em $\partial\Omega$ e

   (b) *para todo $y_0 \in \Omega$ e cada $v \in C^\infty(\Omega)$ tal que $(u - v)$ tem máximo local em y_0 vale:*

$$F(y_0, u(y_0), Dv(y_0)) \le 0.$$

2. *Diz-se que u é uma* supersolução de viscosidade *da equação (3.1) se:*

   (a) *$u \ge g$ em $\partial\Omega$ e*

   (b) *para todo $y_0 \in \Omega$ e cada $v \in C^\infty(\Omega)$ tal que $(u - v)$ tem mínimo local em y_0 vale:*

$$F(y_0, u(y_0), Dv(y_0)) \ge 0.$$

3. *Diz-se que u é uma* solução de viscosidade *se u for ao mesmo tempo subsolução e supersolução de viscosidade.*

Gostaríamos de chamar atenção para o fato de que o mesmo argumento que motivou a definição de solução de viscosidade para a equação de Hamilton-Jacobi no início deste capítulo, através de regularização parabólica, funciona se aplicado ao problema geral (3.1) e permite "obter" a definição acima de modo natural. Entretanto, em contraste com o problema de valor inicial para a equação de Hamilton-Jacobi, não há razão a priori para que a regularização com $\varepsilon\Delta u^\varepsilon$ no lado direito seja a "natural". Mais ainda, veremos uma instância nesta monografia em que a regularização "natural" consiste de usar $-\varepsilon\Delta u^\varepsilon$ no lado direito. Consequentemente as desigualdades na definição de solução de viscosidade correspondente ficam invertidas. Este é o caso do problema de valor terminal para a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman geral que discutiremos no último capítulo. Em resumo, a definição de solução de viscosidade para o problema formulado na generalidade acima incorpora uma certa arbitrariedade. A teoria que será desenvolvida é consistente, porém existe uma outra teoria, igualmente consistente, que trata soluções de viscosidade definidas com os sinais invertidos. Finalmente, observamos que a decisão de qual definição é adequada só pode ser tomada de acordo com o problema específico em questão.

Observemos que a Definição 3.3 permite uma certa flexibilidade na escolha do conjunto de funções teste que deve ser considerado.

Lema 3.4 *Seja $u = u(y)$ uniformemente contínua e limitada em $\overline{\Omega}$, $u \le g$ ($u \ge g$) em $\partial\Omega$. São equivalentes:*

(i) u é subsolução (supersolução) de viscosidade de (3.1).

(ii) Para todo $y_0 \in \Omega$ e para toda $v \in C^1(\Omega)$ tal que $u - v$ tem um máximo (mínimo) local em y_0 temos: $F(y_0, u(y_0), Dv(y_0)) \leq (\geq) 0$.

(iii) Para todo $y_0 \in \Omega$ e para toda $v \in C^\infty(\Omega)$ tal que $u-v$ tem um máximo (mínimo) local em y_0 com $u(y_0) = v(y_0)$ temos: $F(y_0, u(y_0), Dv(y_0)) \leq (\geq) 0$.

Demonstração: Quanto menor o conjunto de funções teste, menos restritiva é a definição. Portanto é imediato que (ii) implica (i) e que (i) implica (iii).

Primeiro, vejamos que (iii) implica (i). Seja $y_0 \in \Omega$ e $v \in C^\infty(\Omega)$, tal que $u - v$ tem um máximo local em y_0. Seja $\tilde{v}(y) = v(y) + u(y_0) - v(y_0)$. Então $\tilde{v}(y_0) = u(y_0)$, $D\tilde{v} = Dv$ e $u - \tilde{v}$ tem um máximo local em y_0. Consequentemente,

$$F(y_0, u(y_0), Dv(y_0)) = F(y_0, u(y_0), D\tilde{v}(y_0)) \leq 0.$$

Para mostrar que (i) implica (ii) usamos o argumento de regularização por convolução com um suavizador da demonstração do Teorema 3.1.

A demonstração para supersoluções é inteiramente análoga.

∎

O próximo resultado diz respeito a como formular a Definição 3.3 em termos de semidiferenciais.

Proposição 3.1 *Seja u uma função limitada e uniformemente contínua em $\overline{\Omega}$ tal que $u \leq (\geq) g$ em $\partial\Omega$. Então u é subsolução (supersolução) de viscosidade de (3.1) se e somente se para todo $y_0 \in \Omega$ e $p_0 \in D^+u(y_0)$ ($p_0 \in D^-u(y_0)$) temos $F(y_0, u(y_0), p_0) \leq (\geq) 0$.*

Demonstração: Vamos primeiro mostrar que u é uma subsolução de viscosidade. Pelo Lema 3.4, podemos considerar $v \in C^1(\Omega)$ tal que $u - v$ tem um máximo local em y_0 e $u(y_0) = v(y_0)$. Então, pelo Lema 3.3, $p_0 \equiv Dv(y_0) \in D^+u(y_0)$ e portanto $F(y_0, u(y_0), Dv(y_0)) \leq 0$. Logo u é subsolução de viscosidade.

Reciprocamente, seja $y_0 \in \Omega$ e $p_0 \in D^+u(y_0)$. Então, usando novamente o Lema 3.3, existe uma função $v \in C^1(\Omega)$ tal que $u - v$ tem um máximo local em y_0, $u(y_0) = v(y_0)$ e $Dv(y_0) = p_0$. Usando agora o Lema 3.4, podemos utilizar a função $v \in C^1$ como função teste. Assim, $F(y_0, u(y_0), p_0) = F(y_0, u(y_0), Dv(y_0)) \leq 0$.

A demonstração do resultado para supersoluções de viscosidade é inteiramente análoga.

■

Concluimos este capítulo com a definição alternativa de solução de viscosidade, expressa em termos de semidiferenciais, que é equivalente à Definição 3.3 pela proposição acima.

Definição 3.4 *Seja* $u : \overline{\Omega} \to I\!R$ *uma função limitada e uniformemente contínua.*

1. *Diz-se que* u *é uma* subsolução de viscosidade *da equação (3.1) se:*
   (a) $u \leq g$ *em* $\partial\Omega$ *e*
   (b) *para cada* $y \in \Omega$ *e* $p \in D^+u(y)$ *temos* $F(y, u(y), p) \leq 0$.
2. *Diz-se que* u *é uma* supersolução de viscosidade *da equação (3.1) se:*
   (a) $u \geq g$ *em* $\partial\Omega$ *e*
   (b) *para cada* $y \in \Omega$ *e* $q \in D^-u(y)$ *temos* $F(y, u(y), q) \geq 0$.
3. *Diz-se que* u *é uma* solução de viscosidade *se* u *for ao mesmo tempo subsolução e supersolução de viscosidade.*

Chapter 4

Princípios de comparação e unicidade

O objetivo deste capítulo é estudar o problema de unicidade de soluções de viscosidade. Isto será feito através de princípios de comparação. Os resultados de unicidade têm um papel central na teoria, e as demonstrações, como apresentadas na literatura, tendem a parecer artificiais. Nossa intenção é de torná-las o mais natural possível, reconstruindo as idéias originais, trabalhando a partir das situações mais simples e refinando progressivamente os resultados até chegarmos a um teorema de unicidade de soluções de viscosidade para equações de Hamilton-Jacobi. Apresentaremos neste capítulo quatro demonstrações de princípios de comparação em contextos distintos e de sofisticação crescente.

4.1 Problemas estacionários

Para dar uma idéia de como a definição de solução de viscosidade funciona como um *critério de exclusão*, selecionando uma entre várias possíveis soluções, consideremos o seguinte exemplo.

Exemplo: Seja $\Omega = (-1, 1) \subset I\!R$. Considere o problema de valor de fronteira:

$$\begin{cases} (u')^2 = 1, \text{ em } \Omega \\ u(-1) = 0 = u(1). \end{cases} \tag{4.1}$$

Um candidato Lipschitz contínuo para solução deste problema pode ser obtido escolhendo um conjunto mensurável $E \subset [-1,1]$ arbitrário, tal que a medida de Lebesgue de E seja igual a 1. Considere as funções:

$$\chi_E = \chi_E(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in E \\ 0, \text{ se } x \notin E, \end{cases}$$

e

$$u_E = u_E(x) \equiv \int_{-1}^{x} (2\chi_E(t) - 1)\, dt.$$

A função u é Lipschitz contínua, satisfaz a equação (4.1) em quase toda parte, e ainda $u(-1) = 0$. A condição sobre a medida de E força $u(1) = 0$. Isto produz uma vasta classe de possíveis soluções.

Fixe $x_0 \in (-1,1)$. Suponha, por simplicidade, que x_0 seja uma descontinuidade isolada da derivada de u. Portanto, próximo a x_0, a função u éidêntica a: $\sigma|x - x_0| + u(x_0)$, com $\sigma = 1$ ou $\sigma = -1$.

Vejamos primeiro o caso $\sigma = -1$ (bico côncavo). É fácil de ver, usando o Lema 3.3, que $D^+u(x_0) = [-1,1]$ e $D^-u(x_0) = \emptyset$. Utilizando a Definição 3.4, vemos que u é uma subsolução de viscosidade em x_0 pois, para todo $p \in [-1,1]$, $p^2 - 1 \leq 0$. Ao mesmo tempo, u é uma supersolução em x_0 por vacuidade.

Por outro lado, se $\sigma = 1$, $D^+u(x_0) = \emptyset$ e $D^-u(x_0) = [-1,1]$. Portanto, u é uma subsolução em x_0 por vacuidade, mas u não é uma supersolução pois para que fosse, teríamos que ter, para todo $q \in D^-u(x_0) = [-1,1]$, $q^2 - 1 \geq 0$, uma impossibilidade. Portanto a definição de solução de viscosidade seleciona funções que apresentam apenas bicos côncavos. A única função da forma u_E que possui apenas bicos côncavos é $u(x) = 1 - |x|$ (Exercício 16).

Sejam $\Omega \subseteq I\!R^n$, e $H : I\!R^m \times \Omega \to I\!R$ contínua. O problema estacionário que utilizaremos como ponto de partida tem a forma específica:

$$\begin{cases} u + H(\nabla u, x) = 0, \text{ em } \Omega \\ u = g, \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

No caso em que $\Omega = I\!R^n$, não se impõe condição no infinito para além da limitação global já presente na definição de solução de viscosidade.

Vamos começar tratando o caso em que Ω é um aberto limitado. Primeiro vamos dar uma dedução heurística do princípio de comparação para subsoluções e supersoluções de viscosidade. Este argumento heurístico contém o argumento chave da demonstração rigorosa que apresentaremos posteriormente.

Sejam u_1 subsolução e u_2 supersolução de viscosidade para o problema (4.2). Em particular, estamos assumindo que $u_1 \leq g \leq u_2$ em $\partial\Omega$. Vamos supor que u_1 e u_2 sejam diferenciáveis em Ω. Queremos mostrar que $u_1 \leq u_2$ em Ω (isto é o que chamamos de princípio de comparação).

Suponhamos, por contradição, que $u_1 \not\leq u_2$. Seja $x_0 \in \overline{\Omega}$ um ponto de máximo positivo de $u_1 - u_2$. Claramente, x_0 não está em $\partial\Omega$, pois lá $u_1 - u_2 \leq 0$. Em x_0 temos:

$$\nabla u_1(x_0) = \nabla u_2(x_0),$$

$$u_1(x_0) > u_2(x_0) \text{ e}$$

$$u_1(x_0) + H(\nabla u_1(x_0), x_0) \leq 0 \leq u_2(x_0) + H(\nabla u_2(x_0), x_0).$$

A última desigualdade foi obtida observando-se que $\nabla u_1(x_0) \in D^+u_1(x_0)$ e que $\nabla u_2(x_0) \in D^-u_2(x_0)$.

Disso concluímos que, de fato, $u_1(x_0) \leq u_2(x_0)$, uma contradição.

Como estender esta idéia para semisoluções de viscosidade não necessariamente diferenciáveis? Vamos enunciar explicitamente uma consequência imediata do Lema 3.3 que será necessária para tornar rigoroso o argumento acima.

Lema 4.1 *Sejam $u, v \in C^0(\Omega)$ e $\varphi \in C^1(\Omega)$.*

(i) Se $u + \varphi$ tem máximo local em $x_0 \in \Omega$ então $-\nabla\varphi(x_0) \in D^+u(x_0)$.

(ii) Se $-v + \zeta$ tem máximo local em $x_0 \in \Omega$ então $\nabla\zeta(x_0) \in D^-u(x_0)$.

Demonstração: Se $u - \varphi$ tem máximo local em x_0 então:

$$u(x) \leq -\varphi(x) + \varphi(x_0) + u(x_0).$$

Portanto, pelo Lema 3.3,

$$\nabla(-\varphi(x) + \varphi(x_0) + u(x_0)) = -\nabla\varphi(x_0) \in D^+u(x_0).$$

Similarmente, se $-v + \zeta$ tem um máximo local em x_0 então:

$$v(x) \geq \zeta(x) - \zeta(x_0) + v(x_0).$$

Portanto, pelo Lema 3.3,

$$\nabla(\zeta(x) - \zeta(x_0) + v(x_0)) = \nabla\zeta(x_0) \in D^- v(x_0).$$

∎

Agora vamos tornar rigoroso o argumento heurístico apresentado antes. Suponha que $\Omega \subset I\!R^n$ é um domínio limitado e $H : I\!R^n \times \Omega \to I\!R$ é uma função Lipschitz contínua na variável x, uniformemente em p, i.e. existe $K > 0$ tal que

$$|H(p, x) - H(p, y)| \leq K|x - y|.$$

Teorema 4.1 *Seja u uma subsolução e v uma supersolução de viscosidade do problema (4.2) com as hipóteses acima. Então $u \leq v$ em Ω.*

Demonstração: Vamos supor, por contradição, que $u \not\leq v$ em Ω. Seja x_0 o ponto de máximo global positivo de $u - v$ em $\overline{\Omega}$. Como $u \leq v$ em $\partial\Omega$ temos que $x_0 \in \Omega$. Definimos:

$$L \equiv u(x_0) - v(x_0) > 0 \text{ e } M \equiv \max\{\max_{\overline{\Omega}} |u|, \max_{\overline{\Omega}} |v|\}.$$

Note que, se encontrássemos um vetor p na interseção de $D^+u(x_0)$ e $D^-v(x_0)$, a demonstração estaria trivialmente concluída nas linhas do argumento heurístico. Infelizmente, o fato de $u - v$ possuir um máximo em x_0 não garante a existência de um tal p (Exercício 18). A observação técnica crucial nesta demonstração (de fato, na teoria de soluções de viscosidade como um todo) é que podemos encontrar este *p de forma aproximada* e que isto é o suficiente para obter a contradição que estamos buscando. Agora, como formular esta busca por um p que aproximadamente esteja em $D^+u(x_0)$ e $D^-v(x_0)$ ao mesmo tempo? Procuraremos em $\Omega \times \Omega$!

Afirmamos que, para todo $\varepsilon > 0$, existem pontos x_ε, $y_\varepsilon \in \Omega$ e um vetor $r_\varepsilon \in I\!R^n$ tal que $r_\varepsilon \in D^+u(x_\varepsilon) \cap D^-v(y_\varepsilon)$. Para verificar esta afirmação defina a função $\psi_\varepsilon : \Omega \times \Omega \to I\!R$ por:

$$\psi_\varepsilon(x, y) \equiv u(x) - v(y) - \frac{C}{\varepsilon^2}|x - y|^2,$$

com $C = 2M - L + 1$. Adiciona-se o parabolóide côncavo acima para forçar os máximos de ψ_ε a estarem próximos à diagonal de $\Omega \times \Omega$. Então, se $|x - y| \geq \varepsilon$, temos: $\psi_\varepsilon(x,y) \leq 2M - C = L - 1 < L$. Consequentemente, existem pontos x_ε, y_ε tais que ψ_ε tem um máximo em $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ e $|x_\varepsilon - y_\varepsilon| < \varepsilon$.

