Les Équations Différentielles Algébriques et les Singularités Mobiles

Publicações Matemáticas

Les Équations Différentielles Algébriques et les Singularités Mobiles

Ivan Pan
UFRGS

Marcos Sebastiani
UFRGS

impa

Copyright © 2001 by Ivan Pan e Marcos Sebastiani
Direitos reservados, 2001 pela Associação Instituto
Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Noni Geiger

Publicações Matemáticas

- Introdução à Topologia Diferencial – Elon Lages Lima
- Introdução à Análise Funcional – César R. de Oliveira
- **Les Équations Différentielles Algébriques et les Singularités Mobiles – Ivan Pan e Marcos Sebastiani**

Distribuição:
IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
e-mail: dic@impa.br
http://www.impa.br

ISBN: 85-244-0187-7

TABLE DE MATIÈRES

Introduction iii

Conventions et notations vi

Chapitre I 1
1. Introduction 1
2. Le théorème généralisé des fonctions implicites 3
3. Détermination des solutions 8
4. La classe de Fuchs 13
5. Solutions algébriques et intégrales premières 22

Chapitre II 28

1. Introduction 28
2. L'équation polynomiale associée 31
3. Construction du feuilletage 33
4. Solutions méromorphes 45
5. Singularités essentielles 47

Chapitre III 50

1. Introduction 50
2. L'image réciproque régulière 50
3. Résultats géométriques 53
4. Les équations de genre nul 55
5. Les équations de Riccati 58
6. Les équations de genre plus grand que 1 62

Chapitre IV 65

1. Introduction 65
2. Résultats géométriques 65
3. Les équations de genre 1 dans la classe de Fuchs 68
4. Séparation de variables 70
Annexe: Feuilletages et équations de Pfaff sur les surfaces analytiques 75

1. Feuilletages réguliers 75
2. Feuilletages à singularités isolées 80
3. Les équations de Pfaff 82
4. Séparatrices et intégrales premiéres 85
5. La tangence de deux feuilletages 87
6. Feuilletages sur les fibrations 87

Bibliographie 91
Index de notations 93

INTRODUCTION

Dans [2] H. Poincaré reprend un travail de M. Fuchs (voir [1]) et étudie les équations différentielles implicites de la forme

$$\text{(i)} \qquad F(x,y,y') = 0,$$

avec $F \in \boldsymbol{C}[x,y,z]$ un polynôme de la forme

$$F(x,y,z) = c_0(x,y)z^m + c_1(x,y)z^{m-1} + \ldots + c_m(x,y), \; m \geq 1, \; c_0(x,y) \neq 0,$$

tel que l'ensemble des $x=a$ où il existe des solutions locales possèdant un point de ramification est fini: dans le langage classique on se refère à cette situation en disant qu'il n'y a pas de *singularité mobile*; nous dirons dans ce cas que (i) est dans la *classe de Fuchs*. Poincaré définit le *genre* de (i) et classifie birationnellement ces équations en fonction de celui-ci.

Le but de cette monographie est d'abord de reécrire [2] dans un langage plus moderne et rigureux en sorte de comprendre les équations dans la classe de Fuchs en termes de feuilletages analytiques sur des surfaces complexes; deuxièmement et à partir de ce nouveau contexte, de donner des définitions précises et des démonstrations complètes, de corriger quelques erreurs et de démontrer quelques affirmations dans [2] qui s'y trouvent sans preuve; finalement, et en poussant un peu plus loin les idées de Poincaré, d'obtenir quelques résultats nouveaux: en effet, on constate qu'il est possible de comprendre la situation de Poincaré comme un cas particulier d'une construction plus générale qui donne, en plus, des nouvelles intuitions sur les feuilletages de *type Riccati*. Pour atteindre cet objectif on se servi aussi de [3, chap. XIII] où on expose des résultats de [1] et [2].

Afin que notre travail puisse être lu aussi par des éventuels étudiants intéressés dans ce sujet, nous avons fait un effort, d'une part pour que notre texte soit essentiellement auto-contenu, et, d'autre part, pour que les téchniques utilisés soient les plus élémentaires que possibles. Plus precisément, on a inclus, à la fin du livre, un annexe contenant une petite introduction à l'étude des feuilletages analytiques qui sert surtout à fixer les notations utilisées dans le tout et à évoquer certains des résultats qu'on utilisera par la suite, ce qui aidera principalement les non-spécialistes; on supposera pourtant que le lecteur est familiarisé avec les notions et résultats fondamentaux de la géométrie algébrique et des plusieurs variables complexes, qui se trouvent d'ailleurs dans la plupart des livres sur ces sujets et dont on donnera des références précises.

Le texte est divisé en quatre chapitres, numérotés I, II, III et IV et dont le contenu est détaillé ci-dessous.

Dans le chapitre I on donne d'abord une définition de solution locale qui contemple le cas des ``solutions ramifiées'' et on utilise le théorème de la séparatrice de Camacho-Sad ([5]) et une généralisation du théorème des fonctions implicites pour établir un théorème d'existence pour l'équation (i); puis on caractérise le fait que l'équation (i) est dans la classe de Fuchs ou (ce qui généralise cette notion) est dans la classe de Fuchs *faible*; ce dernier concept a été défini par Bruno Scárdua.

Finalement, on introduit une notion d'intégrale première rationnelle pour l'équation (i) qu'on caractérise de plusieurs manières.

Comme exemple d'application de la caractérisation de la classe de Fuchs, on étudie le cas de l'équation dite binomiale, c'est-à-dire, le cas où le polynôme $F(x,y,z)$ est irréductible et de la forme

$$F(x,y,z) = z^m - P(x,y).$$

C'est dans le chapitre II qu'on se détache du contexte de Poincaré et on se place dans un autre plus général: on considère des équations de la forme

$$(ii) \qquad \left\{\begin{array}{l} P(x,y,z)dx - Q(x,y,z)dy = 0 \\ F(x,y,z) = 0 \end{array}\right\}$$

où $P, Q \in \mathbf{C}[x,y,z]$ sont premiers entre eux et tels que F ne divise pas Q. Cela correspond à étudier le feuilletage défini par la forme holomorphe $\omega = Pdx + Qdy$ sur la surface d'équation $F(x,y,z) = 0$; le cas où $P=z$, $Q=1$ correspond exactement au cas de l'équation (i). On étend les notions de solution, solution ramifiée, intégrale première rationnelle, classe de Fuchs, etc, pour ce type d'équation.

On montre d'abord que l'étude de l'équation ci-dessus correspond en-dehors des singularités de la surface $F(x,y,z) = 0$, à l'étude d'un feuilletage analytique sur une fibration $h : X \to B$ où X est une désingularisation d'une compactification de cette surface et B est une surface de Riemman qui est un revêtement ramifié de la droite projective avec un nombre de feuilles égal au nombre de composantes de la courbe $F(a,y,z) = 0$, pour a générique; on définit le genre de l'équation différentielle comme étant le genre de la fibre générique de h. Puis on dit que le feuilletage est de Riccati par rapport à h si les fibres génériques sont transverses au feuilletage et on montre que l'équation est dans la classe de Fuchs si et seulement si le feuilletage associé est de Riccati par rapport à h. Après, on utilise le théorème de Jouanoulou sur l'existence d'intégrale première rationnelle ([6]) pour démontrer un analogue de celui-ci, dans le cas de notre équation différentielle. Finalement, on donne une preuve simple du fait qu'il n'existe pas de singularité essentielle mobile.

Les chapitres III et IV sont consacrés à la classification birationnelle des équations de Fuchs: dans le premier on traite les cas de genre 0 et genre plus grand que 1 et dans le deuxième le cas elliptique. D'après les résultats des chapitres precédents, cela revient à classifier les feuilletages de Riccati par rapport à une fibration avec fibre générique de genre 0, plus grand que 1 et 1 respectivement.

Pour le cas de genre 0 on montre que, quitte à faire un changement de variables, on peut réduire l'équation de départ à une équation de Riccati avec des coefficients des fonctions algébriques de x: l'outil essentiel ici est le théorème de Noether-Enriques [11, chap.III]. Pour le cas de genre plus grand que 1, on montre que l'équation différentielle possède une intégrale première rationnelle: dans ce cas, l'utilisation des variétés hyperboliques permet d'une part de simplifier considérablement la preuve de Poincaré, et d'autre part d'obtenir un résultat un peu plus général. Cela a été repris et développé par Bruno Scárdua dans un contexte plus général ([18]).

Enfin, dans le cas de genre 1 on montre que l'équation différentielle se ramène à une équation à variables séparées qui dépend des données d'une courbe elliptique attachée naturellement à l'équation donnée: ici on démontre un analogue du théorème de Noether-Enriques pour le cas des fibrations elliptiques de module constant ce qui nous permet de reutiliser les idées introduites dans le cas de genre 0.

Les sujets développés ici sont traités algébriquement dans [23].

Cette monographie fait partie d'un plan de travail qui nous a été proposé par Étienne Ghys à qui nous exprimons ici toute notre reconnaissance pour ses orientations et encouragements.

Ivan Pan
Instituto de Matemática-UFRGS
Av. Bento Gonçalves, 9500
91501-970 Porto Alegre/RS
e-mail: pan@mat.ufrgs.br

Marcos Sebastiani
Instituto de Matemática-UFRGS
Av. Bento Gonçalves, 9500
91501-970 Porto Alegre/RS

CONVENTIONS ET NOTATIONS

1) **Conventions**:

Dans ce travail, toutes les variétés algébriques et les espaces analytiques sont considérées sur le corps $\boldsymbol{C}$ des nombres complexes; on entend par *surface* un espace analytique de dimension 2 et par surface de Riemann un espace analytique de dimension 1 qui est régulier (ou lisse) et connexe.

On dira *pour* $a \in \boldsymbol{C}$ *générique*, pour signifier *pour tout a complexe sauf un nombre fini*. Plus généralement la notion de *générique* sera toujours utilisée au sens algébrique.

Avec la seule exception trouvée dans l'annexe, où on introduit la topologie fine associée avec un feuilletage, on utilisera des fois la topologie transcendente, des fois la topologie de Zariski ; pour la dernière on parviendra toujour le lecteur lors de son utilisation tandis que la première sera utilisée sans aucun commentaire.

2) **Notations**:

$\pi_1(X,p)$: le groupe fondamental de l'espace topologique X centré en p.

$\deg_z H$: le degré du polynôme H en la variable z.

F_z : la dérivée de F par rapport à z.

(X,p) : l'espace topologique X pointé en p.

Sing W : l'ensemble des points singulier de l'espace analytique W.

poids H : le poids du germe de polynôme H.

pgcd(A,B) : le plus grand commun diviseur des polynômes A et B.