Vamos argumentar que, se ε é suficientemente pequeno, podemos assumir que $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ ficam longe da fronteira de $\Omega \times \Omega$. Primeiro, já observamos que $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ está em uma faixa de largura 2ε em torno da diagonal. Em cada ponto de $\partial\Omega \times \partial\Omega$, ψ_ε é não-positivo. Portanto, como $u(x) - v(y)$ é uniformemente contínua, existe uma vizinhança Γ (independente de ε), digamos, formada pela união das bolas de raio $\gamma > 0$ centradas nos pontos de $\partial\Omega \times \partial\Omega$ tal que $\psi_\varepsilon \leq L/2$ nesta vizinhança, e portanto o máximo de ψ_ε não está em Γ. Se $\varepsilon < \gamma$, o fecho da interseção da faixa de largura 2ε em torno da diagonal com o complementar de Γ está a uma distância maior que zero do bordo de $\Omega \times \Omega$.

Temos portanto que $x \mapsto \psi_\varepsilon(x, y_\varepsilon)$ tem um máximo local em x_ε, e também que $y \mapsto \psi_\varepsilon(x_\varepsilon, y)$ tem um máximo local em y_ε. Em outras palavras, a função

$$u + \varphi \equiv u(x) + \left[-v(y_\varepsilon) - \frac{C}{\varepsilon^2}|x - y_\varepsilon|^2 \right]$$

tem um máximo em x_ε, e a função

$$-v + \zeta \equiv -v(y) + \left[u(x_\varepsilon) - \frac{C}{\varepsilon^2}|x_\varepsilon - y|^2 \right]$$

tem um máximo em y_ε.

Pelo Lema 4.1 temos:

$$-\nabla_x \left[-v(y_\varepsilon) - \frac{C}{\varepsilon^2}|x - y_\varepsilon|^2 \right] = \frac{2C}{\varepsilon^2}(x_\varepsilon - y_\varepsilon) \in D^+u(x_\varepsilon)$$

$$\nabla_y \left[u(x_\varepsilon) - \frac{C}{\varepsilon^2}|x_\varepsilon - y|^2 \right] = \frac{2C}{\varepsilon^2}(x_\varepsilon - y_\varepsilon) \in D^-v(x_\varepsilon).$$

Assim, a afirmação está demonstrada, com $r_\varepsilon = (2C/\varepsilon^2)(x_\varepsilon - y_\varepsilon)$.

Pela definição de subsolução e supersolução de viscosidade obtemos:

$$u(x_\varepsilon) + H(r_\varepsilon, x_\varepsilon) \leq 0 \leq v(y_\varepsilon) + H(r_\varepsilon, y_\varepsilon).$$

Consequentemente, temos:

$$u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) \leq H(r_\varepsilon, y_\varepsilon) - H(r_\varepsilon, x_\varepsilon) \leq K|x_\varepsilon - y_\varepsilon| < K\varepsilon. \tag{4.3}$$

Agora, se soubéssemos que $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ converge a (x_0, x_0) quando $\varepsilon \to 0$, bastaria passar ao limite na desigualdade acima que teríamos nossa contradição. Contudo, não temos nenhum controle sobre a distância de $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ a (x_0, x_0). Temos que concluir a demonstração de outra maneira.

Sabemos que $\psi_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \geq L > 0$. Temos também, para todo $x \in \Omega$: $\psi_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \geq \psi_\varepsilon(x, x) = u(x) - v(x)$. Logo: $\psi_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \geq \max\{u(x) - v(x), 0\}$.

Finalmente:

$$\max\{u(x) - v(x), 0\} \leq u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) - \frac{C}{\varepsilon^2}|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2 \leq u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) < K\varepsilon.$$

Assim, como ε é arbitrário, $\max\{u(x) - v(x), 0\} = 0$. Isto conclui a demonstração.

■

Este princípio de comparação dá unicidade de solução de viscosidade como corolário imediato. De fato, se u e v são duas soluções de viscosidade do problema (4.2), sob as hipóteses do Teorema 4.1, então $u \leq v$ porque u é subsolução e v é supersolução. Por outro lado, $v \leq u$ porque u é supersolução e v é subsolução. Portanto, $u = v$.

Esta é a demonstração mais simples. Um primeiro refinamento seria na direção de enfraquecer as hipóteses sobre H. Suponha que, ao invés de assumir que H é Lipschitz, uniformemente na variável p, temos que H satisfaz a estimativa:

$$|H(p, x) - H(p, y)| \leq K|x - y|(1 + |p|).$$

A demonstração do Teorema 4.1 segue sem modificações até obtermos a desigualdade (4.3). Para concluir o argumento neste caso, precisamos da uma estimativa adicional, determinando de maneira mais precisa quão longe $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ está da diagonal. Observe que:

$$\psi_\varepsilon(x_\varepsilon, x_\varepsilon) \leq \psi_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon),$$

e portanto,

$$u(x_\varepsilon) - v(x_\varepsilon) \leq u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) - \frac{C}{\varepsilon^2}|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2.$$

Logo,

$$\frac{C}{\varepsilon^2}|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2 \leq v(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) = o(1).$$

Portanto, $|x_\varepsilon - y_\varepsilon| = o(\varepsilon)$.

Assim, temos que:

$$u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) \leq H(r_\varepsilon, y_\varepsilon) - H(r_\varepsilon, x_\varepsilon) \leq$$

$$\leq K|x_\varepsilon - y_\varepsilon|(1+|r_\varepsilon|) \equiv k|x_\varepsilon - y_\varepsilon| \left[1 + \frac{2C|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}{\varepsilon^2}\right] = o(1).$$

Portanto, como no Teorema 4.1, temos que $\max\{u(x) - v(x), 0\} = o(1)$ quando $\varepsilon \to 0$, o que leva à contradição requerida.

O próximo passo é modificar a demonstração do princípio de comparação para lidar com domínios não compactos. Isto irá demandar uma estratégia para localizar a sequência $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ nas partes compactas do domínio.

Considere o problema:

$$u + H(\nabla u, x) = 0, \text{ em } \mathbb{R}^n, \tag{4.4}$$

com as seguintes hipóteses sobre H:

(a) $|H(p,x) - H(p,y)| \leq K_1|x-y|$,

(b) $|H(p,x) - H(q,x)| \leq K_2|p-q|$.

Teorema 4.2 *Se u é subsolução de viscosidade e v é supersolução de viscosidade de (4.4), então $u \leq v$ em todo o $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Suponha, por contradição, que existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $u(x_0) - v(x_0) \equiv L > 0$ e defina $M \equiv \max\{\max_{\mathbb{R}^n}|u|, \max_{\mathbb{R}^n}|v|\}$. Tome $C = 2M - L + 1$ e $\varepsilon > 0$ e introduza:

$$\varphi_\varepsilon(x,y) = u(x) - v(y) - \frac{C}{\varepsilon^2}|x-y|^2.$$

Considere δ tal que $0 < \delta < 1/2$ e seja (x_1, y_1) tal que $\varphi_\varepsilon(x_1,y_1) > \sup_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon - \delta$. Seja também $\zeta : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, suave, tal que $\zeta(x_1,y_1) = 1$, $\zeta(x,y) = 0$ se $|x-x_1|^2 + |y-y_1|^2 \geq 1$ e $|\nabla\zeta| \leq 2$. Defina:

$$\psi_{\varepsilon,\delta}(x,y) \equiv \varphi_\varepsilon(x,y) + 2\delta\zeta(x,y).$$

Observe que $\psi_{\varepsilon,\delta}(x_1,y_1) > \sup_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon + \delta$ e que, se $|x-x_1|^2 + |y-y_1|^2 \geq 1$, então $\psi_{\varepsilon,\delta}(x,y) < \sup_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon$. Portanto, se $|x-y| \geq \varepsilon$, temos que:

$$\psi_{\varepsilon,\delta}(x,y) \leq u(x) - v(y) - C + 2\delta\zeta(x,y) \leq 2M - C + 2\delta = L - 1 + 2\delta < L =$$

$$= \varphi_\varepsilon(x_0, x_0) \leq \sup_{I\!R^n} \varphi_\varepsilon.$$

Logo, existe um ponto $(x_\varepsilon^\delta, y_\varepsilon^\delta) \in I\!R^{2n}$ onde $\psi_{\varepsilon,\delta}$ assume seu máximo. Como antes, temos que:

$$\frac{2C}{\varepsilon^2}(x_\varepsilon^\delta - y_\varepsilon^\delta) - 2\delta \nabla_x \zeta(x_\varepsilon^\delta, y_\varepsilon^\delta) \in D^+ u(x_\varepsilon^\delta)$$

e

$$\frac{2C}{\varepsilon^2}(x_\varepsilon^\delta - y_\varepsilon^\delta) - 2\delta \nabla_y \zeta(x_\varepsilon^\delta, y_\varepsilon^\delta) \in D^- v(y_\varepsilon^\delta).$$

Usando a definição de solução de viscosidade temos a seguinte estimativa:

$$u(x_\varepsilon^\delta) - v(y_\varepsilon^\delta) \leq H\left(\frac{2C}{\varepsilon^2}(x_\varepsilon^\delta - y_\varepsilon^\delta) + 2\delta \nabla_y \zeta, y_\varepsilon^\delta\right)$$

$$-H\left(\frac{2C}{\varepsilon^2}(x_\varepsilon^\delta - y_\varepsilon^\delta) + 2\delta \nabla_x \zeta, x_\varepsilon^\delta\right).$$

Utilizando as hipóteses sobre H, concluímos que:

$$u(x_\varepsilon^\delta) - v(y_\varepsilon^\delta) \leq K_1 |x_\varepsilon^\delta - y_\varepsilon^\delta| + K_2 8\delta \leq K_1 \varepsilon + 8K_2\delta.$$

Por outro lado, temos que

$$\psi_{\varepsilon,\delta}(x_\varepsilon^\delta, y_\varepsilon^\delta) \geq \sup_{I\!R^n} \varphi_\varepsilon \geq L > 0,$$

e, para qualquer $x \in I\!R^n$,

$$\psi_{\varepsilon,\delta}(x_\varepsilon^\delta, y_\varepsilon^\delta) \geq u(x) - v(x) + 2\delta\zeta(x, x) \geq u(x) - v(x).$$

Portanto, para qualquer $x \in I\!R^n$,

$$\max\{u(x) - v(x), 0\} \leq \psi_{\varepsilon,\delta}(x_\varepsilon^\delta, y_\varepsilon^\delta) =$$

$$= u(x_\varepsilon^\delta) - v(y_\varepsilon^\delta) - \frac{2C}{\varepsilon^2}|x_\varepsilon^\delta - y_\varepsilon^\delta|^2 + 2\delta\zeta(x_\varepsilon^\delta, y_\varepsilon^\delta) \leq K_1\varepsilon + 8K_2\delta + 2\delta.$$

Logo, $\max\{u(x) - v(x), 0\} \equiv 0$, concluindo a demonstração.

∎

Com este último resultado, concluímos o estudo de unicidade no caso estacionário. Nosso objetivo é ir progressivamente introduzindo os elementos necessários para uma demonstração completa do princípio de comparação para o problema de evolução. Para além das idéias já introduzidas, a única dificuldade remanescente é de dar conta do que acontece quando substituimos o termo u, que aparece em (4.2,4.4) por u_t. Este é o assunto da próxima seção.

4.2 Equações de Hamilton-Jacobi

Nesta seção vamos estabelecer o princípio de comparação para o problema de evolução. Vamos começar com o problema de valor inicial e de fronteira em um domínio limitado com condições restritivas sobre a Hamiltoniana. Em seguida, demonstraremos o princípio de comparação para o problema de evolução no $I\!R^n$ todo, (1.1), que é o resultado principal deste capítulo.

Seja $\Omega \subset I\!R^n$ um aberto limitado e $H : I\!R^n \times \Omega \to I\!R$ contínua. Vamos tratar primeiro o problema:

$$\begin{cases} u_t + H(\nabla u, x) = 0, \text{ em } \Omega \times (0,T) \equiv \Omega_T \\ u = \bar{u}, \text{ em } \partial\Omega \times (0,T) \\ u = g, \text{ em } \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{4.5}$$

Na definição de solução de viscosidade, aplicada ao problema acima, deve-se entender que a fronteira de Ω_T é $\partial\Omega \times (0,T) \cup \Omega \times \{t = 0\} \equiv \partial^*\Omega_T$, isto é, a fronteira no sentido de equações parabólicas.

Como na seção anterior, faremos uma ilustração heurística da demonstração do princípio de comparação neste caso. Sejam u_1 subsolução e u_2 supersolução de viscosidade diferenciáveis. Seja $\beta > 0$ e $\phi(x,t) \equiv u_1(x,t) - u_2(x,t) - \beta t$. Seja $(x_0,t_0) \in \overline{\Omega} \times [0,T]$ um ponto de máximo de ϕ.

Se $x_0 \in \Omega$ e $0 < t_0 \leq T$ então temos:

$$\nabla\phi(x_0,t_0) = 0 = \nabla u_1(x_0,t_0) - \nabla u_2(x_0,t_0) \text{ e}$$

$$\phi_t(x_0,t_0) \geq 0, \text{ logo } (u_1)_t(x_0,t_0) \geq (u_2)_t(x_0,t_0) + \beta.$$

Da definição de semisolução de viscosidade, vem:

$$(u_1)_t(x_0,t_0) + H(\nabla u_1(x_0,t_0), x_0) \leq 0 \leq (u_2)_t(x_0,t_0) + H(\nabla u_2(x_0,t_0), x_0).$$

Portanto, $\beta \leq 0$, uma contradição.

Concluímos que $(x_0,t_0) \in \partial^*\Omega_T$. Lembramos que $u_1 \leq u_2$ em $\partial^*\Omega_T$, em virtude da definição de semisolução de viscosidade. Logo, concluímos que

$$\phi(x,t) \leq \phi(x_0,t_0) \leq 0.$$

Portanto, $u_1(x,t) - u_2(x,t) \leq \beta t$, para todo (x,t) em $\overline{\Omega} \times [0,T]$ e para todo $\beta > 0$. Consequentemente, $u_1 \leq u_2$.

Este argumento é uma adaptação de um argumento comum para demonstrar o princípio de comparação para a equação do calor. Vamos agora transformar este argumento em uma demonstração rigorosa. Como no Teorema 4.1, vamos supor que a Hamiltoniana H é Lipschitz na segunda variável, uniformemente na primeira, isto é:

$$|H(p,x) - H(p,y)| \leq K|x-y|.$$

Teorema 4.3 *Seja u uma subsolução e v uma supersolução de viscosidade do problema (4.5) com a hipótese acima. Então $u \leq v$ em Ω_T.*

Demonstração: Suponha, por contradição, que existe $(x_0, t_0) \in \overline{\Omega} \times [0,T] = \overline{\Omega_T}$, um ponto de máximo positivo de $u - v$. Sejam

$$M \equiv \max\{\max_{\overline{\Omega_T}} |u|, \max_{\overline{\Omega_T}} |v|\} \text{ e } L \equiv u(x_0,t_0) - v(x_0,t_0).$$

Fixe $\varepsilon > 0$ e $\beta > 0$ e considere:

$$\psi_\varepsilon(x,y,t,s) \equiv u(x,t) - v(y,s) - \frac{C}{\varepsilon^2}\left(|x-y|^2 + (t-s)^2\right) - \frac{\beta}{2}(s+t),$$

onde $C \equiv 2M - L + 1 > 0$. Como no Teorema 4.1, se $|x-y| \geq \varepsilon$ ou $|t-s| \geq \varepsilon$ então:

$$\psi_\varepsilon(x,y,t,s) \leq 2M - C = L - 1.$$

Note que $\psi_\varepsilon(x_0,x_0,t_0,t_0) = L - \beta t_0$. Assumindo que β foi escolhido de forma que $\beta < 1/T$ temos que $L - \beta t_0 > L - 1$. Portanto, o máximo de ψ_ε é assumido em algum ponto $(x_\varepsilon, y_\varepsilon, t_\varepsilon, s_\varepsilon)$ tal que $|x_\varepsilon - y_\varepsilon| < \varepsilon$ e $|t_\varepsilon - s_\varepsilon| < \varepsilon$.

Consequentemente, a função:

$$(x,t) \mapsto \psi_\varepsilon(x, y_\varepsilon, t, s_\varepsilon)$$

tem um máximo em $(x_\varepsilon, t_\varepsilon)$ e

$$(y,s) \mapsto \psi_\varepsilon(x_\varepsilon, y, t_\varepsilon, s)$$

tem um máximo em $(y_\varepsilon, s_\varepsilon)$.

Se $(x_\varepsilon, t_\varepsilon)$ e $(y_\varepsilon, s_\varepsilon)$ estão ambos em Ω_T, então, pelo Lema 4.1, temos que:

$$\left(\frac{2C}{\varepsilon^2}(x_\varepsilon - y_\varepsilon), \frac{2C}{\varepsilon^2}(t_\varepsilon - s_\varepsilon) + \frac{\beta}{2}\right) \in D^+u(x_\varepsilon, t_\varepsilon),$$

e

$$\left(\frac{2C}{\varepsilon^2}(x_\varepsilon - y_\varepsilon), \frac{2C}{\varepsilon^2}(t_\varepsilon - s_\varepsilon) - \frac{\beta}{2}\right) \in D^- v(y_\varepsilon, s_\varepsilon).$$

Portanto, pela definição de semisolução de viscosidade, obtemos:

$$\frac{2C}{\varepsilon^2}(t_\varepsilon - s_\varepsilon) + \frac{\beta}{2} + H\left(\frac{2C}{\varepsilon^2}(x_\varepsilon - y_\varepsilon), x_\varepsilon\right) \leq 0 \tag{4.6}$$

e

$$0 \leq \frac{2C}{\varepsilon^2}(t_\varepsilon - s_\varepsilon) - \frac{\beta}{2} + H\left(\frac{2C}{\varepsilon^2}(x_\varepsilon - y_\varepsilon), y_\varepsilon\right). \tag{4.7}$$

Usando a hipótese sobre H vem que $\beta \leq K\varepsilon$. Como ε é arbitrário, $\beta \leq 0$, o que é uma contradição.

Suponha agora que $x_\varepsilon \in \Omega$ e $t_\varepsilon = T$. Vamos mostrar que a estimativa (4.6) é válida, mesmo que nada se possa dizer sobre $D^+u(x_\varepsilon, T)$. Fixe $\delta > 0$ e considere a função:

$$\varphi_{\varepsilon,\delta}(x,t) \equiv \psi_\varepsilon(x, y_\varepsilon, t, s_\varepsilon) - \frac{\delta}{T-t}.$$

Vamos assumir, por um instante, que o máximo local de ψ_ε em (x_ε, T) é estrito. Uma adaptação do Lema 3.1, juntamente com a observação que $\varphi_{\varepsilon,\delta}(x,t) \to -\infty$ quando $t \to T$, nos permite concluir que $\varphi_{\varepsilon,\delta}$ possui um máximo local $(x_\varepsilon^\delta, t_\varepsilon^\delta)$ (Exercício 19). Mais ainda, quando $\delta \to 0$, $(x_\varepsilon^\delta, t_\varepsilon^\delta) \to (x_\varepsilon, T)$ e, se δ for suficientemente pequeno, $(x_\varepsilon^\delta, t_\varepsilon^\delta) \in \Omega_T$.

Portanto, pelo Lema 4.1,

$$\left(\frac{2C}{\varepsilon^2}(x_\varepsilon^\delta - y_\varepsilon), \frac{2C}{\varepsilon^2}(t_\varepsilon^\delta - s_\varepsilon) + \frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{(T-t_\varepsilon^\delta)^2}\right) \in D^+u(x_\varepsilon^\delta, t_\varepsilon^\delta).$$

Logo, pela definição de subsolução de viscosidade,

$$\frac{2C}{\varepsilon^2}(t_\varepsilon^\delta - s_\varepsilon) + \frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{(T-t_\varepsilon^\delta)^2} + H\left(\frac{2C}{\varepsilon^2}(x_\varepsilon^\delta - y_\varepsilon), x_\varepsilon^\delta\right) \leq 0.$$

Mandando $\delta \to 0$, chega-se a:

$$\frac{2C}{\varepsilon^2}(T - s_\varepsilon) + \frac{\beta}{2} + H\left(\frac{2C}{\varepsilon^2}(x_\varepsilon - y_\varepsilon), x_\varepsilon\right) \leq 0, \tag{4.8}$$

que é (4.6) em $t_\varepsilon = T$, como queríamos.

Se (x_ε, T) não for ponto de máximo local estrito de ψ_ε, então substituimos ψ_ε pela função

$$\hat{\psi}(x,t) \equiv \psi_\varepsilon - |x - x_\varepsilon|^2 - (t-T)^2$$

na análise acima. Podemos deduzir, usando a função $\hat{\psi}$, a desigualdade (4.8), pois a derivada em (x_ε, T) da função quadrática adicionada a ψ_ε se anula.

Se, por outro lado, $y_\varepsilon \in \Omega$ e $s_\varepsilon = T$, o argumento análogo nos permite deduzir (4.7) em $s_\varepsilon = T$.

Portanto, mostramos que, se $(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \in \Omega \times \{t = T\}$ **ou** $(y_\varepsilon, s_\varepsilon) \in \Omega \times \{t = T\}$, então tanto (4.6) quanto (4.7) valem (pelo menos uma delas avaliada em $t_\varepsilon = T$ ou $s_\varepsilon = T$). Mandando $\varepsilon \to 0$, da mesma maneira que antes, conclui-se que $\beta \leq 0$, uma contradição.

O que mostramos, de fato, é que não existe nenhuma subsequência dos máximos $(x_\varepsilon, y_\varepsilon, t_\varepsilon, s_\varepsilon)$ tal que ambos $(x_\varepsilon, t_\varepsilon)$ e $(y_\varepsilon, s_\varepsilon)$ pertençam a $\Omega \times (0,T]$. A conclusão é que, para todo ε suficientemente pequeno, $(x_\varepsilon, t_\varepsilon)$ ou $(y_\varepsilon, s_\varepsilon)$ estão em $\partial^*\Omega_T$.

Resta apenas analisar esta alternativa. Para todo $(x,t) \in \partial^*\Omega$, temos que $\psi_\varepsilon(x,x,t,t) = u(x,t) - v(x,t) - \beta t \leq 0$, e também que $|x_\varepsilon - y_\varepsilon| < \varepsilon$, $|t_\varepsilon - s_\varepsilon| < \varepsilon$. Segue-se que:

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \psi_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, t_\varepsilon, s_\varepsilon) \leq 0.$$

Por outro lado, para todo $(x,t) \in \overline{\Omega_T}$, temos $\psi_\varepsilon(x,x,t,t) \leq \psi_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, t_\varepsilon, s_\varepsilon)$. Portanto, mandando $\varepsilon \to 0$:

$$u(x,t) - v(x,t) - \beta t \leq 0.$$

Lembrando que β é arbitrário vem que $u(x,t) - v(x,t) \leq 0$, o que contradiz a hipótese de que há um máximo positivo de $u - v$ em $\overline{\Omega_T}$.

■

Finalmente, temos todos os elementos necessários para demonstrar um princípio de comparação, e consequentemente unicidade, para o problema original (1.1). A demonstração inclui todas as idéias trabalhadas neste capítulo.

Vamos considerar o problema:

$$\begin{cases} u_t + H(\nabla u, x) = 0, & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u(x,0) = g(x) & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{4.9}$$

com as seguintes hipóteses sobre H:

(a) $|H(p,x) - H(p,y)| \leq K_1|x-y|(1+|p|)$,

(b) $|H(p,x) - H(q,x)| \leq K_2|p-q|$.

Teorema 4.4 *Se u é subsolução de viscosidade e v é supersolução de viscosidade de (4.9) então $u \leq v$ em $I\!R^n \times [0,T]$.*

Demonstração: A demonstração segue, em linhas gerais, a estrutura utilizada nos Teoremas 4.1, 4.2 e 4.3. Vamos supor, por contradição, que:

$$\sup_{I\!R^n \times [0,T]} (u - v) \equiv L > 0.$$

Seja $M \equiv \max\{\sup_{I\!R^n\times[0,T]} |u|, \sup_{I\!R^n\times[0,T]} |v|\}$. Fixe $\varepsilon > 0$ e escolha β tal que:

$$0 < \beta < \min\left\{\frac{1}{T}, \frac{L}{2T}\right\}.$$

Defina:

$$\psi_\varepsilon(x,y,t,s) = u(x,t) - v(y,s) - \frac{\beta}{2}(t+s) - \frac{C}{\varepsilon^2}(|x-y|^2 + |t-s|^2),$$

para x e y em $I\!R^n$, t e s e $[0,T]$. Como antes, $C = 2M - L + 1$.

Como em todas as outras demonstrações, primeiramente demonstramos que o máximo tem que ocorrer em uma pequena faixa em torno da diagonal.

Se $|x-y| \geq \varepsilon$ ou $|t-s| \geq \varepsilon$, temos que $\psi_\varepsilon(x,y,t,s) < L - 1$. Escolha δ de modo que:

$$0 < \delta < \min\left\{1 - \beta T, \frac{L}{2} - \beta T\right\}.$$

Tome $(x_\varepsilon, y_\varepsilon, t_\varepsilon, s_\varepsilon) \in I\!R^{2n} \times [0,T]^2$ tal que

$$\psi_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, t_\varepsilon, s_\varepsilon) \geq \sup_{I\!R^{2n}\times[0,T]^2} \psi_\varepsilon(x,y,t,s) - \delta.$$

Note que, como $t < T$,

$$L \leq \sup_{I\!R^n\times[0,T]} \psi_\varepsilon(x,x,t,t) + \beta T.$$

Portanto,

$$\psi_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, t_\varepsilon, s_\varepsilon) \geq L - \beta T - \delta.$$

Donde, pela escolha de δ, concluimos que $|x_\varepsilon - y_\varepsilon| < \varepsilon$ e $|t_\varepsilon - s_\varepsilon| < \varepsilon$.

Nosso próximo passo é provar que o ponto de máximo não ocorre próximo ao hiperplano $\{t = 0\}$. Isto é feito por uma versão mais elegante do argumento usado no Teorema 4.3 para o caso de pontos de máximo em $\partial^*\Omega_T$. Para isto, introduzimos a noção de módulo de continuidade.

Dada uma função $f = f(z)$ em $I\!R^m$ definimos o módulo de continuidade de f por:

$$w_f(r) \equiv \sup_{|z_1 - z_2| \leq r} |f(z_1) - f(z_2)|.$$

Se f é uniformemente contínua, então $w_f(r) < \infty$ e $w_f(r) \to 0$ quando $r \to 0$. Observe que $|f(z_1) - f(z_2)| \leq w_f(|z_1 - z_2|)$ para quaisquer $z_1, z_2 \in I\!R^m$.

Da escolha de δ vem que $\psi_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, t_\varepsilon, s_\varepsilon) \geq L/2$. Portanto:

$$\frac{L}{2} \leq u(x_\varepsilon, t_\varepsilon) - v(y_\varepsilon, s_\varepsilon) = (u(x_\varepsilon, t_\varepsilon) - u(x_\varepsilon, 0)) + (u(x_\varepsilon, 0) - v(x_\varepsilon, 0)) +$$

$$+ (v(x_\varepsilon, 0) - v(x_\varepsilon, t_\varepsilon)) + (v(x_\varepsilon, t_\varepsilon) - v(y_\varepsilon, s_\varepsilon)) \leq w_u(t_\varepsilon) + w_v(t_\varepsilon) + w_v(2\varepsilon).$$

Na última desigualdade usamos que $u \leq v$ em $\{t = 0\}$.

Escolha ε suficientemente pequeno de modo que

$$L/4 \leq w_u(t_\varepsilon) + w_v(t_\varepsilon).$$

Isto implica que existe $\mu > 0$ tal que $t_\varepsilon \geq \mu$ e, analogamente, $s_\varepsilon \geq \mu$.

Vamos agora introduzir uma função corte para dar conta da falta de compacidade do domínio, da mesma maneira que foi feito no Teorema 4.2.

Escolha uma função $\xi = \xi(x, y, t, s) \in C^\infty(I\!R^{2n} \times (0, T + \mu)^2)$ tal que:

1. $\xi(x_\varepsilon, y_\varepsilon, t_\varepsilon, s_\varepsilon) = 1$,

2. $0 \leq \xi \leq 1$,

3. $|\nabla_x \xi|$, $|\nabla_y \xi|$, $|\partial_t \xi|$ e $|\partial_s \xi|$ são globalmente limitados por uma constante $C_1 > 0$ e

4. $\xi(x, y, t, s) = 0$ se $|x - x_\varepsilon|^2 + |y - y_\varepsilon|^2 + |t - t_\varepsilon|^2 + |s - s_\varepsilon|^2 > \mu^2/4$.

Defina:

$$\phi(x, y, t, s) = \psi_\varepsilon(x, y, t, s) + 2\delta\xi(x, y, t, s).$$

Como $\phi \equiv \psi_\varepsilon$ fora do suporte de ξ e

$$\phi(x_\varepsilon, y_\varepsilon, t_\varepsilon, s_\varepsilon) = \psi_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, t_\varepsilon, s_\varepsilon) + 2\delta > \sup_{I\!R^n \times [0,T]^2} \psi_\varepsilon + \delta,$$

temos que ϕ atinge seu máximo sobre $I\!R^{2n} \times [0,T]^2$ em um ponto $(x_\varepsilon^\delta, y_\varepsilon^\delta, t_\varepsilon^\delta, s_\varepsilon^\delta)$ no suporte de ξ. Em particular t_ε^δ e s_ε^δ são ambos maiores do que $\mu/2$.

Observe que a aplicação $(x,t) \mapsto \phi(x, y_\varepsilon^\delta, t, s_\varepsilon^\delta)$ tem um máximo em $(x_\varepsilon^\delta, t_\varepsilon^\delta)$ e $(y,s) \mapsto \phi(x_\varepsilon^\delta, y, t_\varepsilon^\delta, s)$ tem um máximo em $(y_\varepsilon^\delta, s_\varepsilon^\delta)$.

Como na demonstração do Teorema 4.3, precisamos dividir a demonstração em dois casos:

(i) $t_\varepsilon^\delta < T$ e $s_\varepsilon^\delta < T$,

(ii) $t_\varepsilon^\delta = T$ ou $s_\varepsilon^\delta = T$.

No caso (i), usando o Lema 4.1, temos que o vetor:

$$\left(\frac{2C}{\varepsilon^2}(x_\varepsilon^\delta - y_\varepsilon^\delta) - 2\delta\nabla_x\xi(x_\varepsilon^\delta, y_\varepsilon^\delta, t_\varepsilon^\delta, s_\varepsilon^\delta), \frac{2C}{\varepsilon^2}(t_\varepsilon^\delta - s_\varepsilon^\delta) - 2\delta\partial_t\xi(x_\varepsilon^\delta, y_\varepsilon^\delta, t_\varepsilon^\delta, s_\varepsilon^\delta) + \frac{\beta}{2}\right)$$

está em $D^+u(x_\varepsilon^\delta, t_\varepsilon^\delta)$.