$\mathcal{F}(P,Q)$: le feuilletage associé à la forme différentielle $Pdx+Qdy$ sur la surface d'équation $F(x,y,z)=0$.

$\boldsymbol{C}(W)$: le corps de fonctions méromorphes sur l'espace analytique W.

$T_p(W)$: l'espace tangent à l'espace analytique W en le point régulier $p \in W$.

$dh(p)$: différentielle d'une aplication analytique en le point p.

$\omega(p)$: valeur, comme application linéaire, de la forme différentielle ω en le point p.

$Ker\ T$: noyau de l'application linéaire T.

K/L : l'extension des corps $L \subset K$.

$[K:L]$: le degré de l'extension de corps K/L

$\omega \wedge \omega'$: produit exterieur de deux formes différentielles.

$D(\mathcal{F},\mathcal{F}')$: diviseur de tangence entre les feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$.

Chapitre I – L'ÉQUATION POLYNOMIALE $F(x,y,y') = 0$.

1. Introduction. Soit $F \in \boldsymbol{C}[x,y,z]$ un polynôme *irréductible* et qui dépend effectivement de z . Écrivons:

$$F(x,y,z) = c_0(x,y)z^m + c_1(x,y)z^{m-1} + \ldots + c_m(x,y)\,,\ m \geq 1\,,\ c_0(x,y) \neq 0\,.$$

Désignons par $D \in \boldsymbol{C}[x,y]$ le discriminant de ce polynôme en z, c'est-à-dire celui obtenu par élimination de z entre F e sa dérivée partielle par rapport à z ; notons $\Delta \subset \boldsymbol{C}^2$ l'ensemble d'équation $D(x,y) = 0$, appelé le *lieu discriminant.*

Nous allons étudier localement l'équation différentielle

$$(1) \qquad F(x,y,y') = 0.$$

Dans ce chapitre, nous ferons toujours référence à cette équation.

Cet exposé suit, en partie, l'exposé des résultats de Fuchs [1] et Poincaré [2] donné par Ince dans [3], mais nous donnons des énnoncés précis et des démonstrations complètes. Ince corrige et complémente Poincaré. En particulier, l'affirmation 3ème de la page 6 de [2] est fausse en l'absence de ramification (voir l'exemple (4.14) ci-dessous).

La notion de classe de Fuchs faible est due à Bruno Scárdua (voir (4.3) et (4.15)).

Il faut d'abord donner un sens à l'expression: ``solution au voisinage de $a \in \boldsymbol{C}$''. En première acception, ce serait une fonction analytique $y = y(x)$ au voisinage de a qui satisfait l'équation. Définie de cette manière, cette notion demeure assez restreinte; plus precisément, on voudrait pouvoir dire d'une part que $y = \sqrt{x}$ est une solution de $2yy' - 1 = 0$ au voisinage de 0 pour contempler le cas des ``solutions multiformes'', et d'autre part que $y = 1/x$ est une solution de $y' + y^2 = 0$ au voisinage de $0$ pour faire autant avec des ``solutions passant par l'infini''. Il est naturel, alors, d'introduire la notion suivante.

(1.1) DÉFINITION.- *Une* <u>*solution locale*</u> *en* $a \in \boldsymbol{C}$ *est un couple de fonctions définies au voisinage de* $0 \in \boldsymbol{C}$: $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$ *où* $\alpha(t)$ *est analytique et* $\beta(t)$ *est analytique en dehors de* 0 *pouvant avoir, au plus, un pôle en* 0 *et telles que:*

$$\alpha(0) = a\,,\ \alpha \text{ non-constante et } F(\alpha(t),\beta(t),\beta'(t)/\alpha'(t)) = 0 \quad si\ t \neq 0.$$

Si $\beta(0) = b \in \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ *, on dit que le couple est une* <u>*solution par*</u> (a,b) .

Un changement analytique de paramètre $t = t(s)$ avec $t(0) = 0$ et $t(s)$ non-constante, produit une autre solution et on dira que ces deux solutions sont *équivalentes*. Il est clair que toute solution est équivalente à une solution du type: $x = a + t^M$, $y = \beta(t)$. Si chaque terme non-nul de la série de Laurent de $\beta(t)$ a un exposant multiple de M , alors on peut prendre $M = 1$ et la solution peut s'écrire $y=y(x)$. Dans ce cas, on dit que la solution est *uniforme*. Dans le cas contraire, on dira que elle est *ramifiée*.
On notera:

$$\frac{d\beta}{d\alpha}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{\beta'(t)}{\alpha'(t)} \in C \cup \{\infty\}$$

(cette valeur est invariante par équivalence). On appelera cette valeur la *pente* de la solution. Une solution uniforme de pente finie sera appélée *régulière* (comme on verra dans (3.13) cela équivaut à dire que c'est une solution uniforme par (a,b) avec $b \in \boldsymbol{C}$).

La raison pour ne pas admettre de singularité essentielle de $\beta(t)$ est qu'on s'intéresse aux solutions analytiques; c'est à dire, possédant une relation analytique entre $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ au voisinage de (a,b) . (Voir, pourtant, II§5).

En général, on n'a ni existence ni unicité (à équivalence près) de solutions locales par (a,b) .

(1.2) EXEMPLE.- a) $xy' - 1 = 0$. Il n'existe pas de solution locale par $(0,0)$.
b) $yy' - x = 0$. Il y a deux solutions non-équivalentes par $(0,0)$.
c) $xy' - 2y = 0$. Toutes les solutions $y = ax^2$ passent par $(0,0)$ avec pente 0 .
d) $x^2y' + y = 0$. La seule solution locale en 0 est $y = 0$, à équivalence près.

(1.3) PROPOSITION.- *Supposons que* $a,b,c \in \boldsymbol{C}$, $F(a,b,c) = 0$, $F_z(a,b,c) \neq 0$. *Alors, il existe une solution régulière par* (a,b) *de pente c. En plus, toute solution par* (a,b) *de pente* c *est équivalente à celle-là.*

Preuve. Soit $z = f(x,y)$ analytique au voisinage de (a,b) telle que $f(a,b) = c$, implicite dans $F(x,y,z)=0$.
La première assertion découle du théorème d'existence appliqué à l'équation explicite $y' = f(x,y)$.
Pour la deuxième, supposons que $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$ définissent une solution par (a,b) de pente c et considérons le système différentiel:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha'(t) \qquad \frac{dy}{dt} = \alpha'(t) f(x,y)$$

au voisinage de $(0,a,b)$. Alors $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$ en est une solution avec $\alpha(0) = a$ et $\beta(0) = b$.

D'autre part, il existe $y = g(x)$, analytique au voisinage de a, telle que

$$g'(x) = f(x,g(x)) \quad \text{et} \quad g(a) = b.$$

Alors, $x = \alpha(t)$, $y = g(\alpha(t))$ est aussi une solution du système qui passe par $(0,a,b)$. Donc, $\beta(t) = g(\alpha(t))$. Alors $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$ est une solution équivalente à $x = a + t$, $y = g(a+t)$.[]

(1.4) COROLLAIRE.- *Si* $(a,b)\in \boldsymbol{C}^2$, $c_0(a,b) \neq 0$ *et* $D(a,b) \neq 0$ *alors il existe exactement* m *solutions par* (a,b) *(à équivalence près) et elles sont toutes régulières.*

Preuve. Si $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$ est une solution par (a,b), alors

$$\frac{d\beta}{d\alpha}(a)$$

est une racine de l'équation $F(a,b,z) = 0$.[]

Cela résout le problème de l'existence et du nombre de solutions locales par (a,b) quand ce point appartient à l'ouvert de Zariski de $\boldsymbol{C}^2$ défini par:

$$c_0(x,y)D(x,y) \neq 0.$$

Nous n'avons pas d'exemple de non-existence de solution par (a,b) dans le cas $c_0(a,b) \neq 0$ et $D(a,b) = 0$. Nous verrons au §3 du chapitre II que ce problème est en rapport avec le problème de l'existence de séparatrices locales pour un champ de vecteurs dans une surface, au voisinage d'un point singulier de la surface [4].

Pour étudier le probléme de l'existence et de la ramification des solutions dans des conditions plus générales, nous avons besoin du théorème généralisé des fonctions implicites, qui revient à construir des paramétrisations locales de la surface $F(x,y,z) = 0$ au voisinage d'un point (a,b,c) pour a générique et $(a,b)\in\Delta$.

2.- Le théorème généralisé des fonctions implicites. Si $p\in \boldsymbol{C}^n$, l'anneau local de $\boldsymbol{C}^n$ en p est, par définition, l'anneau des germes de fonctions holomorphes au voisinage de p.

Pour étudier l'existence de solutions en-dehors du lieu discriminant, on s'est servi du théorème des fonctions implicites combiné avec le théorème d'existence et unicité des equations différentielles (explicites). Pour l'étude correspondant en des points de Δ, on va remplacer le premier résultat par sa "version généralisée" et le deuxième par le théorème d'existence de *séparatrice* locale de Camacho-Sad.

Nous allons considérer le théorème généralisé des fonctions implicites sous la forme suivante:

(2.1) THÉORÈME.- *Soit* $q = (a,b) \in \Delta$. *Supposons que le polynôme* $F(a,b,z)$ *n'est pas nul et qu'il existe* $c \in \boldsymbol{C}$ *tel que* $F(a,b,c) = 0$. *Supposons aussi qu'au voisinage de* q , Δ *est le graphe d'une fonction* $y = \eta(x)$ *analytique au voisinage de* a ($\eta(a) = b$). *Alors, pour chaque facteur irréductible* H *de* F *dans l'anneau local de* $\boldsymbol{C}^3$ *en* $p = (a,b,c)$ *il existe un entier* k , $m \geq k > 0$, *et une fonction* $z = f(x,v)$ *analytique au voisinage de* $(a,0)$ *tels que: a) l'équation en* z : $H(x,y,z) = 0$ *possède, au voisinage de* c , *exactement* k *racines différentes pour tout* (x,y) *au voisinage de* q *avec* $y \neq \eta(x)$;

b) $f(a,0) = c$;

c) $H(x, \eta(x) + v^k, f(x,v)) = 0$ *au voisinage de* $(a,0)$;

d)si $p(t) = (\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)) \in \boldsymbol{C}^3$ *est holomorphe, avec* $\alpha(t)$ *non-constante, au voisinage de* $0 \in \boldsymbol{C}$, $p(0) = p$ *et* $H(p(t)) = 0$ *alors, il existe* $v(t)$ *holomorphe au voisinage de* $0 \in \boldsymbol{C}$ *telle que* $v(0) = 0$, $\beta(t) - \eta(\alpha(t)) = v(t)^k$ *et*
$\gamma(t) = f(\alpha(t), v(t))$.

e) Si μ *est une racine primitive* k*- ème de l'unité et* $v \neq 0$ *alors,*

$$f(x,v)\ ,\ f(x, \mu v)\ ,\ldots\ldots,\ f(x, \mu^{k-1} v)$$

sont tous différents.