Usando novamente o Lema 4.1, temos que o vetor:

$$\left(\frac{2C}{\varepsilon^2}(x_\varepsilon^\delta - y_\varepsilon^\delta) + 2\delta\nabla_y\xi(x_\varepsilon^\delta, y_\varepsilon^\delta, t_\varepsilon^\delta, s_\varepsilon^\delta), \frac{2C}{\varepsilon^2}(t_\varepsilon^\delta - s_\varepsilon^\delta) + 2\delta\partial_s\xi(x_\varepsilon^\delta, y_\varepsilon^\delta, t_\varepsilon^\delta, s_\varepsilon^\delta) - \frac{\beta}{2}\right)$$

está em $D^-v(y_\varepsilon^\delta, s_\varepsilon^\delta)$.

Como u é subsolução e v é supersolução de viscosidade, obtemos o seguinte par de desigualdades:

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{2} + \frac{2C}{\varepsilon^2}(t_\varepsilon^\delta - s_\varepsilon^\delta) - 2\delta\xi_t(x_\varepsilon^\delta, y_\varepsilon^\delta, t_\varepsilon^\delta, s_\varepsilon^\delta) + \\ +H\left(\frac{2C}{\varepsilon^2}(x_\varepsilon^\delta - y_\varepsilon^\delta) - 2\delta\nabla_x\xi(x_\varepsilon^\delta, y_\varepsilon^\delta, t_\varepsilon^\delta, s_\varepsilon^\delta), x_\varepsilon^\delta\right) \le 0\end{aligned} \tag{4.10}$$

e

$$\begin{aligned}0 \le -\frac{\beta}{2} + \frac{2C}{\varepsilon^2}(t_\varepsilon^\delta - s_\varepsilon^\delta) + 2\delta\xi_s(x_\varepsilon^\delta, y_\varepsilon^\delta, t_\varepsilon^\delta, s_\varepsilon^\delta) + \\ +H\left(\frac{2C}{\varepsilon^2}(x_\varepsilon^\delta - y_\varepsilon^\delta) + 2\delta\nabla_y\xi(x_\varepsilon^\delta, y_\varepsilon^\delta, t_\varepsilon^\delta, s_\varepsilon^\delta), y_\varepsilon^\delta\right).\end{aligned} \tag{4.11}$$

No caso (ii) tambem é possível obter as estimativas (4.10,4.11). De fato, se $t_\varepsilon^\delta = T$, usa-se um argumento inteiramente análogo ao utilizado no Teorema 4.3, subtraindo $\gamma/(T-t)$ de $\phi(x, y_\varepsilon^\delta, t, s_\varepsilon^\delta)$ e a mesma adaptação do Lema 3.1 para obter (4.10). Caso $s_\varepsilon^\delta = T$, obtem-se (4.11).

Das desigualdades (4.10) e (4.11) vem:

$$\beta \leq 2\delta(\xi_t + \xi_s) +$$

$$+\frac{1}{2}\left[H\left(\frac{2C}{\varepsilon^2}(x_\varepsilon^\delta - y_\varepsilon^\delta) + 2\delta\nabla_y\xi, y_\varepsilon^\delta\right) - H\left(\frac{2C}{\varepsilon^2}(x_\varepsilon^\delta - y_\varepsilon^\delta) - 2\delta\nabla_x\xi, x_\varepsilon^\delta\right)\right].$$

Usando as hipóteses sobre a Hamiltoniana e o fato de que as derivadas de ξ são globalmente limitadas temos que:

$$\beta \leq C_1\delta + K_1|x_\varepsilon^\delta - y_\varepsilon^\delta|\left(C_2 + \frac{2C|x_\varepsilon^\delta - y_\varepsilon^\delta|}{\varepsilon^2}\right) + 4K_2C_1\delta. \tag{4.12}$$

Procuraremos agora o refinamento na estimativa da distância entre x_ε^δ e y_ε^δ (e entre t_ε^δ e s_ε^δ) de maneira análoga à que foi feita após a demonstração do Teorema 4.1. Isto é feito para podermos obter a demonstração sem assumir que H é Lipschitz em x uniformemente em p.

Temos que:

$$\phi(x_\varepsilon^\delta, x_\varepsilon^\delta, t_\varepsilon^\delta, t_\varepsilon^\delta) \leq \phi(x_\varepsilon^\delta, y_\varepsilon^\delta, t_\varepsilon^\delta, s_\varepsilon^\delta),$$

logo,

$$u(x_\varepsilon^\delta, t_\varepsilon^\delta) - v(x_\varepsilon^\delta, t_\varepsilon^\delta) - \beta t_\varepsilon^\delta + 2\delta\xi(x_\varepsilon^\delta, x_\varepsilon^\delta, t_\varepsilon^\delta, t_\varepsilon^\delta) \leq$$

$$\leq u(x_\varepsilon^\delta, t_\varepsilon^\delta) - v(y_\varepsilon^\delta, s_\varepsilon^\delta) - \frac{\beta}{2}(t_\varepsilon^\delta + s_\varepsilon^\delta) - \frac{2C}{\varepsilon^2}(|x_\varepsilon^\delta - y_\varepsilon^\delta|^2 + (t_\varepsilon^\delta - s_\varepsilon^\delta)^2) + 2\delta\xi(x_\varepsilon^\delta, y_\varepsilon^\delta, t_\varepsilon^\delta, s_\varepsilon^\delta).$$

Consequentemente,

$$\frac{2C}{\varepsilon^2}(|x_\varepsilon^\delta - y_\varepsilon^\delta|^2 + (t_\varepsilon^\delta - s_\varepsilon^\delta)^2) \leq$$

$$\leq v(x_\varepsilon^\delta, t_\varepsilon^\delta) - v(y_\varepsilon^\delta, s_\varepsilon^\delta) + \frac{\beta}{2}(t_\varepsilon^\delta - s_\varepsilon^\delta) + 2\delta(\xi(x_\varepsilon^\delta, y_\varepsilon^\delta, t_\varepsilon^\delta, s_\varepsilon^\delta) - \xi(x_\varepsilon^\delta, x_\varepsilon^\delta, t_\varepsilon^\delta, t_\varepsilon^\delta)) \leq$$

$$\leq w_v(|x_\varepsilon^\delta - y_\varepsilon^\delta| + |t_\varepsilon^\delta - s_\varepsilon^\delta|) + \frac{\beta}{2}|t_\varepsilon^\delta - s_\varepsilon^\delta| + 2\delta w_\xi(|x_\varepsilon^\delta - y_\varepsilon^\delta| + |t_\varepsilon^\delta - s_\varepsilon^\delta|).$$

Portanto, $|x_\varepsilon^\delta - y_\varepsilon^\delta|$ e $|t_\varepsilon^\delta - s_\varepsilon^\delta|$ são $o(\varepsilon)$ quando $\varepsilon \to 0$.

Combinando este fato com a estimativa (4.12) e mandando $\varepsilon, \delta \to 0$ temos que $\beta \leq 0$, uma contradição.

■

Já vimos que o resultado acima fornece unicidade de solução de viscosidade imediatamente. Uma consequência adicional, que não mencionamos antes, é estabilidade da solução de viscosidade com respeito a perturbações do dado inicial. Tornaremos isto preciso no corolário abaixo.

Corolário 4.1 *Seja H uma Hamiltoniana satisfazendo as hipóteses usadas no Teorema 4.4. Sejam u e v soluções de viscosidade do problema (4.9) com Hamiltoniana H e dados iniciais $u(\cdot, 0) = g_1$ e $v(\cdot, 0) = g_2$. Seja $\varepsilon > 0$ e suponha que, para qualquer $x \in I\!R^n$, $|g_1(x) - g_2(x)| \leq \varepsilon$. Então $|u(x,t) - v(x,t)| \leq \varepsilon$, para todo $(x,t) \in I\!R^n \times [0,T]$.*

Demonstração: A demonstração é bastante simples. Comece observando que, se $w = w(x,t)$ é uma solução de viscosidade de (4.9), então, para qualquer constante C, $w + C$ é a solução de viscosidade de (4.9) com dado inicial $w(\cdot, 0) + C$. De fato, basta notar que as semidiferenciais de w e de $w + C$ em qualquer ponto coincidem.

Portanto, da hipótese, temos que $g_1 \leq g_2 + \varepsilon$, e portanto, pelo Teorema 4.4, $u \leq v + \varepsilon$. Analogamente, obtemos que $u \geq v - \varepsilon$.

■

Chapter 5

Causalidade e existência

Neste capítulo vamos dar continuidade ao estudo de princípios de comparação, demonstrando um resultado de propagação de informação para soluções de viscosidade de um problema de valor inicial. Vamos também discutir o problema de existência de solução de viscosidade, primeiro no caso particular de equações de Hamilton-Jacobi-Bellman, demonstrando que a função valor introduzida e estudada no Capítulo 1 é solução de viscosidade, num sentido apropriado. Concluiremos o capítulo com uma discussão mais ampla do problema de existência, e com uma introdução ao método de Perron para equações de Hamilton-Jacobi.

5.1 Causalidade

Nesta seção vamos estudar um refinamento do princípio de comparação para a equação de Hamilton-Jacobi (4.9), obtendo um resultado de natureza local. Isto irá implicar velocidade finita de propagação de informação, confirmando a natureza hiperbólica das equações de Hamilton-Jacobi, mesmo no contexto de soluções de viscosidade.

Vamos começar com uma derivação heurística da causalidade. Suponha que a Hamiltoniana H satisfaça, para algum $K > 0$ independente de x:

$$\begin{array}{l} |H(p,x) - H(q,x)| \leq K|p-q| \text{ e} \\ H \text{ é uniformemente contínua em } x, \text{ uniformemente em } p. \end{array} \tag{5.1}$$

Vamos supor que exista uma função $\Lambda \in C^1(\mathbb{R}^n \times (0,T))$, contínua em $\mathbb{R}^n \times [0,T]$, tal que:

1. Λ é não-negativa,
2. $\Lambda \equiv 0$ para $|x|$ suficientemente grande,
3. $\Lambda_t + K|\nabla\Lambda| < 0$ no interior do suporte de Λ, ou para x no interior do suporte de $\Lambda(\cdot, T)$.

Denotaremos o interior do suporte de Λ por $S^\circ \subset \mathbb{R}^n \times (0, T)$.

A construção de funções Λ satisfazendo as condições acima será feita no fim desta seção.

Suponha que u é uma subsolução de viscosidade da equação de Hamilton-Jacobi com dado inicial g_1 e que v é supersolução da equação de Hamilton-Jacobi, com dado inicial g_2. Nosso objetivo é mostrar que, se $g_1 \le g_2$ no suporte de $\Lambda(\cdot, 0)$ então $u \le v$ no suporte de Λ.

Vamos assumir por um instante que u e v são diferenciáveis. Neste caso, temos que:

$$u_t(x,t) + H(\nabla u(x,t), x) \le 0$$
$$-v_t(x,t) - H(\nabla v(x,t), x) \le 0.$$

Consequentemente, somando estas desigualdades e usando a hipótese (5.1) segue-se que:

$$(u - v)_t \le K|\nabla(u - v)|. \tag{5.2}$$

Suponha, por contradição, que exista um ponto em S° em que $u - v > 0$. Então existe (x_0, t_0) um ponto de máximo positivo de $\Lambda^2(u - v)$, já que $\Lambda^2(u - v)$ é contínua no suporte de Λ, que é compacto. Temos também que $t_0 > 0$, pois $u \le g_1 \le g_2 \le v$ no suporte de $\Lambda(\cdot, 0)$. Portanto, $(x_0, t_0) \in S^\circ$ ou $t_0 = T$. Temos então que, em (x_0, t_0):

$$0 \le (\Lambda^2(u - v))_t - K|\nabla(\Lambda^2(u - v))| =$$
$$= 2\Lambda\Lambda_t(u - v) + \Lambda^2(u - v)_t - K\left|\Lambda^2\nabla(u - v) + 2\Lambda(u - v)\nabla\Lambda\right| \le$$
$$\le 2\Lambda\left((u - v)\Lambda_t + |u - v|K|\nabla\Lambda|\right) + \Lambda^2\left((u - v)_t - K|\nabla(u - v)|\right) \le$$
$$\le 2\Lambda(u - v)\left(\Lambda_t + K|\nabla\Lambda|\right) < 0,$$

o que é uma contradição. A penúltima desigualdade segue de (5.2) e a última, das hipóteses feitas sobre Λ, e da localização de (x_0, t_0).

O objetivo agora é tornar o argumento acima rigoroso. Para isto, precisaremos da regra de Leibniz para semidiferenciais.

Lema 5.1 *Seja* Ω *um aberto de* $I\!R^m$ *e sejam* $\phi \in C^1(\Omega)$ *e* u *contínua em* Ω. *Seja* $x_0 \in \Omega$ *tal que* $\phi(x_0) > 0$. *Se* $q \in D^{\pm}(\phi u)(x_0)$ *então*

$$\frac{q - u(x_0)\nabla\phi(x_0)}{\phi(x_0)} \in D^{\pm}u(x_0).$$

Demonstração: Faremos a demonstração apenas no caso de superdiferenciais; o caso de subdiferenciais é análogo.

Seja $q \in D^+(\phi u)(x_0)$. Pela definição temos:

$$\limsup_{x\to x_0} \frac{\phi(x)u(x) - \phi(x_0)u(x_0) - q\cdot(x-x_0)}{|x-x_0|} \leq 0.$$

Observamos então que:

$$\frac{\phi(x)u(x) - \phi(x_0)u(x_0) - q\cdot(x-x_0)}{|x-x_0|} =$$

$$= \frac{\phi(x)u(x) - \phi(x_0)u(x) + \phi(x_0)u(x) - \phi(x_0)u(x_0) - q\cdot(x-x_0)}{|x-x_0|} =$$

$$= \frac{\phi(x_0)}{|x-x_0|}\left[u(x) - u(x_0) + \phi(x)\frac{u(x)}{\phi(x_0)} - \phi(x_0)\frac{u(x)}{\phi(x_0)} - \frac{q}{\phi(x_0)}\cdot(x-x_0)\right] =$$

$$= \frac{\phi(x_0)}{|x-x_0|}\left[u(x) - u(x_0) + (\phi(x) - \phi(x_0))\frac{u(x)}{\phi(x_0)} - \frac{q}{\phi(x_0)}\cdot(x-x_0)\right] =$$

$$= \frac{\phi(x_0)}{|x-x_0|}\left[u(x) - u(x_0) + (\nabla\phi(x_0)\cdot(x-x_0) + o(|x-x_0|))\frac{u(x)}{\phi(x_0)} - \right.$$

$$\left. + \frac{q}{\phi(x_0)}\cdot(x-x_0)\right] =$$

$$= \frac{\phi(x_0)}{|x-x_0|}\left[u(x) - u(x_0) - \left(\frac{q}{\phi(x_0)} - \frac{u(x)}{\phi(x_0)}\nabla\phi(x_0)\right)\cdot(x-x_0)\right] +$$

$$+\frac{u(x)o(|x-x_0|)}{|x-x_0|}.$$

Dos fatos que $\phi(x_0) > 0$, que $u(x)o(|x-x_0|)/|x-x_0| \to 0$ quando $x \to x_0$, e que u é contínua, podemos concluir que:

$$\limsup_{x\to x_0} \frac{1}{|x-x_0|}\left[u(x)-u(x_0)-\left(\frac{q}{\phi(x_0)}-\frac{u(x_0)}{\phi(x_0)}\nabla\phi(x_0)\right)\cdot(x-x_0)\right] \leq 0.$$

Isto é o que queríamos demonstrar no caso de superdiferencial.

∎

O próximo passo é demonstrar uma variante do princípio de comparação, que torna rigoroso o argumento heurístico.

Seja H uma Hamiltoniana satisfazendo (5.1) e seja Λ uma função satisfazendo precisamente as condições impostas no início desta seção.

Teorema 5.1 *Suponha que u é uma subsolução de viscosidade da equação de Hamilton-Jacobi com Hamiltoniana H e dado inicial g_1 e que v é supersolução da mesma equação, com dado inicial g_2. Se $g_1 \leq g_2$ no suporte de $\Lambda(\cdot, 0)$ então $u \leq v$ no suporte de Λ.*

Demonstração: Como estamos demonstrando um outro princípio de comparação não é de se surpreender que esta demonstração tenha muitos elementos em comum com as que a precederam.

Suponha, por contradição, que existe um ponto (x_0, t_0) no suporte de Λ tal que:

$$L \equiv \Lambda^2(x_0,t_0)[u(x_0,t_0)-v(x_0,t_0)] > 0.$$

Sejam:

$$M \equiv \max\left\{\sup_{I\!R^n\times[0,T]}|u|, \sup_{I\!R^n\times[0,T]}|v|\right\} \text{ e } N \equiv \max\left\{\sup_{I\!R^n\times[0,T]}\Lambda^2, 1\right\}.$$

Fixe $\varepsilon > 0$ e considere:

$$\psi_\varepsilon(x,y,t,s) \equiv \Lambda(x,t)\Lambda(y,s)\left[u(x,t)-v(y,s)-\frac{C}{\varepsilon^2}(|x-y|^2+|t-s|^2)\right],$$

onde $C = 2M-(L-1)/N > 0$.

Fica claro, agora que dobramos a dimensão, o motivo porque estivemos trabalhando com Λ^2 ao invés de Λ, pois estaríamos calculando as semidiferenciais de $\sqrt{\Lambda}$ caso contrário. O argumento heurístico funciona igualmente bem com Λ no lugar de Λ^2.

Como é usual, verifica-se facilmente que, se $|x-y| \geq \varepsilon$ ou $|t-s| \geq \varepsilon$, então $\psi_\varepsilon(x,y,t,s) \leq L-1 < L$. Por outro lado, como Λ tem suporte compacto, ψ_ε assume seu máximo. Seja $(x_\varepsilon, y_\varepsilon, t_\varepsilon, s_\varepsilon)$ um ponto de máximo de ψ_ε. Denotaremos $\psi_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, t_\varepsilon, s_\varepsilon)$ por ψ_ε^*. Temos que: $|x_\varepsilon - y_\varepsilon| < \varepsilon$ e $|t_\varepsilon - s_\varepsilon| < \varepsilon$. Vamos assumir, inicialmente, que $(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \in S^\circ$ e $(y_\varepsilon, s_\varepsilon) \in S^\circ$ (lembre que S° é o interior do suporte de Λ, entendido como um subconjunto de $I\!R^n \times (0,T)$).

Sejam:

$$\varphi_\varepsilon(x,t) \equiv \Lambda(y_\varepsilon, s_\varepsilon)\Lambda(x,t)\left[-v(y_\varepsilon, s_\varepsilon) - \frac{C}{\varepsilon^2}(|x-y_\varepsilon|^2 + |t-s_\varepsilon|^2)\right] \text{ e}$$

$$\zeta_\varepsilon(y,s) \equiv \Lambda(x_\varepsilon, t_\varepsilon)\Lambda(y,s)\left[u(x_\varepsilon, t_\varepsilon) - \frac{C}{\varepsilon^2}(|x_\varepsilon - y|^2 + |t_\varepsilon - s|^2)\right].$$

Temos que:

$$(x,t) \mapsto \Lambda(x,t)\Lambda(y_\varepsilon, s_\varepsilon)u(x,t) + \varphi_\varepsilon(x,t) \text{ tem um máximo em } (x_\varepsilon, t_\varepsilon),$$

e também que:

$$(y,s) \mapsto -\Lambda(x_\varepsilon, t_\varepsilon)\Lambda(y,s)v(y,s) + \zeta_\varepsilon(y,s) \text{ tem um máximo em } (y_\varepsilon, s_\varepsilon).$$

Usando o que sabemos sobre o cálculo de semidiferenciais, especificamente os Lemas 4.1 e 5.1, vem que:

$$\frac{-\nabla_{(x,t)}\varphi_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon) - u(x_\varepsilon, t_\varepsilon)\Lambda(y_\varepsilon, s_\varepsilon)\nabla_{(x,t)}\Lambda(x_\varepsilon, t_\varepsilon)}{\Lambda(x_\varepsilon, t_\varepsilon)\Lambda(y_\varepsilon, s_\varepsilon)} \in D^+u(x_\varepsilon, t_\varepsilon), \text{ e}$$

$$\frac{\nabla_{(y,s)}\zeta_\varepsilon(y_\varepsilon, s_\varepsilon) - v(y_\varepsilon, s_\varepsilon)\Lambda(x_\varepsilon, t_\varepsilon)\nabla_{(x,t)}\Lambda(y_\varepsilon, s_\varepsilon)}{\Lambda(x_\varepsilon, t_\varepsilon)\Lambda(y_\varepsilon, s_\varepsilon)} \in D^-v(y_\varepsilon, s_\varepsilon).$$

Calculando as derivadas de φ_ε e ζ_ε e usando a definição de semisolução de viscosidade chegamos a:

$$\frac{-\Lambda_t(x_\varepsilon,t_\varepsilon)}{\Lambda^2(x_\varepsilon,t_\varepsilon)\Lambda(y_\varepsilon,s_\varepsilon)}\psi_\varepsilon^* + \frac{2C}{\varepsilon^2}(t_\varepsilon - s_\varepsilon)+$$

$$+H\left(\frac{-\nabla_x\Lambda(x_\varepsilon,t_\varepsilon)}{\Lambda^2(x_\varepsilon,t_\varepsilon)\Lambda(y_\varepsilon,s_\varepsilon)}\psi_\varepsilon^* + \frac{2C}{\varepsilon^2}(x_\varepsilon - y_\varepsilon), x_\varepsilon\right) \leq 0, \text{ e}$$

$$0 \leq \frac{\Lambda_t(y_\varepsilon,s_\varepsilon)}{\Lambda(x_\varepsilon,t_\varepsilon)\Lambda^2(y_\varepsilon,s_\varepsilon)}\psi_\varepsilon^* + \frac{2C}{\varepsilon^2}(t_\varepsilon - s_\varepsilon)+$$

$$+H\left(\frac{\nabla_x\Lambda(y_\varepsilon,s_\varepsilon)}{\Lambda(x_\varepsilon,t_\varepsilon)\Lambda^2(y_\varepsilon,s_\varepsilon)}\psi_\varepsilon^* + \frac{2C}{\varepsilon^2}(x_\varepsilon - y_\varepsilon), y_\varepsilon\right).$$

Logo, usando (5.1), vem que:

$$0 \leq \frac{\Lambda_t(x_\varepsilon,t_\varepsilon)}{\Lambda^2(x_\varepsilon,t_\varepsilon)\Lambda(y_\varepsilon,s_\varepsilon)}\psi_\varepsilon^* + \frac{\Lambda_t(y_\varepsilon,s_\varepsilon)}{\Lambda(x_\varepsilon,t_\varepsilon)\Lambda^2(y_\varepsilon,s_\varepsilon)}\psi_\varepsilon^*+$$

$$+K\left|\frac{\nabla_x\Lambda(x_\varepsilon,t_\varepsilon)}{\Lambda^2(x_\varepsilon,t_\varepsilon)\Lambda(y_\varepsilon,s_\varepsilon)}\psi_\varepsilon^* + \frac{\nabla_x\Lambda(y_\varepsilon,s_\varepsilon)}{\Lambda(x_\varepsilon,t_\varepsilon)\Lambda^2(y_\varepsilon,s_\varepsilon)}\psi_\varepsilon^*\right| + o(1).$$

Observamos agora que ambos t_ε e s_ε ficam longe de 0 devido à hipótese sobre os dados iniciais $g_1 \leq g_2$. Temos também que, se t_ε ou s_ε for igual a T, ainda é possível deduzir as desigualdades acima. Para verificar estas duas afirmações é necessário utilizar adaptações simples dos argumentos análogos utilizados nas demonstrações dos Teoremas 4.3 e 4.4.

Por compacidade do suporte de Λ concluímos que x_ε, $y_\varepsilon \to \bar{x}$ e t_ε, $s_\varepsilon \to \bar{t}$ quando $\varepsilon \to 0$, passando a uma subsequência se necessário. Como $\psi_\varepsilon^* \geq L > 0$, da continuidade de u e v vem que $\Lambda(\bar{x},\bar{t}) > 0$. Feitas essas considerações, passamos ao limite, quando $\varepsilon \to 0$ na última desigualdade obtida acima e obtemos:

$$0 \leq 2\frac{\Lambda_t(\bar{x},\bar{t})}{\Lambda^3(\bar{x},\bar{t})} + 2K\frac{|\nabla_x\Lambda(\bar{x},\bar{t})|}{\Lambda^3(\bar{x},\bar{t})} < 0,$$

uma contradição.

∎

Finalmente, vamos discutir a construção da função Λ satisfazendo as hipóteses requeridas no início desta seção. De fato, vamos construir uma família de funções Λ^α com as propriedades que queremos. Fixe $R_0 > 0$. Para cada $\alpha > 0$ defina:

$$R_\alpha = (1+2\alpha)^{-1} R_0 \text{ e } \lambda_\alpha = (1+2\alpha)^{-1} R_0^{-\alpha}. \tag{5.3}$$

Lema 5.2 *Para cada $\alpha > 0$ existe uma função $\Lambda^\alpha \in C^1(I\!R^n \times (0,T))$, contínua no fecho, não-negativa, satisfazendo as seguintes condições:*

1. *supp* $\Lambda^\alpha = \left\{(x,t) \;\middle|\; |x| \le (\lambda_\alpha^{-1}(R_\alpha - Kt))^{1/(1+\alpha)},\ 0 \le t \le R_\alpha/K\right\} \equiv C_\alpha$, *que é compacto.*

2. $\Lambda_t^\alpha + K|\nabla \Lambda^\alpha| < 0$ *no interior do suporte de* Λ^α.

Demonstração: Seja $g \in C^\infty(I\!R)$ tal que $g(r) \equiv 0$ se $r \le 0$ e $g'(r) > 0$ para $r > 0$. Definimos:

$$\Lambda^\alpha(x,t) \equiv g(R_\alpha - Kt - \lambda_\alpha |x|^{1+\alpha}),$$

onde os números R_α e λ_α serão selecionados convenientemente.

Observe que Λ^α é $C^1(I\!R^n \times (-\infty,\infty))$ e não-negativa para todo $\alpha > 0$. O suporte de Λ^α é precisamente o conjunto no enunciado deste lema.

Temos:

$$\frac{\partial \Lambda^\alpha}{\partial t} = -Kg'(R_\alpha - Kt - \lambda_\alpha |x|^{1+\alpha})$$

e

$$K\nabla\Lambda^\alpha = \lambda_\alpha K g'(R_\alpha - Kt - \lambda_\alpha |x|^{1+\alpha})(1+\alpha)|x|^{\alpha-1}x.$$

Desse modo, vem que:

$$\frac{\partial \Lambda^\alpha}{\partial t} + K|\nabla\Lambda^\alpha| = Kg'(R_\alpha - Kt - \lambda_\alpha |x|^{1+\alpha})[\lambda_\alpha(1+\alpha)|x|^\alpha - 1].$$

Verificamos agora que, para qualquer $0 \le t < R_\alpha/K$,

$$\text{se } |x| < \left(\frac{R_\alpha - Kt}{\lambda_\alpha}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \text{ então } \frac{\partial \Lambda^\alpha}{\partial t}(x,t) + K|\nabla\Lambda^\alpha(x,t)| < 0.$$

Basta observar que:

$$\lambda_\alpha(1+\alpha)|x|^\alpha - 1 \le \lambda_\alpha(1+\alpha)\left(\frac{R_\alpha}{\lambda_\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} - 1 =$$

$$= (1+2\alpha)^{-1}R_0^{-\alpha}(1+\alpha)R_0^{\alpha} - 1 = (1+\alpha)(1+2\alpha)^{-1} - 1 < 0.$$

■

Seja H uma Hamiltoniana satisfazendo (5.1). Vamos agora utilizar o Lema acima para localizar mais precisamente os cones de causalidade para soluções de viscosidade de (4.9).

Proposição 5.1 *Suponha que u é uma subsolução de viscosidade da equação de Hamilton-Jacobi com Hamiltoniana H e dado inicial g_1 e que v é supersolução da mesma equação, com dado inicial g_2. Seja $R > 0$, $x_0 \in I\!R^n$, e suponha que $g_1 \leq g_2$ na bola $B(x_0, R)$. Então $u(x,t) \leq v(x,t)$ no cone $C \equiv \{x \,|\, |x - x_0| \leq R - Kt\}$.*

Demonstração: Vamos assumir primeiro que $x_0 = 0$. Tomando $R_0 = R$ em (5.3) observamos que R_α e λ_α são tais que $R_\alpha \to R$ e $\lambda_\alpha \to 1$ quando $\alpha \to 0$.

Sejam Λ^α as funções construidas no Lema 5.2. Notemos que, das hipóteses desta proposição, $g_1 \leq g_2$ no suporte de $\Lambda^\alpha(\cdot, 0)$ para qualquer $\alpha > 0$, pois $(R_\alpha/\lambda_\alpha)^{1/(1+\alpha)} = R$.

Usando o Lema 5.2 e o Teorema 5.1 temos que $u(x,t) \leq v(x,t)$ se $(x,t) \in C_\alpha$ para algum α.

É fácil ver que C está contido na união dos C_α, para $\alpha > 0$. Isto conclui a demonstração quando $x_0 = 0$.

Se $x_0 \neq 0$ considere a mesma função Λ^α acima e use a translação $\bar{\Lambda}^\alpha(x,t) \equiv \Lambda^\alpha(x - x_0, t)$. É fácil ver que o suporte de $\bar{\Lambda}^\alpha$ é a translação por x_0 do suporte de Λ^α e que $\bar{\Lambda}^\alpha$ satisfaz a desigualdade diferencial apropriada no interior de seu suporte. Portanto concluímos a demonstração repetindo o argumento acima.

■

Uma consequência deste resultado é uma versão localizada do resultado de estabilidade demonstrado no fim do capítulo anterior, Corolário 4.1 (Exercício 21).

O resultado acima também implica um tipo mais robusto de unicidade, comumente chamada de unicidade local. Vamos formular precisamente este corolário utilizando as noções de domínios de dependência e de influência, que tomamos emprestadas da teoria de equações hiperbólicas.

Definição 5.1 *Seja u uma solução de viscosidade do problema (1.1), definida em $I\!R^n \times (0,\infty)$. Se (x_0, t_0) é um ponto em $I\!R^n \times (0,\infty)$ definimos o domínio* *de dependência associado a (x_0, t_0) como o conjunto dos $x \in I\!R^n$ tais que, para toda vizinhança U de x, existe uma solução de viscosidade v de (1.1) tal que $u(y,0) = v(y,0)$ para y no complementar de U e $u(x_0,t_0) \neq v(x_0,t_0)$. Para $x_0 \in I\!R^n$, definimos o domínio de influência associado a x_0 como o conjunto dos pontos $(x,t) \in I\!R^n \times (0,\infty)$ tais que x_0 está no domínio de dependência de (x,t).*

Os resultados deste capítulo estão longe de fornecer uma caracterização precisa dos domínios de influência e de dependência para soluções de viscosidade de (1.1). O que dispomos é de uma estimativa a priori sobre a localização destes conjuntos. Como antes, seja H uma Hamiltoniana para (1.1) satisfazendo (5.1).