Preuve. Soit X le germe d'ensemble analytique irréductible défini par $H = 0$ au voisinage de p . Considérons l'application locale:

$$\pi : (X,p) \to (\boldsymbol{C}^2, q)\ ,\quad \pi(x,y,z) = (x,y)\ .$$

Alors π est finie; donc, propre et ouverte. Soit k le degré de π . Comme $\partial F/\partial z$ ne s'annulle pas sur $X - \pi^{-1}(\Delta)$,

$$\pi : X - \pi^{-1}(\Delta) \to U_q - \Delta$$

est un revêtement fini non-ramifié connexe d'ordre k , où U_q est un voisinage convenable de q qu'on peut supposer de la forme:

$$U_q = \{(x,y) : |x - a| < \varepsilon, |y - \eta(x)| < \varepsilon\}\ ,\ \varepsilon > 0$$

En particulier, le groupe fondamental $\pi_1(U_q - \Delta)$ de $U_q - \Delta$ est isomorphe à $\boldsymbol{Z}$. Soit

$$\rho : P \to U_q\ ,\ \rho(x,v) = (x, \eta(x) + v^k) \quad \text{où:}$$

$$P = \{(x,v) : |x - a| < \varepsilon, |v| < \sqrt[k]{\varepsilon}\}.$$

Alors,

$$\rho : P - \{v=0\} \to U_q - \Delta$$

est un revêtement fini connexe non-ramifié d'ordre k . Comme $\pi_1(U_q - \Delta) = \boldsymbol{Z}$, il existe un difféomorphisme analytique:

$$\varphi : P - \{v=0\} \to X - \pi^{-1}(\Delta)$$

tel que $\rho(u) = \pi(\varphi(u))$ pour tout $u \in P - \{v=0\}$. On voit tout de suite que φ se prolonge à une application analytique $\varphi : P \to \boldsymbol{C}^3$ telle que

$$\varphi(P) \subset X, \quad \varphi(\{v=0\} \cap P) = \pi^{-1}(\Delta) .$$

On définit la fonction cherchée $z = f(x,v)$ par:

$$\varphi(x,v) = (x, \eta(x) + v^k, f(x,v)) .$$

Les conditions *(a),(b),(c),(e)* sont immédiatement vérifiées. Pour prouver *(d)* supposons, d'abord, que $\beta(t) = \eta(\alpha(t))$. On prend $v(t) = 0$. Si

$$\gamma(t) \neq f(\alpha(t), v(t))$$

alors $p(t)$ et $(\alpha(t), \beta(t), f(\alpha(t), 0))$ seraient deux courbes différentes par p contenues dans $\pi^{-1}(\Delta) = \varphi(\{v=0\} \cap P)$, ce qui est absurde.

Supposons, maintenant, que $\beta(t) \neq \eta(\alpha(t))$. Alors, $p(t) \in X - \pi^{-1}(\Delta)$ si $t \neq 0$. Appliquant φ^{-1} on voit qu'il existe $r(t) \in P$ holomorphe au voisinage de $0 \in \boldsymbol{C}$ telle que $r(0) = (a, 0)$ et $\varphi(r(t)) = p(t)$. Soit $r(t) = (\alpha(t), v(t))$. Comme

$$\varphi(r(t)) = (\alpha(t), \eta(t) + v(t)^k, f(\alpha(t), v(t)))$$

on obtient les égalités voulues.[]

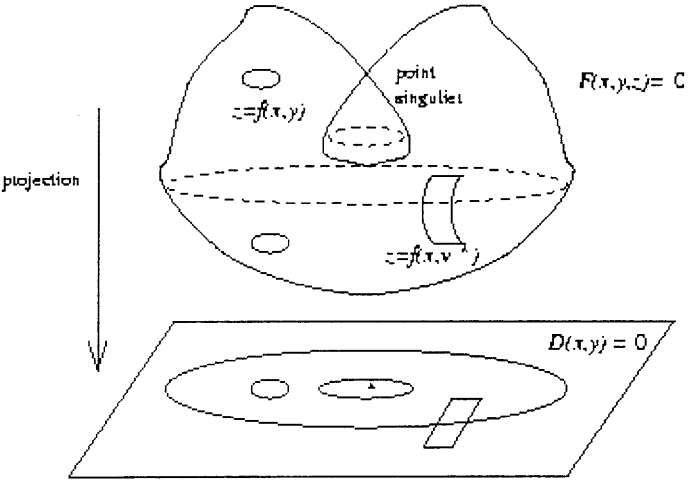

Figura I.1

Un anneau d'intégrité A, avec corps de fractions disons K, est dit *factoriel* lorsque tout élément dans A qui n'est ni zéro ni inversible peut s'écrire comme un produit d'éléments irréductibles de façon unique à permutation des facteurs près. Dans ce cas, pour un polynôme monique $F(z) \in A[z]$, tout facteur irréductible monique $P(z)$ de $F(z)$ dans $K[z]$ a ses coefficients dans A (voir [16, chap. V, § 6]).

Un résultat bien connu (voir [9, vol. II, A 7]) montre que l'anneau local de $\boldsymbol{C}^n$ en un point p est un anneau factoriel.

(2.2) PROPOSITION.- *Dans les mêmes hypothèses et avec les mêmes notations du théorème (2.1), supposons, en plus, que* $c_0(a,b) \neq 0$. *Soit* A *l'anneau local de* $\boldsymbol{C}^2$ *en* q *et soit* K *son corps de fractions. Soit* B *l'anneau local de* $\boldsymbol{C}^3$ *en* p . *Alors, les facteurs irréductibles moniques de* F *comme éléments de l'anneau* $K[z]$ *ont leurs coeffcients dans* A . *Si* $H(x,y,z)$ *est un tel facteur et* $H(a,b,c) = 0$ *alors* H *est un facteur irréductible de* F *comme élément de* B , c *est l'unique racine de* $H(a,b,z) = 0$ *et* $k = \deg_z H$.

Preuve. La première assertion résulte du fait que A est un anneau factoriel.

Soit X une composante irréductible du germe d'ensemble analytique défini par $H = 0$ au voisinage de p. Alors $X = \{G=0\}$ où G est un élément irréductible de B de la forme ([9, vol. II A 4]):

$$G(x,y,z) = z^n + e_1(x,y)z^{n-1} + \ldots + e_n(x,y), \quad e_j \in A, \quad 1 \leq j \leq n, \quad n > 0.$$

Effectuons la division de polynômes:

$$H = GQ + R, \quad Q,R \in A[z] .$$

Alors, $R|X = 0$. Comme $\deg_z R < n$ et que l'application locale

$$(X,p) \to (\boldsymbol{C}^2,q), \quad (x,y,z) \to (x,y)$$

est de degré n , on a que $R = 0$. Donc, $H = G$, H est irréductible dans B et $\deg_z H = n$. Nous avons vu, au cours de la preuve du théorème (2.1) que $k = n$. Donc, $\deg_z H = k$. La multiplicité de c comme racine de $G(a,b,z) = 0$ est $n = k$. Donc, c est l'unique racine de $H(a,b,z) = 0$. []

(2.3) EXEMPLE.- a) $xz^2 - y^3 = 0$ au voisinage de $(a,0)$, $a \neq 0$ et $c = 0$. On a:

$$\eta(x) = 0 \ , \quad k = 2 \ , \quad z = (1/\sqrt{x})v^3 .$$

b) $x^3z^3 - y = 0$ au voisinage de $(a,0)$, $a \neq 0$ et $c = 0$. On a:

$$\eta(x) = 0 \ , \quad k = 3 \ , \quad z = (1/x)v .$$

c) $z^2 - x(y-x)^2 = 0$ au voisinage de (a,a) , $a \neq 0$ et $c = 0$. On a:

$$z^2 - x(y-x)^2 = (z - \sqrt{x}(y-x))\,(z + \sqrt{x}(y-x)) ,$$

$$\eta(x) = x \quad \text{et} \quad k = 1 \quad \text{pour chaque facteur.}$$

Dans le résultat suivant, et plusieurs fois dans la suite de ce travail, nous utiliserons la notion de *fonction algébrique* aussi bien que ses propriétés fondamentales ; pour cela nous renvoyons le lecteur à [15, chap. 8].

(2.4) PROPOSITION.- *Dans les mêmes hypothèses et notations de (2.1) on a, pour* $a \in \boldsymbol{C}$ *générique:*

$$f(x,v) - \eta'(x) = \sum_{j=r}^{\infty} e_j(x)v^j , \quad r \geq 0 \quad \text{avec} \quad e_r(a) \neq 0$$

Preuve. Il n'y a rien à démontrer si $D(x,y)$ ne dépend pas de y. On supposera, donc, que $\deg_y D(x,y)>0$, ce qui entraîne $\deg_y F(x,y,z)>0$.

Comme la dérivée par rapport à x de la fonction algébrique de x définie par $D(x,y)=0$ est aussi une fonction algébrique, il existe $P(x,y)\in \boldsymbol{C}[x,y]$ tel que $\deg_y P>0$ et que si $\theta(x)$ est holomorphe et $D(x,\theta(x))=0$ alors $P(x,\theta'(x))=0$.

Soit L le sous-ensemble analytique de $\boldsymbol{C}^3$ défini par:

$$L = \{F(x,y,z)=D(x,y)=0\}\cup\{F(x,y,z)=P(x,z)=0\}.$$

Comme F dépend effectivement de y et de z, L est une courbe algébrique. On supposera que a n'est pas dans l'image par la projection $(x,y,z)\to x$ des points singuliers de L. Alors, a est générique.

Si $P(a,c)\neq 0$ alors $P(a,f(a,0))\neq 0$. Donc, $f(a,0)\neq \eta'(a)$ et on a $r=0$ et $e_0(a)\neq 0$. Supposons $P(a,c)=0$. Alors p est un point non-singulier de L. Par absurde, supposons que $e_j=0$ pour tout j ou que $e_r\neq 0$ et $e_r(a)=0$. Cela implique que le germe d'ensemble défini au voisinage de $(a,0)\in\boldsymbol{C}^2$ par:

$$f(x,v) - \eta'(x) = 0$$

n'est pas contenu dans $\{v=0\}$. L'image de ce germe par la transformation:

$$x = x \quad , \quad y = \eta(x) + v^k \quad , \quad z = f(x,v)$$

n'est pas contenue, alors, dans $\{F(x,y,z)=D(x,y)=0\}$ mais elle est contenue dans L, puisque $P(x,f(x,v))=P(x,\eta'(x))=0$. Alors, le germe de L en p n'est pas irréductible – contradiction.[]

(2.5) DÉFINITION.- *Dans les conditions de (2.1) et (2.4), l'entier non-négatif r = poids H est le* <u>*poids*</u> *de H en $p=(a,b,c)$.*

Lorsqu'il n y aura pas lieu à confusion nous omitirons le point (a,b,c) et parlerons tout simplement du poids de H.