Corolário 5.1 *Seja u a solução de viscosidade do problema (1.1) definida em $I\!R^n \times (0,\infty)$. Para cada $(x_0,t_0) \in I\!R^n \times (0,\infty)$, o domínio de dependência associado a (x_0,t_0) está contido na bola de centro x_0 e raio Kt_0. Se x_0 é um ponto de $I\!R^n$, o dominio de influência associado a x_0 está contido no cone: $\{(x,t) \in I\!R^n \times (0,\infty) \,|\, |x - x_0| \leq Kt\}$.*

Demonstração: Vamos primeiro demonstrar o resultado relativo a domínios de dependência. Basta mostrar que, se $|x - x_0| > Kt_0$, então x não está no domínio de dependência associado a (x_0,t_0), isto é, existe uma vizinhança de x tal que, para qualquer solução v com $v(\cdot,0)$, idêntica a $u(\cdot,0)$ fora desta vizinhança, $u(x_0,t_0) = v(x_0,t_0)$.

Tome $r = |x - x_0| - Kt_0$ e a vizinhança $U = B(x,r)$ de x. Considere v uma solução de viscosidade de (4.9) tal que $v(y,0) = u(y,0)$ para $|y - x| \geq r$. Temos que a bola $B(x,r)$ é disjunta de $B(x_0, Kt_0)$. Tomando $R = Kt_0$ na Proposição 5.1 temos que $v(\cdot,0) = u(\cdot,0)$ em $B(x_0,R)$ e portanto $u(y,s) = v(y,s)$ no cone $C = \{(y,s) \,|\, |y - x_0| \leq K(t_0 - s) \text{ e } 0 \leq s \leq t_0\}$. Como $(x_0,t_0) \in C$, temos que $v(x_0,t_0) = u(x_0,t_0)$, como queríamos.

Para domínios de influência, basta verificar que, se (x,t) satisfaz $|x - x_0| > Kt$, então x_0 não está no domínio de dependência associado a (x,t). Isto, contudo, é óbvio a partir do que foi demonstrado acima.

■

Este resultado encerra nossa discussão sobre princípios de comparação. No restante deste capítulo discutiremos questões relativas à existência de soluções de viscosidade.

5.2 Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

Nesta seção retomamos o problema de controle ótimo discutido no Capítulo 1. Nosso objetivo principal é de estabelecer que a função valor é (a única) solução de viscosidade da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman. Isto fornece um primeiro resultado de existência, válido para Hamiltonianas com uma forma particular.

Começamos lembrando as definições e hipóteses feitas no Capítulo 1.

Seja $A \subseteq I\!R^m$ compacto e considere o conjunto de controles admissíveis:

$$\mathcal{A} = \{\alpha : [0,T] \to A \text{ tal que } \alpha(\cdot) \text{ é Lebesgue mensurável}\}.$$

A equação de estado (1.2) tem a forma $\dot{x}(s) = f(x(s), \alpha(s))$, para $\alpha \in \mathcal{A}$, $t < s < T$, e $x(t) = x$. O funcional custo é dado por:

$$C_{x,t}[\alpha] = \int_t^T h(x(s), \alpha(s))ds + g(x(T)).$$

A função $h : I\!R^n \times A \to I\!R$ é o custo operacional e a função $g : I\!R^n \to I\!R$ é o custo terminal. Assumimos que existe uma constante positiva K tal que as funções f, g e h satisfazem as seguintes hipóteses:

1. $f, h \in C^0(I\!R^n \times A)$, $g \in C^0(I\!R^n)$.
2. $|h(x,a)| \leq K$ e $|g(x)| \leq K$.
3. $|f(x,a) - f(y,a)| \leq K|x-y|$ para todo $x, y \in I\!R^n$, $a \in A$.
4. $|h(x,a) - h(y,a)| \leq K|x-y|$ para todo $x, y \in I\!R^n$, $a \in A$.
5. $|g(x) - g(y)| \leq K|x-y|$, para todo $x, y \in I\!R^n$.

A função valor é dada por:

$$u(x,t) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} C_{x,t}[\alpha].$$

Vamos começar verificando que a função valor é um candidato adequado a solução de viscosidade, pois é uma função limitada e uniformemente contínua.

Lema 5.3 *Existe uma constante $C > 0$ tal que a função valor $u(x,t)$ satisfaz:*

(i) $|u(x,t)| \leq C$

(ii) $|u(\hat{x},\hat{t}) - u(x,t)| \leq C(|x-\hat{x}| + |t-\hat{t}|)$ *para quaisquer* $x, \hat{x} \in I\!R^n$, $0 \leq t, \hat{t} \leq T$.

Demonstração: Primeiramente, observemos que as hipóteses de limitação sobre as funções custo h e g implicam (i) trivialmente.

Verifiquemos então (ii). Fixe x e $\hat{x}$ em $I\!R^n$ e $0 \leq t < T$. Seja $\varepsilon > 0$ e escolha $\hat{\alpha} \in \mathcal{A}$ tal que

$$u(\hat{x},t) \geq \int_t^T h(\hat{x}(s),\hat{\alpha}(s))ds + g(\hat{x}(T)) - \varepsilon,$$

onde $\hat{x}(\cdot)$ é a resposta ao controle $\hat{\alpha}$, $\hat{x}(t) = \hat{x}$. Considere $x(\cdot)$ a resposta ao controle $\hat{\alpha}$ tal que $x(t) = x$. Então:

$$u(x,t) - u(\hat{x},t) \leq$$

$$\leq \int_t^T h(x(s),\hat{\alpha}(s))ds + g(x(T)) - \int_t^T h(\hat{x}(s),\hat{\alpha}(s))ds - g(\hat{x}(T)) + \varepsilon.$$

Como h e g são Lipschitz contínuas temos:

$$u(x,t) - u(\hat{x},t) \leq \int_t^T K|x(s) - \hat{x}(s)|ds + K|x(T) - \hat{x}(T)| + \varepsilon.$$

Por outro lado, como f é Lipschitz contínua na primeira variável, aplicamos o lema de Gronwall e obtemos que: $|x(s)-\hat{x}(s)| \leq \tilde{K}|x-\hat{x}|$, $t \leq s \leq T$. Portanto, $u(x,t) - u(\hat{x},t) \leq \tilde{K}|x-\hat{x}| + \varepsilon$. Revertendo os papéis de x e $\hat{x}$ e lembrando que ε é arbitrário segue-se que:

$$|u(x,t) - u(\hat{x},t)| \leq \tilde{K}|x-\hat{x}|.$$

Observe que esta mesma desigualdade é imediata para $t = T$, já que g é Lipschitz.

Seja agora $x \in I\!R^n$, $0 \leq t < \hat{t} \leq T$. Fixe $\varepsilon > 0$ e escolha $\alpha \in \mathcal{A}$ de modo que:

$$u(x,t) \geq \int_t^T h(x(s),\alpha(s))ds + g(x(T)) - \varepsilon,$$

onde $x(\cdot)$ é a resposta ao controle α com $x(t) = x$. Defina o controle $\hat{\alpha} \in \mathcal{A}$ por $\hat{\alpha}(s) \equiv \alpha(s + t - \hat{t})$, para $\hat{t} \leq s \leq T$. Seja $\hat{x}(\cdot)$ a resposta ao controle $\hat{\alpha}$ tal que $\hat{x}(\hat{t}) = x$. Então, por unicidade, $\hat{x}(s) = x(s + t - \hat{t})$.

Logo,

$$u(x,\hat{t}) - u(x,t) \leq \int_{\hat{t}}^{T} h(\hat{x},\hat{\alpha})ds + g(\hat{x}(T)) - \int_{t}^{T} h(x,\alpha)ds - g(x(T)) + \varepsilon =$$

$$= -\int_{T+t-\hat{t}}^{T} h(x(s),\alpha(s))ds + g(x(T+t-\hat{t})) - g(x(T)) + \varepsilon \leq 2K|t-\hat{t}| + \varepsilon.$$

Agora tome $\hat{\alpha} \in \mathcal{A}$ tal que

$$u(x,\hat{t}) \geq \int_{\hat{t}}^{T} h(\hat{x}(s),\hat{\alpha}(s))ds + g(\hat{x}(T)) - \varepsilon,$$

onde $\hat{x}(\cdot)$ é a resposta ao controle $\hat{\alpha}$ tal que $\hat{x}(\hat{t}) = x$. Defina outro controle $\alpha \in \mathcal{A}$ por:

$$\alpha(s) = \begin{cases} \hat{\alpha}(s+\hat{t}-t) & t \leq s \leq T+t-\hat{t} \\ \hat{\alpha}(T) & T+t-\hat{t} \leq s \leq T. \end{cases}$$

Seja $x(\cdot)$ a respectiva resposta, com $x(t) = x$. Então, como antes, $\alpha(s) = \hat{\alpha}(s+\hat{t}-t)$, $x(s) = \hat{x}(s+\hat{t}-t)$, para $t \leq s \leq T+t-\hat{t}$, por unicidade. Portanto,

$$u(x,t) - u(x,\hat{t}) \leq$$

$$\leq \int_{t}^{T} h(x(s),\alpha(s))ds + g(x(T)) - \int_{\hat{t}}^{T} h(\hat{x}(s),\hat{\alpha}(s))ds - g(\hat{x}(T)) + \varepsilon =$$

$$= \int_{T+t-\hat{t}}^{T} h(x(s),\alpha(s))ds + g(x(T)) - g(x(T+t-\hat{t})) + \varepsilon \leq 2K|t-\hat{t}| + \varepsilon.$$

Logo, $|u(x,t) - u(x,\hat{t})| \leq 2K|t-\hat{t}|$, para todo $0 \leq t \leq \hat{t} \leq T$ e $x \in I\!\!R^n$. ■

Recordemos o princípio de programação dinâmica (1.7), demonstrado no Teorema 1.1:

$$u(x,t) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \int_{t}^{t+\delta} h(x(s),\alpha(s))ds + u(x(t+\delta),t+\delta) \right\}.$$

No Capítulo 1 utilizamos a relação acima para derivar informalmente a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$\begin{cases} u_t + \min_{a \in A}\{f(x,a) \cdot \nabla u + h(x,a)\} = 0 \\ u(x,T) = g(x). \end{cases} \tag{5.4}$$

Este é um problema de valor terminal para a equação de Hamilton-Jacobi com Hamiltoniana dada por:

$$H(p,x) \equiv \min_{a \in A} \{ f(x,a) \cdot p + h(x,a) \}.$$

Nosso próximo passo será de demonstrar que a função valor será uma solução de viscosidade para este problema de valor terminal. Precisaremos primeiro redefinir solução de viscosidade neste caso, pois as definições apresentadas no Capítulo 3 não são adequadas para o problema de valor terminal acima. Remetemos a leitora ao comentário feito após a Definição 3.3.

Definição 5.2 *Seja $u = u(x,t)$ limitada e uniformemente contínua em $\mathbb{R}^n \times [0,T]$. Diremos que u é solução de viscosidade do problema de valor terminal acima se:*

1. *$u = g$ em $\mathbb{R}^n \times \{t = T\}$.*
2. *Para qualquer $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ tivermos:*
   (a) *Se $u - v$ tem máximo local em $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0,T)$ então:*
   $$v_t(x_0,t_0) + H(\nabla v(x_0,t_0), x_0) \geq 0.$$
   (b) *Se $u - v$ tem mínimo local em $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0,T)$ então:*
   $$v_t(x_0,t_0) + H(\nabla v(x_0,t_0), x_0) \leq 0.$$

As desigualdades em (2a) e (2b) estão *invertidas* em relação à definição usada em problemas de valor inicial. Isto é natural devido à irreversibilidade da regularização parabólica utilizada para justificar a definição de solução de viscosidade. Resolvendo o problema aproximado com tempo correndo para trás é necessário introduzir a viscosidade com o sinal oposto ao que foi introduzido na Seção 3.1.

Teorema 5.2 *A função valor $u = u(x,t)$ é uma solução de viscosidade do problema de valor terminal para a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman.*

Demonstração: No Lema 5.3 vimos que u é Lipschitz (e portanto uniformemente) contínua e limitada. Além disso, pela definição da função valor, é fácil ver que $u(x,T) = g(x)$.

Seja agora $v \in C^\infty(I\!R^n \times (0,T))$ e suponha que $u - v$ tenha um máximo local em algum $(x_0, t_0) \in I\!R^n \times (0,T)$. Queremos demonstrar que v é supersolução em (x_0, t_0), isto é:

$$v_t(x_0,t_0) + \min_{a \in A}\{f(x_0,a) \cdot \nabla v(x_0,t_0) + h(x_0,a)\} \geq 0.$$

Vamos supor, por contradição, que isto não seja verdade. Então existe $a \in A$ e um $\theta > 0$ tal que:

$$v_t(x,t) + f(x,a) \cdot \nabla v(x,t) + h(x,a) \leq -\theta < 0,$$

para todo (x,t) suficientemente próximo de (x_0,t_0), digamos, numa bola $|x - x_0| + |t - t_0| < \zeta$. Podemos supor também que $(u-v)(x,t) \leq (u-v)(x_0,t_0)$ nesta mesma bola, tomando ζ um pouco menor caso necessário.

Considere o controle $\alpha(s) \equiv a$, $0 \leq s \leq T$ e $x(\cdot)$ a resposta correspondente com $x(t_0) = x_0$.

Escolha $\delta \in (0, \zeta)$ de modo que:

$$|x(s) - x_0| < \zeta \text{ para } t_0 \leq s \leq t_0 + \delta.$$

Então:

$$v_t(x(s),s) + f(x(s),a) \cdot \nabla v(x(s),s) + h(x(s),a) \leq -\theta.$$

Portanto,

$$u(x(t_0+\delta), t_0+\delta) - u(x_0,t_0) \leq v(x(t_0+\delta), t_0+\delta) - v(x_0,t_0) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{d}{ds} v(x(s),s)ds = \int_{t_0}^{t_0+\delta} \left(v_t(x(s),s) + \nabla v(x(s),s) \cdot \dot{x}(s)\right) ds =$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+\delta} \left(v_t(x(s),s) + f(x(s),a) \cdot \nabla v(x(s))\right) ds.$$

Usando o princípio de programação dinâmica com o controle $\alpha \equiv a$ temos:

$$u(x_0,t_0) \leq \int_{t_0}^{t_0+\delta} h(x(s),a)ds + u(x(t_0+\delta), t_0+\delta).$$

Logo, destas duas desigualdades vem:

$$0 \leq \int_{t_0}^{t_0+\delta} \left(v_t(x(s), s) + f(x(s), a) \cdot \nabla v(x(s), s) + h(x(s), a) \right) ds \leq -\theta\delta,$$

uma contradição.

A outra desigualdade não pode ser demonstrada de maneira análoga por causa do mínimo na definição da Hamiltoniana.

Suponha agora que $u - v$ tenha um mínimo local em $(x_0, t_0) \in I\!R^n \times (0, T)$. Precisamos mostrar que v agora é uma subsolução. Vamos supor por contradição que v não seja subsolução, e portanto, analogamente ao caso anterior, existe $\theta > 0$, tal que:

$$v_t(x, t) + f(x, a) \cdot \nabla v(x, t) + h(x, a) \geq \theta > 0,$$

para todo $a \in A$ e (x, t) suficientemente próximo de (x_0, t_0).