(2.6) LEMME.- *Dans les conditions de (2.1) et (2.4), pour $a\in\boldsymbol{C}$ générique,* poids $H>0$ *équivaut à que $y=\eta(x)$ soit une solution par (a,b) de pente c. En plus, dans ce cas on a $H(x,\eta(x),\eta'(x))=0$.*

Preuve. Si poids $H>0$, on a que $f(x,0)=\eta'(x)$. Alors $c=f(a,0)=\eta'(a)$ et $H(x,\eta(x),\eta'(x))=0$ ce qui implique $F(x,\eta(x),\eta'(x))=0$.

Supposons que $y=\eta(x)$ est une solution par (a,b) de pente c. Alors

$$F(x,\eta(x),\eta'(x)) = 0 \quad \text{et} \quad c = \eta'(a).$$

Il suffit de prouver que $H(x,\eta(x),\eta'(x))=0$. En effet, par (2.1)d on aura que $\eta'(x)=f(x,0)$ ce qui entraîne poids $H>0$.

Si $H(x,\eta(x),\eta'(x))\neq 0$ il existe un facteur irréductible G de F dans l'anneau local de $\boldsymbol{C}^3$ en p, non-associé à H, tel que $G(x,\eta(x),\eta'(x))=0$. Soit $z=g(x,v)$ défini pour G comme $z=f(x,v)$ pour H dans (2.1). On a que $\eta'(x)=g(x,0)$ d'après (2.1)d.

Puisque a est générique, on peut supposer que p est un point non-singulier à tangente non-verticale de la courbe $F=F_z=0$. Alors, cette courbe admet une paramétrisation locale au voisinage de p de la forme: $y=\eta(x)$, $z=\theta(x)$.

Comme chaque point de l'ensemble $G=H=0$ est singulier dans la surface $F=0$, cet ensemble est la courbe $y=\eta(x)$, $z=\theta(x)$. Donc,

$$G(x,\eta(x),\theta(x)) = H(x,\eta(x),\theta(x)) = 0 .$$

Par (2.1)d on a que $\theta(x)=g(x,0)=\eta'(x)$, ce qui prouve $H(x,\eta(x),\eta'(x))=0$.

3. Détermination des solutions. Soient $a,b,c\in \boldsymbol{C}$ tels que $F(a,b,c) = 0$. Supposons que $D(a,b) = 0$, que le polynôme $F(a,b,z)$ n'est pas nul et que Δ admet une équation locale analytique $y = \eta(x)$ au voisinage de (a,b) ($\eta(a)=b$). D'aprés (2.1), la détermination des solutions locales par (a,b) de pente c se réduit à étudier, pour chaque facteur irréductible H de F dans l'anneau local de $\boldsymbol{C}^3$ en (a,b,c) , les solutions par $(a,0)$ d'une équation du type:

$$v^N \frac{dv}{dx} = g(x,v)$$

où $g(x,v)$ est analytique au voisinage de $(a,0)$ (au moyen du changement de la variable dépendante: $y = \eta(x) + v^k$). On a, dans les notations de (2.1):

$$N = k-1 \quad \text{et} \quad g = \frac{1}{k}(f(x,v)-\eta'(x))$$

En particulier, nous avons le théorème d'existence suivant dont la preuve est une application directe du lemme (3.2) plus bas.

(3.1) THÉORÈME.- *Soit* $E(x,y) = 0$ *une équation minimale de* Δ . *Soient* $a,b\in \boldsymbol{C}$ *tels que* $E(a,b) = 0$, $E_y(a,b) \neq 0$ *et que le polynôme* $F(a,b,z)$ *ne soit pas nul ; prenons* $c\in \boldsymbol{C}$ *tel que* $F(a,b,c) = 0$. *Alors, il existe une solution par* (a,b) *de pente* c.

(3.2) LEMME.- *Considérons l'équation:*

$$v^n \frac{dv}{dx} = g(x,v)$$

où $n\geq 1$ *est un entier et* g *est holomorphe au vosinage de* $(a,0)$, $a\in \boldsymbol{C}$. *Alors, il existe des fonctions* $x = \alpha(t)$ *et* $v = \beta(t)$ *holomorphes au voisinage de* 0 *telles que* $\alpha(0) = a$, $\beta(0) = 0$, α *n'est pas constante et:*

$$\beta(t)^n \beta'(t) = g(\alpha(t),\beta(t))\alpha'(t)$$

Preuve. Supposons $g(x,0) \neq 0$. Considérons le système autonome:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \beta^n \quad , \quad \frac{d\beta}{dt} = g(\alpha,\beta)$$

au voisinage de $(a,0)$. Par le théorème de Camacho-Sad [5] il en existe une

solution locale *(séparatrice)* non-constante $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$ de ce système telle que $\alpha(0) = a$, $\beta(0) = 0$; en particulier α n'est pas constante. Si $g(x,0) = 0$ on prend $\alpha = a + t$, $\beta = 0$.[]

(3.3) EXEMPLE.- Si $F = xz^2 + \sqrt{2}(xy + y)z + y^2$, alors:

$$D(x,y) = 2y^2(x^2 + 1) \ , \quad E(x,y) = y(x^2 + 1) \ .$$

Donc, $E(0,0) = 0$, $E_y(0,0) \neq 0$ mais $F(0,0,z) = 0$. Il est facile de voir qu'il n'existe pas de solution par $(0,0)$ de pente 1 pour ce polynôme F .

(3.4) COROLLAIRE.- *Pour* $a \in \mathbf{C}$ *générique et pour tout* $b,c \in \mathbf{C}$ *tels que* $F(a,b,c) = 0$, *il existe une solution par* (a,b) *de pente* c .

Preuve. Si $E(a,b) \neq 0$ on applique (1.3). Si $E(a,b) = 0$ on applique (3.1).[]

(3.5) OBSERVATION.- Il est immédiat de voir que si $c_0(a,b) \neq 0$ il n'existe pas de solution par (a,b) de pente ∞ . Pour étudier des telles solutions dans le cas $c_0(a,b) = 0$ on considère y comme nouvelle variable indépendante et on étudie les solutions par (a,b) de pente 0 et x non-constant de l'équation:

$$c_0(x,y) + c_1(x,y)x' + \ldots + c_m(x,y)(x')^m = 0$$

(3.6) OBSERVATION.- Pour étudier les solutions par (a,∞) on fait le changement de variable dépendante $y = 1/y_1$ et , en éliminant les dénominateurs, on obtient une équation du type

$$d_0(x,y_1)(y_1')^m + d_1(x,y_1)(y_1')^{m-1} + \ldots + d_m(x,y_1) = 0$$

de laquelle on étudie les solutions par $(a,0)$ différentes de l'éventuelle solution $y_1 = 0$ (celle-ci correspondant à la ``solution'' $y = \infty$ de (1)).

(3.7) EXEMPLE. Considérons l'équation différentielle

$$(y - x^2)^2(y')^2 + 2(y - x^2)^2 y' + y^2 = 0$$

Un calcul direct montre que

$$D(x,y) = 4x^2(y - x^2)^2(x^2 - 2y) \ , \quad E(x,y) = x(y - x^2)(x^2 - 2y)$$

Si $a^2 \neq 2b$, $a^2 \neq b$ et $a \neq 0$ de (1.4) suit qu'il existe une solution par (a,b). Si $a^2 = 2b$ et $a \neq 0$ il est de même par (3.1). Si $a^2 = b$ et $a \neq 0$ il existe une solution par (a,b) de pente ∞ d'après (3.5) et (3.1). Par $(0,0)$ nous avons la solution $y = 0$. D'après (3.6) et (3.1), il existe solution par (a,∞) si $a \neq 0$.

(3.8) THÉORÈME.- *Soient* $a \in \boldsymbol{C}$ *générique et* $b,c \in \boldsymbol{C}$ *tels que* $F(a,b,c)=0$ *et* $D(a,b)=0$. *On a les assertions suivantes* :

1) Δ *admet une équation locale analytique* $y = \eta(x)$ *au voisinage de* (a,b) ;

2) si $y = \eta(x)$ *n'est pas solution par* (a,b) *ou si* $\eta'(a) \neq c$ *alors il existe exactement* n *solutions par* (a,b) *de pente* c *(à équivalence près), où* n *est le nombre de facteurs irréductibles de* F *dans l'anneau local de* $\boldsymbol{C}^3$ *en* (a,b,c) .

Preuve. Il est évident que l'assertion 1) est vérifiée pour a générique, ainsi que la condition $F(a,b,z) \neq 0$. D'après le début de ce paragraphe et (2.4), pour chaque facteur irréductible H de F dans l'anneau local de $\boldsymbol{C}^3$ en (a,b,c) nous devons considérer les solutions par $(a,0)$ d'une équation de la forme

$$kv^{k-1}v' = f(x,v) - \eta'(x) = \sum_{j=r}^{\infty} e_j(x)v^j$$

où les e_j sont des fonctions analytiques au voisinage de a et $e_r(a) \neq 0$.

L'hypothèse de (2) implique $r = 0$, d'après (2.6). Si $k = 1$, on a existence et unicité.

Soit $k > 1$. Il suffit de considérer v comme nouvelle variable indépendante et nous avons, encore, existence et unicité, puisque $v = 0$ n'est pas solution de pente c, car $r = 0$.

Si $n = 1$ il n'y a plus rien à démontrer. Si $n>1$, nous devons prouver que les solutions correspondantes à des facteurs irréductibles non-associés ne sont pas équivalentes ; notons G un tel facteur non-associé à H .

Il est clair que F_z s'annulle sur l'ensemble défini par

$$H(x,y,z) = G(x,y,z) = 0 ,$$

parce que cet ensemble est constitué de points singuliers de la surface

$$F(x,y,z)=0.$$

Donc, $y = \eta(x)$ sur cet ensemble.

Supposons que $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$ définissent une solution par (a,b) de pente c telle que:

$$H(\alpha(t),\beta(t),\frac{\beta'(t)}{\alpha'(t)}) = G(\alpha(t),\beta(t),\frac{\beta'(t)}{\alpha'(t)}) = 0$$

Alors, $\beta(t) = \eta(\alpha(t))$ d'où suit, par (2.1)d, que $\beta'(t)/\alpha'(t) = f(\alpha(t),0)$. Donc, $\eta'(\alpha(t)) = f(\alpha(t),0)$, ce qui contredit l'hypothèse de (2).[]

(3.9) COROLLAIRE.- *Soient* $a \in \boldsymbol{C}$ *générique et* $b \in \boldsymbol{C}$ *tels que* $c_0(a,b) \neq 0$ *et* $D(a,b) = 0$. *On a les assertions suivantes :*

1) Δ *admet une équation analytique locale* $y = \eta(x)$ *au voisinage de* (a,b) .

2) Si $y = \eta(x)$ *n'est pas solution par* (a,b) *alors il existe* n *solutions par* (a,b), *à équivalence près, où* n *est le nombre de facteurs irréductibles de* F *dans* $K[z]$, *avec* K *le corps de fractions de l'anneau local de* $\boldsymbol{C}^2$ *en* (a,b) .

Preuve. Suit de (3.8), (3.5) et (2.2).

(3.10) EXEMPLE.- a) $x(y')^2 - y^3 = 0$. Si $a \neq 0$, la seule solution par $(a,0)$ est $y=\eta(x)=0$ (voir (2.3)a).
b) $x^3(y')^3 - y = 0$. Si $a \neq 0$ il existe deux solutions (à équivalence près) par $(a,0)$ dont l'une est $y=\eta(x)=0$ (voir (2.3)b).
c) $(y')^2 - x(y-x)^2 = 0$. Si $a \neq 0$, il y a deux solutions (à équivalence près) par (a,a) et $y = \eta(x)$ n'est pas solution (voir (2.3)c).
d) $(y')^2 - 2y' + 1 - x(y-x)^2 = 0$. Si $a \neq 0$, $D(a,a) = 0$ et la seule solution par (a,a) est $y = x$, (à équivalence près), tandis que F est le produit de deux facteurs irréductibles non-associés dans $K[z]$.

(3.11) THÉORÈME.- *On a les assertions suivantes :*
(a) *Pour* $a \in \boldsymbol{C}$ *générique et pour* $b,c \in \boldsymbol{C}$ *tels que* $F(a,b,c)=0$ *il n'existe qu'un nombre fini (à équivalence près) de solutions par* (a,b) *de pente* c .
(b) *Pour* $a \in \boldsymbol{C}$ *générique et pour tout* $b \in \boldsymbol{C}$ *il existe une solution par* (a,b).

Preuve. (a) Si $D(a,b)\neq 0$ il n'en existe qu'une d'après (1.3). Si $D(a,b)=0$ nous devons considérer, comme au début de la preuve de (3.8), une equation du type

$$kv^{k-1}v' = \sum_{j=r}^{\infty} e_j(x)v^j \quad , e_r(a) \neq 0$$

pour chaque facteur irréductible de F dans l'anneau local de $\boldsymbol{C}^3$ en (a,b,c). Si $k-1 \leq r$, on a une ou deux solutions (dans le deuxième cas $v=0$ est solution). Si $k-1 > r$ on considère v comme nouvelle variable indépendante et on a la même chose.
(b) Pour $a \in \boldsymbol{C}$ générique et pour $b \in \boldsymbol{C}$ tel que $c_0(a,b)\neq 0$ il suffit d'appliquer (3.4). Si $c_0(a,b)=0$ on peut supposer $c_0(a,y)\neq 0$ pour a générique. Alors, par (3.4) et (3.5) il existe une solution par (a,b) de pente ∞.

Nous finirons ce paragraphe avec deux lemmes qui seront utiles plus tard.

(3.12) LEMME.- *Soit* $a \in \boldsymbol{C}$ *tel que* $c_m(a,y) = 0$. *Alors, pour* $b \in \boldsymbol{C}$ *générique il existe une solution* $x=\alpha(t)$, $y=\beta(t)$ *par* (a,b) *de pente* 0 *telle que* $\beta(t)$ *n'est pas constante.*

Preuve. Pour $b \in \boldsymbol{C}$ générique, $c_m(x,b) \neq 0$. Cela implique que si $x=\alpha(t)$, $y=\beta(t)$ est une solution par (a,b) alors $\beta(t)$ n'est pas constante. Il reste à prouver l'existence d'une solution par (a,b) de pente 0 pour $b \in \boldsymbol{C}$ générique.

1er cas). $D(a,y) \neq 0$. Pour $b \in \boldsymbol{C}$ générique, $D(a,b) \neq 0$. Alors $F(a,b,0) = 0$, $F_z(a,b,0) \neq 0$ et il suffit d'appliquer (1.3).

2ème cas). $D(a,y) = 0$. Pour $b \in \boldsymbol{C}$ générique le polynôme $F(a,b,z)$ n'est pas nul et Δ est donné localement au voisinage de (a,b) par l'équation $x=a$. On

applique (2.1) en interchangeant x et y. Il en résulte qu'il existe $k \geq 1$ et $z=f(u,y)$, holomorphe au voisinage de $(0,b)$, tels que:

$$f(0,b) = 0 \quad \text{et} \quad F(a+u^k, y, f(u,y)) = 0 \quad \text{au voisinage de} \quad (0,b).$$

La solution $y = g(u)$ telle que $g(0) = b$, de l'équation

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{du} = kf(u,y)u^{k-1},$$

nous donne la solution $x = a + u^k$, $y = g(u)$ de $F(x,y,y')=0$, qui est une solution par (a,b) de pente 0.[]

(3.13) LEMME.- *Toute solution par* (a,b), *où* $b \in \boldsymbol{C}$, *de pente* ∞, *est ramifiée.*

Preuve. Si

$$x = a + t^M \quad , \quad y = b + \sum_{k=r}^{\infty} b_k t^k \qquad 1 \leq r < M \qquad b_r \neq 0$$

est une solution par (a,b) de pente ∞, M ne divise pas r.

(3.14) EXEMPLE.- Considérons l'équation $(y')^m + A(x,y) = 0$, appelée équation *binomiale*.
Nous supposerons

$$A(x,y) = P_1(x,y) \ldots\ldots P_n(x,y)$$

où les P_j sont des polynômes irréductibles non-associés et aucun d'entr'eux n'est indépendant de x. Alors le polynôme $F(x,y,z) = z^m + A(x,y)$ est irréductible pas seulement dans $\boldsymbol{C}[x,y,z]$ mais aussi dans $K[z]$, où K est le corps de fractions de l'anneau local de $\boldsymbol{C}^2$ en n'importe quel point de Δ : en effet, il suffit d'appliquer le critère de Einsenstein, puisque $D(x,y) = A(x,y)$.

Supposons que $y = \eta(x)$ est une solution telle que $D(x,\eta(x)) = 0$. Alors, $\eta'(x)=0$. Donc $\eta(x) = b$ constante et $A(x,b) = 0$, contradiction.
De ce qui precède et de (1.3), (2.2) et (3.8) on déduit que pour $a \in \boldsymbol{C}$ générique et pour $b,c \in \boldsymbol{C}$ tels que $F(a,b,c) = 0$, il existe une et une seule, à équivalence près, solution par (a,b) de pente c.

Supposons que $F \in \boldsymbol{R}[x,y,z]$ et $a,b \in \boldsymbol{R}$. Soit

$$x = a + t^M \quad , \quad y = \beta(t) = b + \sum_{j=1}^{\infty} b_j t^j$$

une solution par (a,b) de pente $c \in \boldsymbol{R}$. Alors

$$x = a + t^M \quad , \quad y = b + \sum_{j=1}^{\infty} \overline{b_j} t^j = \overline{\beta(\bar{t})}$$

est aussi une solution par (a,b) de pente c. Donc, elle est équivalente à la première, d'après ce qui précède. On voit tout de suite que cela implique qu'il existe $\varepsilon \in \boldsymbol{C}$ tel que:

$$\varepsilon^M = 1 \quad \text{et} \quad b_j \varepsilon^j = \overline{b_j} \qquad j = 1,2,.....$$

Soit $\varepsilon = \eta^2$. Alors $\eta^M = \pm 1$. En plus, $b_j \eta^j \in \boldsymbol{R}$ pour j=1,2,... En faisant $t=\eta s$ dans la première on obtient la solution analytique *réelle*:

$$x = a \pm s^M \quad , \qquad y = b + \sum_{j=1}^{\infty} (b_j \eta^j) s^j$$

Par exemple, par chaque point $(a,a) \in \boldsymbol{R}^2$ passe une solution analytique réelle de $(y')^2+x-y=0$ qui a un point de rebroussement à tangente horizontale en (a,a) (faire $y=x+v^2$).

4. La classe de Fuchs. Dans certains équations les solutions locales ramifiées n'apparaissent que dans certains points fixes ; par exemple, les solutions locales en $a \in \boldsymbol{C}$ de l'équation

$$4x(y')^2 - 1 = 0$$

ne sont pas ramifiées à moins que $a = 0$. Par contre, dans d'autres cas, le point où se présente la ramification dépend de la solution (dans la littérature classsique on se réfère à cette situation en disant qu'on a des "singularités mobiles") ; par exemple, pour tout $a \in \boldsymbol{C}$ l'équation

$$2yy' - 1 = 0$$

possède la solution ramifiée par $(a,0)$:

$$x = a + t^2 \ , \ y = t.$$

(4.1) DÉFINITION.- *On dit que $a \in \boldsymbol{C}$ est un <u>point de ramification</u> de l'équation s'il existe une solution locale en a qui soit ramifiée.*

(4.2) DÉFINITION.- *On dit que l'équation est dans la <u>classe de Fuchs</u> s'il n'existe qu'un nombre fini de points de ramification.*

C'est-à-dire, l'équation est dans la classe de Fuchs si pour $a \in \boldsymbol{C}$ générique, toute solution locale en a est uniforme (même les solutions par (a,∞) s'il en existe).

D'après (1.4) on sait que si $a,b \in \boldsymbol{C}$ et $c_0(a,b)D(a,b) \neq 0$ alors toute solution par (a,b) est uniforme.

(4.3) DÉFINITION.- *On dira que l'équation est dans la <u>classe de Fuchs faible</u> si pour $a \in \boldsymbol{C}$ générique et tout $b \in \boldsymbol{C}$, toute solution par (a,b) est uniforme.*

Cela veut dire que les éventuelles ramifications "mobiles" ne se présentent pas à distance finie.

(4.4) EXEMPLE.- a) $x(y')^2 - y^3 = 0$. D'aprés (2.3)a et (3.6), pour $a \in \boldsymbol{C}$, $a \neq 0$, la seule solution par $(a,0)$ est $y=0$ et il n'y a pas de solution ramifiée par (a,∞). Cette équation est dans la classe de Fuchs.

b) $x^3(y')^3 - y = 0$. D'après (2.3)b, cette équation n'est pas dans la classe de Fuchs faible puisqu'elle a la solution ramifiée par $(a,0)$, $a\neq 0$.

$$x = ae^{\frac{3}{2}t^2} \qquad y = t^3$$

On vérifie qu'il n'existe pas de solution locale en $a=0$. Donc, pour cette équation, l'ensemble des points de ramification est $\boldsymbol{C}-\{0\}$.

c) $2y' + y^3 = 0$ est dans la classe de Fuchs faible mais elle n'est pas dans la classe de Fuchs.