Suponha que isto seja verdade para (x, t) tal que $|x - x_0| + |t - t_0| < \zeta$ e suponha também que $(u - v)(x, t) \geq (u - v)(x_0, t_0)$ para todo (x, t) tal que $|x - x_0| + |t - t_0| < \zeta$.

Escolha $0 < \delta < \zeta$ tal que

$$|x(s) - x_0| < \zeta \text{ para } t_0 \leq s \leq t_0 + \delta,$$

onde $x(\cdot)$ é a resposta associada a algum controle $\alpha \in \mathcal{A}$ com $x(t_0) = x_0$. A escolha de δ, independente do controle α pode ser feita, pois o fluxo f da equação de estado é Lipschitz contínuo na primeira variável, uniformemente na segunda.

Para qualquer controle α temos:

$$u(x(t_0 + \delta), t_0 + \delta) - u(x_0, t_0) \geq v(x(t_0 + \delta), t_0 + \delta) - v(x_0, t_0) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{d}{ds} v(x(s), s) ds = \int_{t_0}^{t_0+\delta} \left(v_t(x(s), s) + f(x(s), \alpha(s)) \cdot \nabla v(x(s), s) \right) ds.$$

Por outro lado, usando novamente o princípio de programação dinâmica, é possível selecionar um controle $\tilde{\alpha}(\cdot) \in \mathcal{A}$ tal que:

$$u(x_0, t_0) \geq \int_{t_0}^{t_0+\delta} h(x(s), \tilde{\alpha}(s)) ds + u(x(t_0 + \delta), t_0 + \delta) - \frac{\theta\delta}{2}.$$

Combinando estas desigualdades em $\alpha = \tilde{\alpha}$ temos que:

$$0 \geq \int_{t_0}^{t_0+\delta} \left(v_t(x(s),s) + f(x(s),\tilde{\alpha}(s)) \cdot \nabla v(x(s),s) + h(x(s),\tilde{\alpha}(s))\right) ds - \frac{\theta\delta}{2} \geq$$

$$\geq \frac{\theta\delta}{2},$$

uma contradição, o que conclui a demonstração.

■

Para podermos aplicar toda a teoria de soluções de viscosidade que desenvolvemos anteriormente à função valor precisamos de uma maneira de traduzir para problemas de valor terminal os resultados obtidos para soluções de viscosidade de problemas de valor inicial. Isto é realizado através do seguinte lema:

Lema 5.4 *A função u é solução de viscosidade do problema (5.4) de acordo com a Definição 5.2 se e somente se a função $w = w(x,t) \equiv u(x, T-t)$ é solução de viscosidade, no sentido da Definição 3.1 da equação:*

$$\begin{cases} w_t + \tilde{H}(\nabla w, x) = 0 \\ w(x,0) = g(x), \end{cases}$$

onde $\tilde{H} \equiv -H$.

Demonstração: Suponha que u é uma solução de viscosidade de (5.4). Claramente w é limitada, uniformemente contínua e assume o dado inicial g.

Seja v uma função teste tal que $w - v$ tem um máximo local em (x_0, t_0). Então $u - \tilde{v}$ tem máximo local em $(x_0, T - t_0)$, onde $\tilde{v}(x,t) \equiv v(x, T-t)$. Pela Definição 5.2 temos que:

$$\tilde{v}_t(x_0, T-t_0) + H(\nabla\tilde{v}(x_0, T-t_0), x_0) \geq 0.$$

Como $\tilde{v}_t(x_0, T-t_0) = -v_t(x_0,t_0)$ e $\nabla\tilde{v}(x_0, T-t_0) = \nabla v(x_0,t_0)$ segue-se que:

$$-v_t(x_0,t_0) + H(\nabla v(x_0,t_0), x_0) \geq 0,$$

isto é:

$$v_t(x_0,t_0) + \tilde{H}(\nabla v(x_0,t_0), x_0) \leq 0.$$

Se $w - v$ tiver um mínimo local em (x_0, t_0), o argumento análogo mostra que:

$$v_t(x_0, t_0) + \tilde{H}(\nabla v(x_0, t_0), x_0) \geq 0.$$

Portanto, w é solução de viscosidade da equação de Hamilton-Jacobi com Hamiltoniana $\tilde{H}$, no sentido da Definição 3.1.

A recíproca é demonstrada da mesma maneira.

∎

Como consequência dos resultados demonstrados, temos que a função valor é a única solução de viscosidade do problema de valor terminal (5.4). Mais ainda, pode-se traduzir os outros resultados obtidos para o problema de valor inicial, isto é, existência do cone de dependência e estabilidade em relação a perturbações de g, para a função valor.

5.3 Método de Perron

Esta seção tem como objetivo ampliar a discussão sobre a questão de existência de soluções de viscosidade para além do contexto da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman. Existem três maneiras, utilizadas na literatura, de obter resultados de existência para equações de Hamilton-Jacobi. A primeira consiste de extensões da análise feita na seção anterior, no sentido de achar uma formulação variacional análoga à definição de função valor. Veja, por exemplo, os trabalhos [10, 11].

A segunda maneira é o método de viscosidade evanescente, como foi apresentado informalmente na Seção 3.1. Vamos ilustrar isto com o enunciado de um teorema específico, devido a A. Friedman [13].

Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u^\varepsilon_t + H(\nabla u^\varepsilon, x) = \varepsilon \Delta u^\varepsilon, \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0, T) \\ u^\varepsilon(x, 0) = g(x), \text{ em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{5.5}$$

Teorema 5.3 *Suponha que H e g satisfazem as seguintes hipóteses, para algum $\gamma, \hat{\gamma} > 0$:*

1. $H(0, x) \geq -\gamma$,

2. *existe $C > 0$ tal que* $|H(p, x) - H(p, y)| \leq C(1 + |p|)|x - y|$,

3. $|H(p,x) - H(q,x)| \leq C(1+|x|)|p-q|$ *e*

4. $|g(x)| \leq \hat{\gamma}$ *e* $|g(x) - g(y)| \leq \hat{\gamma}|x-y|$.

Então existe uma única solução clássica u^ε *de (5.5) e existem constantes* $K_1, K_2 > 0$ *tais que:*

$$|u^\varepsilon(x,t)| \leq K_1 \text{ e } |\nabla u^\varepsilon(x,t)| \leq K_2,$$

para todo $(x,t) \in I\!\!R^n \times (0,T]$ *e para todo* $\varepsilon > 0$. *Se, mais ainda,* $g \in C^2(I\!\!R^n)$ *com* $|D^2 g(x)| \leq \hat{\gamma}$ *então também temos que* $|u_t^\varepsilon(x,t)| \leq K_2$.

A demonstração deste teorema envolve ferramentas que estão para além do escopo desta monografia. Ela é baseada no método de Galerkin, truncamento e estimativas de Schauder. Este resultado é o suficiente para justificar rigorosamente os argumentos usados na Seção 3.1, desde que a Hamiltoniana e o dado inicial satisfaçam as condições do teorema acima (não é necessário requerer $g \in C^2$, pois a estimativa sobre as derivadas espaciais já é suficiente para garantir equicontinuidade). Resultados mais recentes baseados nesse método podem ser encontrados em [21].

A terceira maneira é o objeto desta seção. O método de Perron consiste de encontrar soluções de viscosidade como supremos de famílias de subsoluções. A idéia é baseada no método de Perron clássico para obter existência de solução para a equação de Laplace (veja [17]). A formulação deste método para equações de Hamilton-Jacobi é devida a H. Ishii [15]. Vamos ilustrá-lo através de um exemplo concreto, para o qual demonstraremos existência de solução de viscosidade em detalhe.

Seja $h = h(x)$ uma função contínua e limitada de $I\!\!R^n$ em $I\!\!R$. Considere o problema estacionário abaixo:

$$u + |\nabla u| = h, \text{ em } I\!\!R^n. \tag{5.6}$$

O argumento de existência que vamos apresentar pode ser descrito como um processo em quatro etapas, que enumeramos abaixo.

1. Encontrar uma subsolução e uma supersolução de viscosidade, f e g respectivamente. Nosso candidato a solução de viscosidade, u, será o supremo pontual de todas as subsoluções v tais que $f \leq v \leq g$.

2. Demonstrar que nosso candidato u é Lipschitz contínuo.
3. Demonstrar que u é subsolução de viscosidade de (5.6).
4. Demonstrar que u é supersolução de viscosidade de (5.6).

Os dois últimos itens são o que é usualmente descrito como método de Perron.

Seja $M > 0$ tal que $|h(x)| \leq M$, para todo $x \in I\!R^n$. É imediato verificar que $f \equiv -M$ e $g \equiv M$ são subsolução e supersolução (clássicas) de (5.6) respectivamente. Considere então $\mathcal{S}$ o conjunto de todas as subsoluções de viscosidade v de (5.6) tais que $-M \leq v \leq M$. Construimos pontualmente uma função u dada por:

$$u(x) = \sup_{v \in \mathcal{S}} v(x).$$

Isto conclui o ítem 1 acima.

Sejam $v \in \mathcal{S}$ e $y \in I\!R^n$. Observe que, se $p \in D^+v(y)$, então $|p| \leq 2M$. De fato, da definição de subsolução de viscosidade, temos que $v(y) + |p| \leq h(y)$, donde segue-se a conclusão. Vamos começar com mais um resultado de cálculo de semidiferenciais.

Lema 5.5 *Seja v uma função contínua e limitada em $I\!R^n$ e suponha que, para quaisquer $y \in I\!R^n$ e $p \in D^+v(y)$, temos $|p| \leq 2M$. Então v é Lipschitz contínua com constante de Lipschitz $2M$.*

Demonstração: Fixe $x \in I\!R^n$ e $\varepsilon > 0$. Considere as funções:

$$G(y) \equiv v(y) + \varphi(y) \equiv v(y) - (2M + \varepsilon)|y - x| - v(x).$$

Seja $C > 0$ tal que $|v| \leq C$ e $R = C/M$. Temos que $G(x) = 0$. Se $|y - x| \geq R$, então:

$$G(y) \leq v(y) - (2M + \varepsilon)R - v(x) \leq 2C - 2C - \varepsilon R < 0.$$

Portanto, desta estimativa segue-se que o máximo de G na bola fechada de centro x e raio R é assumido (pois G é contínua) no interior desta bola.

Vamos mostrar que o máximo de G é zero. Suponha, por absurdo, que $\max G > 0$ e seja y_0 o ponto onde este máximo é atingido. Então $y_0 \neq x$ e portanto φ é uma função C^1 próximo a y_0. Pelo Lema 4.1,

$$-\nabla\varphi(y_0) \in D^+v(y_0).$$

Entretanto, $|-\nabla\varphi(y_0)| = 2M + \varepsilon > 2M$, contradizendo a hipótese sobre v.

Portanto, mostramos que, para todo $y \in I\!R^n$, $G(y) \leq 0$, isto é:

$$v(y) \leq (2M + \varepsilon)|y - x| + v(x).$$

Trocando os papéis de x e de y na desigualdade acima segue-se que:

$$|v(x) - v(y)| \leq (2M + \varepsilon)|x - y|.$$

Como ε é arbitrário, temos o que queríamos.

$\blacksquare$

Há um resultado análogo com hipóteses sobre a subdiferencial; veja Exercício 22.

Em seguida, observamos que a função u definida anteriormente também é Lipschitz contínua, com constante $2M$. De fato, as funções $v \in \mathcal{S}$ satisfazem, para quaisquer x, y em $I\!R^n$:

$$v(x) \leq v(y) + 2M|x - y|.$$

Tomando o supremo sobre todos os v em $\mathcal{S}$ de ambos os lados da desigualdade segue-se que:

$$u(x) \leq u(y) + 2M|x - y|.$$

Trocando x com y, vem que $u(x) \geq u(y) - 2M|x-y|$ e, com isso, concluimos o segundo ítem no nosso programa.

Antes de enunciarmos e demonstrarmos o teorema de existência, precisamos de mais um lema sobre semidiferenciais.

Lema 5.6 *Sejam v_1 e v_2 funções contínuas, definidas em um aberto Ω de $I\!R^n$. Então $v = \max\{v_1, v_2\}$ é contínua. Fixe $i = 1, 2$ e $x_0 \in \Omega$. Se $v(x_0) = v_i(x_0)$ então*

$$D^+v(x_0) \subseteq D^+v_i(x_0).$$

Demonstração: O fato de v ser contínua é imediato. Fixe $x_0 \in \Omega$, $i = 1, 2$ e seja $p \in D^+v(x_0)$. Se $v(x_0) = v_i(x_0)$, então para qualquer $x \in \Omega$, temos a seguinte desigualdade:

$$\frac{v_i(x) - v_i(x_0) - p \cdot (x - x_0)}{|x - x_0|} \leq \frac{v(x) - v(x_0) - p \cdot (x - x_0)}{|x - x_0|}.$$

Tomando o $\limsup_{x\to x_0}$ de ambos os lados da desigualdade, e usando o fato que $p \in D^+v(x_0)$ segue-se que $p \in D^+v_i(x_0)$.

∎

Os ítens 3 e 4 do nosso programa estão contidos na demonstração do teorema que se segue.

Teorema 5.4 *A função u é solução de viscosidade do problema (5.6).*

Demonstração: Vamos demonstrar primeiro que u é subsolução de viscosidade. Para tal, fixe $x_0 \in I\!R^n$ e $p \in D^+u(x_0)$. Seja $\varphi \in C^1$ a função construida no Lema 3.3, de modo que $(u-\varphi)(x_0) = 0$, $\nabla\varphi(x_0) = p$ e $(u-\varphi)(x) \leq -|x-x_0|^2$. Para cada número natural n, seja $v_n \in \mathcal{S}$ tal que $(v_n - \varphi)(x_0) > -1/n$.

Como a função $v_n - \varphi$ é contínua, ela assume seu máximo na bola fechada de centro x_0 e raio 1, em um ponto y_n. Pelo Lema 4.1, $\nabla\varphi(y_n) \in D^+v_n(y_n)$.

Temos que:

$$-1/n < (v_n-\varphi)(x_0) \leq (v_n-\varphi)(y_n) \leq (u-\varphi)(y_n) \leq -|y_n-x_0|^2.$$

Portanto, $|y_n - x_0|^2 < 1/n$, logo $y_n \to x_0$. Mais ainda, $v_n(y_n) \to u(x_0)$ pois $(v_n-\varphi)(y_n) \to 0$ e $\varphi(y_n) \to \varphi(x_0) = u(x_0)$.

Da definição de subsolução de viscosidade, segue-se que

$$v_n(y_n) + |\nabla\varphi(y_n)| \leq h(y_n).$$

Passando ao limite quando $n \to \infty$, vem que:

$$u(x_0) + |p| = u(x_0) + |\nabla\varphi(x_0)| \leq h(x_0).$$

Como, pelo Lema 5.5, u é uniformemente contínua, trivialmente limitada e satisfaz a desigualdade provada acima, concluimos que u também é subsolução de viscosidade, e consequentemente, pertence a $\mathcal{S}$.

Vamos mostrar agora que u é supersolução de viscosidade. Faremos isto por contradição, supondo que existe um ponto $x_0 \in I\!R^n$ tal que u não seja supersolução em x_0. Com esta hipótese, vamos construir uma outra subsolução $w \in \mathcal{S}$, tal que $w(x_0) > u(x_0)$. Isto contradiz o fato que u é o supremo pontual das subsoluções.

Seja então $x_0 \in I\!R^n$ tal que u não seja supersolução de viscosidade em x_0. Então existe $q \in D^- u(x_0)$ tal que:

$$u(x_0) + |q| < h(x_0). \tag{5.7}$$

Considere a função $\psi \in C^1$ construida no Lema 3.3, de modo que: $\psi(x_0) = u(x_0)$, $\nabla\psi(x_0) = q$ e $(u - \psi)(x) \geq |x - x_0|^2$. Pela estimativa (5.7), temos:

$$2\varepsilon_0 \equiv h(x_0) - \psi(x_0) - |\nabla\psi(x_0)| > 0.$$

Então:

$$\psi(x_0) + \varepsilon_0 + |\nabla\psi(x_0)| < h(x_0).$$

Como ψ, $\nabla\psi$ e h são contínuas, existe uma vizinhança U de x_0 tal que, para qualquer $x \in U$,

$$\psi(x) + \varepsilon_0 + |\nabla\psi(x)| \leq h(x).$$

Observe que esta desigualdade implica que, para qualquer $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\psi + \varepsilon$ é subsolução clássica de (5.6) em U.

Defina, para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$,

$$w_\varepsilon \equiv \max\{u, \psi + \varepsilon\}. \tag{5.8}$$

Suponha que x seja tal que $w_\varepsilon(x) = \psi(x) + \varepsilon$. Então $u(x) \leq \psi(x) + \varepsilon$, e, por outro lado, $\psi(x) + |x - x_0|^2 \leq u(x)$. Destas duas desigualdades segue que $|x - x_0|^2 \leq \varepsilon$. Em outras palavras, se $|x - x_0| > \sqrt{\varepsilon}$, então $w_\varepsilon(x) = u(x)$. Escolha $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ tal que a bola fechada de centro x_0 e raio $\sqrt{\varepsilon_1}$ esteja contida na vizinhança U. Defina $w = w_{\varepsilon_1}$; afirmamos que $w \in \mathcal{S}$.

De fato, seja $x \in I\!R^n$ e $p \in D^+ w(x)$. Se $w(x) = u(x)$ então, $p \in D^+ u(x)$, pelo Lema 5.6. Como u é subsolução de viscosidade em todo o $I\!R^n$, temos que $w(x) + |p| = u(x) + |p| \leq h(x)$. Se, por outro lado, $w(x) = \psi(x) + \varepsilon_1$ então $x \in U$, e consequentemente, usando o Lema 5.6, $p = \nabla\psi(x)$. Como $\psi + \varepsilon_1$ é subsolução clássica de (5.6) em U, temos que $w(x) + |p| = \psi(x) + \varepsilon_1 + |\nabla\psi(x)| \leq h(x)$.

Como $w \geq u$, segue-se que $w \geq -M$. Por outro lado, o conjunto dos x onde $w(x) = \psi(x) + \varepsilon_1$ está contido em U, donde $w(x) = \psi(x) + \varepsilon_1 \leq \psi(x) + \varepsilon_1 + |\nabla\psi(x)| \leq h(x) \leq M$. Se $w(x) = u(x)$ então $w(x) \leq M$. Concluimos portanto que $-M \leq w \leq M$.

Para verificarmos que $w \in \mathcal{S}$, basta mostrar que w é uniformemente contínua. Contudo, vimos acima que $|w| \leq M$ e que, para quaisquer $x \in I\!R^n$

e $p \in D^{+}w(x)$, temos: $w(x) + |p| \leq h(x)$. Consequentemente, $|p| \leq 2M$. Pelo Lema 5.5, w é Lipschitz contínua e portanto uniformemente contínua.

Concluimos que $w \in \mathcal{S}$. Por construção temos que $w(x_0) = \psi(x_0) + \varepsilon_1 = u(x_0) + \varepsilon_1 > u(x_0)$. Isto contradiz a definição de u como supremo pontual de funções em $\mathcal{S}$. Portanto u é supersolução de viscosidade.

■

O enunciado e a demonstração deste resultado de existência foram sugeridos aos autores pelo Prof. Hitoshi Ishii.

Incluimos este exemplo de resultado de existência a título de ilustração do método de Perron em um contexto simplificado. Mesmo se nos confinarmos estritamente às técnicas desenvolvidas e utilizadas acima podemos obter resultados de existência para classes mais amplas de problemas (veja, por exemplo, o Exercício 23). Contudo, se nos restringirmos às técnicas utilizadas aqui estaremos limitando muito o escopo de aplicabilidade do método de Perron. No artigo [15] H. Ishii adaptou o método de Perron para demonstrar existência para uma classe de problemas de generalidade comparável à dos problemas para os quais estudamos princípios de comparação.

Chamamos a atenção para o fato de que a aplicação do método de Perron no exemplo acima tem um paralelo muito forte com aquela feita por Ishii em [15], à exceção de um elemento. Não é possível demonstrar *apriori* e em geral que o supremo de subsoluções seja contínuo. Consequentemente faz-se necessário introduzir uma noção de solução de viscosidade generalizada que admite funções descontínuas. Demonstra-se *aposteriori* que a solução de viscosidade generalizada obtida é, de fato, contínua. Isto não é de se estranhar; é uma instância de algo que acontece frequentemente no estudo de equações diferenciais parciais, isto é, que seja necessário primeiro demonstrar existência de solução em uma classe mais ampla (e menos regular) de funções, para em seguida demonstrar regularidade adicional.

Finalmente, gostaríamos de chamar atenção de que o problema de valor de fronteira pode ser bem mais complicado. De fato, é fácil exibir instâncias de problemas para os quais não haja solução de viscosidade. Por exemplo, considere o problema:

$$\begin{cases} u + |u_x| = h(x), \text{ em } (0,1) \\ u(0) = 0; \; u(1) = a, \end{cases} \tag{5.9}$$

onde h é uma função contínua e limitada definida no intervalo $[0,1]$. Seja $M > 0$ tal que $|h| \leq M$. Suponha que exista uma solução de viscosidade u.

Então $|u|$ é limitada (por M) e, para todo $x \in (0,1)$, $D^+u(x)$ está contido no intervalo $[-2M, 2M]$. Pelo Lema 5.5 a função u é Lipschitz contínua com constante $2M$ e consequentemente temos a estimativa: $|u(1) - u(0)| \leq 2M$, isto é: $-2M \leq a \leq 2M$. Assim, se $|a| > 2M$ não existe solução de viscosidade para (5.9).

Exercícios

1. Ache um exemplo de uma função contínua do quadrado unitário fechado $[0,1] \times [0,1]$ na reta, Lipschitz contínua na primeira variável, mas que não possua uma constante de Lipschitz (com respeito à primeira variável) uniforme na segunda variável.

2. Seja A um compacto de $\mathbb{R}^m$ e $f : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua, Lipschitz na primeira variável, uniformemente na segunda. Verifique que o sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = f(x(s), \alpha(s)), \text{ qtp } 0 < s < T, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

   possui uma única solução absolutamente contínua, se $\alpha : [0,T] \to A$ é mensurável.

3. Considere um lago particular com uma população de peixes $x(t)$, onde t representa um instante de tempo. É realizada a colheita de peixes a uma taxa $\alpha = \alpha(t)$ (variável de controle). Suponha que o custo operacional da colheita de peixes seja dado por:

$$h(x, \alpha) = \frac{K_1 \alpha^2}{x} - \rho\alpha,$$

   onde ρ é o preço (constante) a que os peixes colhidos são vendidos. O valor do lago é assumido ser o valor de mercado dos peixes nele contidos, isto é, o custo terminal é dado por $g(x) = -\rho x$. A taxa de crescimento populacional é dada por: $K_2 x - \alpha$. Determine o sistema de equações diferenciais ordinárias que deve ser resolvido para obter-se a estratégia ótima de colheita, assumindo uma população inicial de peixes

$x_0 > 0$. Em seguida faça uma análise qualitativa do comportamento assintótico da população e da estratégia ótima quando $T \to \infty$, para diferentes valores dos parâmetros K_1, K_2, ρ e x_0.

4. Mostre que a função valor definida no início da Seção 1.2 é limitada e que a trajetória $x(\cdot)$ não sai de um compacto, independente do controle α.

5. Mostre que controles por feedback produzem uma trajetória de custo mínimo nas regiões onde a função valor é suave.

6. Prove o Corolário 2.1.

7. Seja $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua, convexa e superlinear. Mostre que o supremo na definição da transformada de Legendre de L é um máximo.

8. Ache uma família infinita de funções Lipschitz contínuas que sejam soluções qtp de

$$\begin{cases} u_t + (u_x)^2/2 = 0, \text{ em } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = 0, \text{ em } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

9. Seja $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Mostre que u é semicôncava se e somente se sua segunda derivada for limitada superiormente. Se u for apenas contínua, mostre então que u é semicôncava se e somente se existir $C > 0$ tal que $u - C|x|^2$ é côncava.

10. Mostre que, se H é uniformemente estritamente convexa, então

$$H\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right) \leq H(p_1) + H(p_2) - \frac{\theta}{8}|p_1 - p_2|^2.$$

11. Demonstre existência e unicidade para o problema de valor terminal para a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman autônoma. (Corolário 2.3).

12. Seja $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $\eta \in C^\infty$, de suporte compacto, positiva e de integral 1. Defina $\eta^\varepsilon(x) = (1/\varepsilon^n)\eta(x/\varepsilon)$ e

$$v^\varepsilon(x) = \eta^\varepsilon * v(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \eta^\varepsilon(x - y)v(y)dy.$$

Mostre que $v^\varepsilon \in C^\infty$, que $v^\varepsilon \to v$ e $\nabla v^\varepsilon \to \nabla v$, uniformemente em compactos, quando $\varepsilon \to 0$.

13. Seja $u : \Omega \to I\!R$ uma função contínua, onde $\Omega \subseteq I\!R^n$ é um aberto. Mostre que, para todo $x \in \Omega$, as semidiferenciais $D^+u(x)$ e $D^-u(x)$, são subconjuntos fechados e convexos do $I\!R^n$.

14. Calcule as semidiferenciais em $x = 0$ de $u(x) = -|x|$ e de $v(x) = x\sin(1/x)$. Mostre que uma função contínua u é diferenciável em $x_0 \in I\!R^n$ se e somente se $D^+u(x_0) \cap D^-u(x_0) \neq \emptyset$ se e somente se $D^+u(x_0) = D^-u(x_0) = \{\nabla u(x_0)\}$.

15. Mostre os seguintes fatos sobre o cálculo de semidiferenciais:

    (a) Sejam u e v funções contínuas tais que $u - v$ tem um máximo em $y \in \Omega$. Então $D^+v(y) \subseteq D^+u(y)$ e $D^-u(y) \subseteq D^-v(y)$.

    (b) Se $\Omega \subset I\!R$ e $a < b$ então existe $a \leq y_0 \leq b$ tal que

    $$\frac{u(b) - u(a)}{b - a} \in D^+u(y_0) \cup D^-u(y_0).$$

    (c) Em um ponto de máximo (mínimo) local y_0 de u temos que $0 \in D^+u(y_0)(D^-u(y_0))$.

16. Mostre que a única solução de viscosidade de (4.1), da forma $u_E(x) = \int_{-1}^{x}(2\chi_E(t) - 1)dt$ é exatamente $1 - |x|$, onde E é um subconjunto mensurável de $[-1, 1]$ com medida de Lebesgue unitária.

17. Determine soluções de viscosidade para os seguintes problemas:

    (a) $u + |u'| = 0$, em (a, b), com $u(a) = u_0$ e $u(b) = u_1$.

    (b) $u + |u'| = 0$, em $I\!R$.

18. Ache um par de funções u e v contínuas em $\Omega \subset I\!R^n$ tais que $u - v$ tem um máximo local em x_0 mas $D^+u(x_0) \cap D^-v(x_0) = \emptyset$.

19. Suponha que $\psi = \psi(x, t)$ é uma função contínua que tem um máximo local estrito em $\Omega \times [a, b]$, que é assumido em (x_0, b), com $x_0 \in \Omega$. Então para todo $\delta > 0$, a função $\psi - \delta/(b - t)$ possui um máximo local próximo a (x_0, b). (Adapte a demonstração do Lema 3.1).

20. Seja $\Omega \subset I\!\!R^n$ um domínio limitado e considere u_1 e u_2 soluções de viscosidade do problema (4.2), com Hamiltoniana satisfazendo as hipóteses do Teorema 4.1 e dados de fronteira g_1 e g_2 respectivamente. Suponha que
$$\max_{x \in \partial\Omega} |g_1 - g_2| \leq \varepsilon.$$
Então, para todo $x \in \Omega$, $|u_1(x) - u_2(x)| \leq \varepsilon$.

21. Enuncie e demonstre um resultado de estabilidade local, refinando o Corolário 4.1, levando em consideração a Proposição 5.1.

22. Sejam $\Omega \subseteq I\!\!R^n$ aberto e $f : \Omega \to I\!\!R$ uma função contínua. Se existe uma constante $R > 0$ tal que, para todo $x \in \Omega$ e $p \in D^- f(x)$ tivermos $|p| \leq R$, então f é Lipschitz contínua, com constante de Lipschitz R.

23. Demonstre existência de solução de viscosidade para $u + |\nabla u|^2 = h$, em todo $I\!\!R^n$, com h uma função contínua e limitada.

Bibliography

[1] R. Bellman, *Dynamic programming*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. 1957.

[2] M. Crandall, *Viscosity solutions of partial differential equations*, A.M.S., Progress in Mathematics Videotape Series, 90 min., palestra proferida em Columbus, OH em 1991.

[3] M. Crandall, L. C. Evans e P.-L. Lions, *Some Properties of Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations.* Transactions of the A.M.S., **282**, 2 (1984), 487–502.

[4] M. Crandall, H. Ishii e P.-L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. A.M.S., **27**, 1 (1992), 1–67.

[5] M. Crandall e P.-L. Lions, *Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Trans. of the A.M.S., **277**, 1 (1983), 1–42.

[6] M. Crandall e P.-L. Lions, *On existence and uniqueness of solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Nonlin. Anal. TMA, **10**, (1986), 353–370.

[7] M. Crandall e P.-L. Lions, *Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Math. Comput., **43**, 167 (1984), 1–19.

[8] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, vols A e B, Berkeley Mathematics Lecture Notes Series v.3, 1993.

[9] L. C. Evans, *On solving certain nonlinear partial differential equations by accretive operator methods*, Israel J. Math., **86** (1980), 225–247.

[10] L. C. Evans e H. Ishii, *Differential games and nonlinear first-order PDE on bounded domains*, Manuscripta Math., **49** (1984), 109–139.

[11] L. C. Evans e P. E. Souganidis, *Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs equations*, Indiana Univ. Math. J., **33** (1984), 773–779.

[12] W. Fleming and J. Soner, *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Springer-Verlag 1993.

[13] A. Friedman, *The Cauchy problem for first order partial differential equations*, Indiana Univ. Math. J., **23** (1973), 27–40.

[14] E. Hopf, *On the right weak solution of the Cauchy problem for a quasilinear equation of first order*, J. Math. Mech., **19** (1969/70), 406–446.

[15] H. Ishii, *Perron's method for Hamilton-Jacobi equations*, Duke Univ. Math. J., **55** 2 (1987), 369–385.

[16] R. Jensen, *Uniqueness Criteria for Viscosity Solutions of Fully Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations*, Indiana Univ. Math. J., **38**, 3 (1989), 629–667.

[17] F. John, *Partial Differential Equations*, 4th ed., Springer-Verlag 1984.

[18] S. N. Kruzkov, *First order quasilinear equations with several space variables*, Math. USSR-Sb., **10** (1970), 217–243.

[19] P.-L. Lions, *Generalized Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Research Notes in Mathematics v.69, Pitman (1982).

[20] H. L. Royden, *Real Analysis*, 2nd. edition, Collier MacMillan, London 1968.

[21] P. E. Souganidis, *Existence of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, J. Diff. Eq., **56** (1985), 345–390.