Dans ce qui suit on va chercher des conditions *nécessaires et suffisantes* pour que l'équation soit dans la classe de Fuchs.

(4.5) LEMME.- *Pour* $a\in\boldsymbol{C}$ *générique et pour* $b\in\boldsymbol{C}$ *tel que* $c_0(a,b)\neq 0$ *et* $D(a,b) = 0$, *on a que (a)⇒(b) et (b)⇒(c):*
a) toute solution par (a',b') *est uniforme pour* a' *au voisinage de* a *et* $b'=\eta(a')$.
b) poids $H \geq \deg_z H - 1$
pour chaque facteur irréductible monique H *de* F *dans* $K[z]$, *où* K *est le corps de fractions de l'anneau local de* $\boldsymbol{C}^2$ *en* (a,b) *(*poids H *est bien défini; voir (2.2) et (2.5));*
c) toute solution par (a,b) *est uniforme.*

Preuve. 1) (a)⇒(b). Soit D_a un petit disque de centre a . Nous pouvons supposer que toute solution locale par (a',b') est uniforme si $a'\in D_a$ et $b'=\eta(a')$ et que Δ est défini localement, au voisinage de (a,b) , par une équation $y = \eta(x)$ analytique dans D_a avec $b=\eta(a)$. En reprenant le début du §3, pour chaque H on a une équation

$$kv^{k-1}\frac{dv}{dx} = f(x,v) - \eta'(x) = \sum_{j=r}^{\infty} e_j(x)v^j$$

où les e_j sont analytiques dans D_a , avec $e_r(a')\neq 0$ pour tout $a'\in D_a$ (voir (2.4)) où r = poids H et $k = \deg_z H$ (Voir (2.1) et (2.2)).

On peut supposer que $c_0(a',b')\neq 0$ pour tout $a'\in D_a$ où $b' = \eta(a')$. Supposons, par absurde, que $k > r + 1$.

En prenant v comme nouvelle variable indépendante on est amené à une équation de la forme

$$\frac{dx}{dv} = v^n h(x,v) \quad , \qquad 0 < n = k-1-r \leq k-1$$

où h est holomorphe et jamais nulle dans $D_a \times D$, D étant un disque de centre 0 dans $\boldsymbol{C}$. Soit $a' \in D_a$ et soit $x = \alpha(v)$ la solution de cette équation au voisinage de 0 telle que $\alpha(0) = a'$. Alors,

$$x = \alpha(v) \quad , \quad y = \eta(\alpha(v)) + v^k$$

est une solution locale par (a',b') de l'équation $F(x,y,y')=0$ où $b'=\eta(a')$. Donc, elle est uniforme (et de pente finie), ce qui veut dire qu'il existe $y = \varphi(x)$ holomorphe au voisinage de a' telle que

$$\varphi(a') = b' \quad \text{et} \quad \eta(\alpha(v)) + v^k = \varphi(\alpha(v)) .$$

Alors: $$(\varphi - \eta)(\alpha(v)) = v^k .$$

D'après (4.6) ci-dessous il existe un diviseur $l > 1$ de k tel que

$$\alpha(\varepsilon v) = \alpha(v) \quad \text{où} \quad \varepsilon = e^{2\pi i/l}.$$

Comme $\alpha(v) - a'$ s'annulle en 0 avec multiplicité $n + 1$, l divise $n + 1$ (donc, divise r).

D'après (4.7) ci-dessous, $h(x,\varepsilon v) = h(x,v)$. On en déduit que $f(x,\varepsilon v) = f(x,v)$ puisque l divise r. Cela contredit (2.1)e.

2) (b)$\Rightarrow$(c). On commence comme dans 1) et on obsérve que quand $r \geq k-1$ l'équation

$$kv^{k-1}\frac{dv}{dx} = \sum_{j=r}^{\infty} e_j(x)v^j$$

n'admet que les solutions $v=0$ (éventuellement) et une autre $v=v(x)$ analytique. Comme $c_0(a,b) \neq 0$, il n'y a pas de solution de pente ∞ par (a,b). Cela montre que toute solution par (a,b) est uniforme.[]

(4.6) LEMME.- *Soit u une fonction holomorphe au voisinage de $0 \in \boldsymbol{C}$ telle que $u'(0) = 0$. Soit $a = u(0)$ et supposons qu'il existe un fonction w holomorphe au voisinage de a telle que $w(u(z)) = z^k$ où $k>1$. Alors, il existe un diviseur $l>1$ de k tel que $u(\varepsilon z) = u(z)$ pour tout ε racine l-ème de 1.*

Preuve. Si z,z', au voisinage de 0, sont tels que $u(z) = u(z')$, alors il existe θ, racine k-ème de 1, telle que $z' = \theta z$. Soit $z_n \to 0$, $z_n \neq 0$. Il existe $z'_n \neq z_n$, $z'_n \neq 0$, $z'_n \to 0$ avec $u(z'_n) = u(z_n)$, car $u'(0) = 0$. Alors, $z'_n = \theta_n z_n$ où $(\theta_n)^k=1$ et $\theta_n \neq 1$. Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de racines k-èmes de 1, on peut supposer $\theta_n = \varepsilon$ constante. Alors $u(z) - u(\varepsilon z) = 0$ et ε est une racine primitive l-ème de 1 pour un $l>1$ diviseur de k.[]

(4.7) LEMME.- *Soit $a \in \boldsymbol{C}$ et considérons l'équation différentielle*

$$\frac{dw}{dz} = z^{l-1}g(z,w) \quad , \quad l > 1$$

où g est holomorphe au voisinage de $(0,a)$. Soit $w = w(z,u)$, holomorphe au voisinage de $(0,a)$, la solution telle que $w(0,u) = u$. Supposons qu'il existe ε racine l-ème de 1 telle que $w(\varepsilon z,u) = w(z,u)$. Alors $g(\varepsilon z,w) = g(z,w)$.

Preuve. En dérivant nous avons

$$\frac{\partial w}{\partial z}(\varepsilon z,u)\varepsilon = \frac{\partial w}{\partial z}(z,u),$$

ce qui entraîne

$$g(\varepsilon z, w(z,u)) = g(z, w(z,u)).$$

Pour finir la preuve on observe que l'application locale

$$(\boldsymbol{C}^2,(0,a)) \to (\boldsymbol{C}^2,(0,a)), \quad (z,u) \to (z,w(z,u))$$

est surjective: en effet, puisque $w(0,u) = u$, nous avons $w_u(0,a) = 1$ et donc le jacobien de l'application est non nul en $(0,a)$.[]

OBSERVATION. Si poids $H < \deg_z H - 1$, le lemme (4.5) implique l'existence d'une suite (eventuellement constante) de points de ramification de l'équation (1), qui tend vers a.

(4.8) PROPOSITION.- *Si l'équation est dans la classe de Fuchs faible, alors $c_0(x,y)$ ne dépend pas de y.*

Preuve. Supposons que $c_0(x,y)$ dépend effectivement de y. Nous allons montrer que pour $a \in \boldsymbol{C}$ générique et pour un $b \in \boldsymbol{C}$ convenable, il existe une solution par (a,b) de pente ∞. Il suffira, alors, d'appliquer (3.13).

Soit $L \subset \boldsymbol{C}^2$ la courbe algébrique définie par $c_0(x,y) = 0$. Alors L contient une composante irréductible M qui n'est pas une droite verticale.

Cas 1). M n'est pas une droite horizontale. En procédent comme dans (3.5) on considère l'équation:

$$c_0(x,y) + c_1(x,y)x' + \ldots + c_m(x,y)(x')^m = 0$$

Pour $b \in \boldsymbol{C}$ générique on peut assumer que: a) b appartient à l'image de M par la projection $(x,y) \to y$ mais pas à l'image de Sing L et b) si $(a,b) \in M$ il existe une solution par (a,b) de pente 0 de cette équation là (voir (3.4)). Si cette solution était $x=a$ on aurait $c_0(a,y)=0$. Mais alors $\{x=a\} \subset L$ et (a,b) serait un point singulier de L ; contradiction. Donc, cette solution nous donne une solution de $F(x,y,y') = 0$ par (a,b) de pente ∞. L'affirmation de plus haut en résulte tout de suite.

Cas 2). M est une droite horizontale. On fait de même que dans le premier cas et on applique (3.12).[]

(4.9) PROPOSITION.- *Si l'équation est dans la classe de Fuchs alors*

$$\deg_y c_k(x,y) \leq 2k \quad (\ k = 0,1,\ldots,m\ ).$$

Preuve. Nous avons déjà prouvé dans (4.8) que $c_0(x,y)=c_0(x)$. Soit:

$$s_k = \deg_y c_k(x,y) \quad \text{pour} \quad k = 0,1,\ldots,m .$$

En faisant $y = 1/y_1$ on obtient l'équation:

$$c_0(x)\left(-\frac{y_1'}{y_1^2}\right)^m + c_1(x,\frac{1}{y_1})\left(-\frac{y_1'}{y^2}\right)^{m-1} + \ldots + c_m(x,\frac{1}{y_1}) = 0$$

Soit $N = \sup_k(s_k+2m-2k)$. En multipliant par $(y_1)^N$ cette équation on obtient une équation du type $F_1(x,y_1,y_1') = 0$ où

$$F_1(x,y_1,z_1) = d_0(x,y_1)z_1^m + d_1(x,y_1)z_1^{m-1} + \ldots + d_m(x,y_1)$$

est un polynôme irréductible. Toute solution ramifiée par $(a,0)$ de $F_1(x,y_1,y_1') = 0$ donne lieu à une solution ramifiée par (a,∞) de $F(x,y,y') = 0$.

Si $s_k > 2k$ pour quelque k alors $N > 2m$, ce qui entraîne $d_0(x,0)=0$. Par (3.5) et (3.12) on sait qu'il existe, pour $a\in \boldsymbol{C}$ générique, une solution par $(a,0)$ de pente ∞ de $F_1(x,y_1,y_1') = 0$. D'après (3.13), cette solution est ramifiée. Donc, l'équation $F(x,y,y') = 0$ n'est pas dans la classe de Fuchs.[]

Les quatre résultats qui suivent résument les renseignements refférents à l'équation (1) obtenus jusqu'au moment.

(4.10) THÉORÈME.- *L'équation est dans la classe de Fuchs faible si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:*
A) $c_0(x,y)$ *ne dépend que de* x *;*
B) pour $a\in \boldsymbol{C}$ *générique et* $b\in \boldsymbol{C}$ *tel que* $D(a,b) = 0$ *on a:*

$$\text{poids } H \geq \deg_z H - 1$$

pour tout facteur irréductible monique H *de* F *dans* $K[z]$ *, où* K *est le corps de fractions de l'anneau local de* $\boldsymbol{C}^2$ *en* (a,b) *.*

Preuve. Si l'équation est dans la classe de Fuchs faible, alors A) résulte de (4.8) et (4.5).

Supposons vérifiées A) et B). Pour $a\in \boldsymbol{C}$ générique, $c_0(a)\neq 0$.

Si $b\in \boldsymbol{C}$ et $D(a,b)\neq 0$ toute solution par (a,b) est uniforme par (1.4). Si $b\in \boldsymbol{C}$ et $D(a,b)=0$ on a la même conclusion d'après (4.5).[]

(4.11) PROPOSITION.- *Supposons que l'équation est dans la classe de Fuchs faible. Pour* $a\in \boldsymbol{C}$ *générique et* $b\in \boldsymbol{C}$ *tel que* $D(a,b) = 0$ *, soit* $y = \eta(x)$ *une équation locale de* Δ *au voisinage de* (a,b) *(* $\eta(a)=b$ *). Supposons que* F *admet un facteur irréductible monique* H *dans l'anneau* $K[z]$*, où* K *est le corps de fractions de l'anneau local de* $\boldsymbol{C}^2$ *en* (a,b)*, avec* $\deg_z H > 1$ *. Alors* $y = \eta(x)$ *est une solution régulière et* $H(x,\eta(x),\eta'(x)) = 0$ *.*

Preuve. D'après (4.8), $c_0(x,y)=c_0(x)$ et on peut supposer $c_0(a)\neq 0$. Par (2.2) et (4.5) on conclut que poids $H > 0$. La proposition suit de (2.6).[]

(4.12) THÉORÈME.- *Supposons que l'équation est dans la classe de Fuchs faible. Alors elle est dans la classe de Fuchs si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:*

A') $\deg_y c_k(x,y) \leq 2k$ $(k=1,2,...,m)$;

B') si le discriminant, comme polynôme en z_1 *, de*

$$F_1(x,y_1,z_1) = (-1)^m c_0(x) z_1^m + (-1)^{m-1} y_1^2 c_1(x,\frac{1}{y_1}) z_1^{m-1} + ... + y_1^{2m} c_m(x,\frac{1}{y_1})$$

(qui est un polynôme irréductible) contient le facteur y_1 *alors, pour* $a \in \boldsymbol{C}$ *générique*

$$\text{poids} H \geq \deg_{z_1} H - 1$$

pour chaque facteur irréductible monique H *de* F_1 *dans* $K[z_1]$ *où* K *est le corps de fractions de l'anneau local de* $\boldsymbol{C}^2$ *en* $(a,0)$.

Preuve. De manière analogue à ce qu'on a fait lors de la preuve de (4.10), l'assertion suit aisément de (1.4), (4.9), (3.5), (3.6) et (4.5).

Gardons les notations de (4.12).

(4.13) PROPOSITION.- *Supposons que l'équation est dans la classe de Fuchs. Si le discriminant de* F_1 *contient le facteur* y_1 *et il existe un facteur irréductible* H *de* F_1 *dans* $K[z_1]$ *dont le degré en* z_1 *est* > 0, *alors,*

$$\deg_y c_{m-1}(x,y) < 2m-2 \quad \text{et} \quad \deg_y c_m(x,y) < 2m .$$

Preuve. Par le même raisonnement de la preuve de (4.11) appliqué à l'équation $F_1(x,y_1,y_1') = 0$, on a que $H(x,0,0) = 0$. Alors, d'après (2.2), $z_1=0$ est une racine multiple de $F_1(a,0,z_1) = 0$. Comme ceci vaut pour a générique, le coefficient de z_1 et le terme indépendant dans F_1 s'annullent lorsque $y_1=0$. La proposition en résulte aussitôt.

(4.14) EXEMPLE.- $(y')^2 - y(x-y)^2 = 0$. Nous allons vérifier que cette équation est dans la classe de Fuchs. On a

$$D(x,y) = 4y(x-y)^2 \quad , \qquad \Delta = \{y=0\} \cup \{y=x\}.$$

On distingue trois cas :

1) $a \neq 0$ et $b \neq 0,a$. Toute solution par (a,b) est uniforme d'après (1.4) et (3.5).

2) $a \neq 0$ et $b = 0$. Le polynôme

$$F(x,y,z) = z^2 - y(y-x)^2$$

est irréductible dans $K[z]$ où K est le corps de fractions de l'anneau local de $\boldsymbol{C}^2$ en (a,b) . On fait $y = v^2$ et on obtient

$$\text{poids } F = 1 \quad \text{et} \quad \deg_z F = 2 .$$

3) $a \neq 0$ et $b = a$. Le polynôme F se factorise alors en deux facteurs linéaires dans $K[z]$.

D'après (4.10) l'équation est déjà dans la classe de Fuchs faible.

Considérons maintenant:

$$F_1(x,y_1,z_1) = y_1^4((-\frac{z_1}{y_1^2})^2 - \frac{1}{y_1}(x-\frac{1}{y_1})^2) = z_1^2 - y_1(xy_1-1)^2$$

Alors F_1 est irréductible dans $K[z]$ pour $a \neq 0$ et $b = 0$. En faisant $y_1 = (v_1)^2$ on voit que

$$\text{poids } F = 1 \quad \text{et} \quad \deg_z F = 2.$$

Donc, l'équation est dans la classe de Fuchs par (4.12).

Observons que $y = x$ est implicite dans

$$F(x,y,z) = F_z(x,y,z) = 0$$

et pourtant $y = x$ n'est pas solution. Cela montre que l'affirmation 3ème de la page 6 de [2] est fausse (F est irréductible, comme polynôme en y,z sur la cloture algébrique de $\boldsymbol{C}(x)$).

(4.15) EXEMPLE.- Si $m = 1$ alors l'équation est dans la classe de Fuchs faible si et seulement si $c_0(x,y)$ ne dépend pas de y et elle est dans la clase de Fuchs si et seulement si $\deg_y c_j(x,y) \leq 2j$ pour $j=0,1$. Dans ce dernier cas on a une équation de Ricatti.

(4.16) EXEMPLE.- On considère l'équation binomiale

$$(y')^m - P(x,y) = 0$$

où $P \in \boldsymbol{C}[x,y]$; nous en avons déjà considéré un cas particulier dans (3.14) (voir aussi [3, §13.8]). On suppose que

$$F(x,y,z) = z^m - P(x,y)$$

est irréductible et que l'équation (1) est dans la classe de Fuchs. Si $m=1$, l'équation est de Riccati d'après (4.15). On supposera $m>1$. Par (4.12), $\deg_y P \leq 2m$. Supposons pour un instant que $\deg_y P < 2m$; soit $c \in \boldsymbol{C}$ tel que $P(x,c) \neq 0$.

Le changement de variable

$$y = \frac{1}{\eta} + c$$

ramène l'équation au cas où $\deg_y P = 2m$, ce qu'on supposera désormais.

En décomposant P en facteurs premiers on obtient

$$P(x,y) = B(x)B_1(x,y)^{k_1} \dots B_r(x,y)^{k_r} \quad , \quad k_1 \geq \dots \geq k_r > 0,$$

avec $B \in \boldsymbol{C}[x]$, $B_j \in \boldsymbol{C}[x,y]$, $j=1,\dots,r$, où les B_j sont premiers et deux à deux non-associés; de plus on doit avoir

$$\sum_{j=1}^{r} k_j \deg_y B_j = 2m \quad \text{et} \quad \deg_y B_j > 0,\ 1 \leq j \leq r.$$

En particulier, $k_1 \leq 2m$.

Supposons d'abord que, pour un j particulier, $k_j \neq m, 2m$. Notons

$$d_j = \text{pgdc}(m,k_j) \ , \quad a_j = m/d_j \ , \quad l_j = k_j/d_j.$$

Soit $(a,b) \in \boldsymbol{C}^2$ avec $B_j(a,b)=0$. Pour a générique, soit $y=\eta(x)$ l'équation locale de l'ensemble des zéros de B_j au voisinage de (a,b). Le polynôme F

admet un facteur sur le corps de fractions K de l'anneau local A de $\boldsymbol{C}^2$ en (a,b) de la forme

$$H_j(x,y,z) = z^{a_j} - \alpha(x,y)B_j(x,y)^{l_j}$$

où $\alpha \in A$ et $\alpha(0,0) \neq 0$. Puisque pgdc$(a_j,l_j)=1$, ce facteur est irréductible sur K (voir [16,chap. VIII, § 9]).

Comme $a_j>1$, de (4.11) suit que $y=\eta(x)$ est une solution de l'équation, ce qui implique que $\eta(x)$ est constante. Donc, on peut supposer $B_j(x,y)=y-b_j$ où $b_j \in \boldsymbol{C}$. En plus, on vérifie tout de suite que poids $H_j = l_j$. Alors, par (4.10), $l_j \geq a_j - 1$; en particulier,

$$\frac{k_j}{m} = \frac{l_j}{a_j} \geq 1 - \frac{1}{a_j} \geq \frac{1}{2}.$$

Si $k_j < m$, on a $l_j < a_j$; donc, $l_j = a_j - 1$ et

$$\frac{k_j}{m} = \frac{a_j - 1}{a_j}.$$

En résumé, on a les propriétés suivantes:

i) $2m \geq k_1 \geq \ldots \geq k_r > 0$ et

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{k_j}{m} \deg_y B_j = 2;$$

ii) pour $j=1,\ldots,r$, on a l'inégalité suivante

$$\frac{k_j}{m} \geq \frac{1}{2};$$

iii) si $k_j \neq m, 2m$ alors $B_j(x,y) = y - b_j$, $b_j \in \boldsymbol{C}$ et les b_j sont tous différents.

iv) si $k_j < m$ alors il existe $a_j \in \boldsymbol{N}$, $a_j > 1$ tel que $k_j/m = (a_j-1)/a_j$.

On distingue plusieurs cas.

A) $k_1 = 2m$. Alors, par i), $r=1$ et $\deg_y B_1 = 1$. L'équation est:

$$(y')^m - B(x)(a(x)y + b(x))^{2m} = 0$$

où $a,b\in \boldsymbol{C}[x]$ et $a\neq 0$.

B) $k_1 = m$ et $\deg_y B_1 = 2$. Par i), $r = 1$ et l'équation devient

$$(y')^m - B(x)(a(x)y^2 + b(x)y + c(x))^m = 0$$

où $a,b,c\in \boldsymbol{C}[x]$ et $a\neq 0$.

C) $k_1 = k_2 = m$. Par i), $r = 2$ et $\deg_y B_1 = \deg_y B_2 = 1$. L'équation est alors

$$(y')^m - B(x)(a(x)y + b(x))^m(c(x)y + d(x))^m = 0$$

où $a,b,c,d\in \boldsymbol{C}[x]$, $ac\neq 0$ et $ad-bc\neq 0$.

D) $k_1 = m$, $\deg_y B_1 = 1$, $r \geq 3$ et $k_j < m$ pour $2 \leq j \leq r$.
D'après i) on obtient la relation

$$\sum_{j=2}^{r} \frac{k_j}{m} = 1 .$$

Par ii) on a que $r = 3$ et $m=2k_j$, $j=2,3$. Donc l'équation devient

$$(y')^{2n} - B(x)(p(x)y + q(x))^{2n}(y - b_2)^n(y - b_3)^n = 0,$$

où $n\in \boldsymbol{N}$, $b_2,b_3\in \boldsymbol{C}$, $b_2\neq b_3$, $p,q\in \boldsymbol{C}[x]$, $p\neq 0$ et $q(x)/p(x)\neq - b_2-b_3$.

E) $2m > k_1 > m$, $r \geq 2$ et $k_j < m$ pour $2 \leq j \leq r$. D'après i) et iii) on obtient

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{k_j}{m} = 2.$$

Par ii) e i), $r = 2$ et $k_1 + k_2 = 2m$; c'est-à-dire
$k_1=m+n$ et $k_2=m-n$, $n\in N$, $0<n<m$.
Par iv) n divise m et l'équation est de la forme

$$(y')^{dn} - B(x)(y - b_1)^{n(d+1)}(y - b_2)^{n(d-1)} = 0,$$

où $d,n\in \boldsymbol{N}$, $b_1,b_2\in \boldsymbol{C}$, $b_1\neq b_2$.

F) $k_j < m$ pour $j=1,\ldots,r$. Comme dans le cas précédent:

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{k_j}{m} = 2 .$$

Par ii), $r = 3$ ou 4. On considère les deux sous-cas suivants.

F_1) $r=4$. Alors $m=2k_j$, $1\le j\le 4$. L'équation s'écrit sous la forme

$$(y')^{2n}-B(x)(y-b_1)^n(y-b_2)^n(y-b_3)^n(y-b_4)^n=0,$$

où $n\in \boldsymbol{N}$ et les $b_j\in \boldsymbol{C}$ sont tous différents.

F_2) $r=3$. Par iv) on a:

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{a_j-1}{a_j}=2 \quad , \quad a_1\ge a_2\ge a_3\ge 2.$$

On voit que $a_2=a_3=2$ est impossible. Alors $a_2>2$, ce qui entraîne $a_1<7$. Une discussion directe donne:
$a_1=6$, $a_2=3$, $a_3=2$; $a_1=4$, $a_2=4$, $a_3=2$; $a_1=3$, $a_2=3$, $a_3=3$.
On obtient les équations suivantes:

F_{21}) $$(y')^{6n}-B(x)(y-b_1)^{5n}(y-b_2)^{4n}(y-b_3)^{3n}=0$$

F_{22}) $$(y')^{4n}-B(x)(y-b_1)^{3n}(y-b_2)^{3n}(y-b_3)^{2n}=0$$

F_{23}) $$(y')^{3n}-B(x)(y-b_1)^{2n}(y-b_2)^{2n}(y-b_3)^{2n}=0$$

où $n\in \boldsymbol{N}$ et $b_1,b_2,b_3\in \boldsymbol{C}$ sont différents.

Dans les chapitres suivants on considérera l'integration de ces équations.

5. Solutions algébriques et intégrales premières. Dans certains cas on peut exprimer la "solution générale" de l'équation par une seule relation $R(x,y,\lambda)=0$ où R est un polynôme et λ un paramètre. Cela veut dire que les fonctions implicites dans cette relation sont des solutions de l'équation. Plus précisément:

(5.1) DÉFINITION.- *On dit que* $R\in \mathbf{C}[x,y,\lambda]$ *est* <u>*une intégrale première rationnelle*</u> *de l'équation (1) si* R *est irréductible, dépend effectivement de* y *et* λ *et si pour tout* $x=\alpha(t)$ *holomorphe et non-constante et* $y=\beta(t)$ *méromorphe au voisinage de* 0 *tels qu'il existe* $\lambda_0\in \boldsymbol{C}$ *avec*

$$R(\alpha(t),\beta(t),\lambda_0)=0 \quad \textit{pour tout} \quad t\ne 0,$$

on a que $x=\alpha(t)$, $y=\beta(t)$ *est une solution locale.*

(5.2) OBSERVATION.- L'exigence de que R soit irréductible est inclue pour éviter des situations comme $R=(x-\lambda)y$ pour l'équation $y'=0$.

(5.3) PROPOSITION.- *Soit* $R\in \boldsymbol{C}[x,y,\lambda]$ *irréductible et qui dépend effectivement de* y *et* λ . *Supposons que pour tous* a,b,λ_0 *tels que*

$$R(a,b,\lambda_0)=0 \quad \textit{et} \quad R_y(a,b,\lambda_0)\ne 0,$$

la fonction $y=y(x)$ *implicite dans* $R(x,y,\lambda_0)=0$ *avec* $y(a)=b$ *est une solution. Alors,* $R(x,y,\lambda)$ *est une intégrale première.*

Preuve. Soient $x=\alpha(t)$ holomorphe et non-constante et $y=\beta(t)$ méromorphe au voisinage de $0\in\boldsymbol{C}$ telles qu'il existe $\lambda_0\in\boldsymbol{C}$ avec:

$$R(\alpha(t),\beta(t),\lambda_0) = 0 .$$

Nous devons prouver:

$$(**) \qquad F(\alpha(t),\beta(t),\beta'(t)/\alpha'(t)) = 0 .$$

1° cas). Supposons $R_y(\alpha(t),\beta(t),\lambda_0)\neq 0$. Pour $t_1\in\boldsymbol{C}$ non-nul et proche de 0 , on a que $R_y(\alpha(t_1),\beta(t_1),\lambda_0)\neq 0$. On déduit aussitôt de l'hypothèse que (**) est satisfaite au voisinage de t_1 , ce qui complète la preuve dans ce cas.

2° cas). Supposons $R_y(\alpha(t),\beta(t),\lambda_0)=0$. Comme dans le premier cas, il suffit de prouver (**) au voisinage d'un point $t_1\in\boldsymbol{C}$ non-nul et proche de 0 . Alors, il suffit de prouver (**) pour $b=\beta(0)\in\boldsymbol{C}$ et $a=\alpha(0)\in\boldsymbol{C}$ générique.

Soit $K(x,\lambda)$ le discriminant de R comme polynôme en y . Alors $K(\alpha(t),\lambda_0)=0$ et on peut supposer que l'équation locale au voisinage de (a,b) de l'ensemble $\{K(x,\lambda)=0\}$ est $\lambda=\lambda_0$. Nous sommes en mesure d'appliquer (2.1) au point (a,b,λ_0) . Il en résulte qu'il existe $y=g(x,u)$ analytique au voisinage de $(a,0)$ telle que $g(a,0)=b$ et que

$$R(x,g(x,u),\lambda_0+u^k) = 0 \quad \text{où} \quad k\geq 1;$$

en plus, on a $\beta(t)=g(\alpha(t),0)$. En particulier, $\beta'(t)=g_x(\alpha(t),0)\alpha'(t)$.

Si $u_0\neq 0$ alors $R_y(a,g(a,u_0),\lambda_0+(u_0)^k)\neq 0$. On en déduit, par hypothèse, que

$$F(x,g(x,u_0),g_x(x,u_0)) = 0 .$$

Alors, $F(x,g(x,0),g_x(x,0)) = 0$ et il suffit de faire $x=\alpha(t)$.[]

(5.4) EXEMPLE.- Considérons l'équation différentielle

$$x^2(y')^2 + (1-2xy)y' + y^2 = 0.$$

Comme on vérifie par (5.3), elle admet l'intégrale première:

$$R(x,y,\lambda) = x + \lambda^2 y + \lambda.$$

Les droites $R(x,y,\lambda)=0$ sont les tangentes à l'hyperbole $4xy+1=0$.

Observons que les solutions $y=0$ et $y=-1/4x$ ne sont pas comprises dans la relation $R(x,y,\lambda)=0$.

Cet exemple montre que, en général, la connaissance d'une intégrale première ne donne pas immédiatement toutes les solutions.

(5.5) COROLLAIRE.- *Soit* $R\in\boldsymbol{C}[x,y,\lambda]$ *irréductible et qui dépend effectivement de* y *et* λ *. Définissons:*

$$\Phi(x,y,u,v) = v^m F(x,y,u/v) .$$

Alors $R(x,y,\lambda)$ *est une intégrale première si et seulement s'il divise*

$$\Phi(x,y,R_x(x,y,\lambda),-R_y(x,y,\lambda)) .$$

Preuve. Supposons que R est une intégrale première. Soient $a,b,\lambda_0 \in \boldsymbol{C}$ tels que $R(a,b,\lambda_0)=0$ et $R_y(a,b,\lambda_0)\neq 0$. Alors la fonction $y=y(x)$ implicite dans $R(x,y,\lambda_0)=0$ avec $y(a)=b$ est une solution. En particulier:

$$F(a,b,-\frac{R_x(a,b,\lambda_0)}{R_y(a,b,\lambda_0)}) = F(a,b,y'(a)) = 0$$

Alors,

$$\Phi(a,b,R_x(a,b,\lambda_0),-R_y(a,b,\lambda_0)) = 0 .$$

La conclusion suit du fait que R est irréductible et dépend effectivement de y .

La réciproque est analogue en appliquant (5.3).[]

(5.6) EXEMPLE.- Considérons l'équation différentielle

$$27y(y')^3 - 12xy' + 8y = 0.$$

On vérifie, par (5.5), que le polynôme

$$R(x,y,\lambda) = y^3 - \lambda(x-\lambda)^2$$

est une intégrale première pour celle-lá. On observe aussi que la solution $y=0$ satisfait:

$$R(x,0,0) = R_y(x,0,0) = 0 .$$

(5.7) PROPOSITION.- *Soit* $R\in \boldsymbol{C}[x,y,\lambda]$ *irréductible et qui dépend effectivement de* y *et de* λ . *Supposons qu'il existe un ouvert non-vide* U *de* $\boldsymbol{C}^2$ *tel que si* $y=y(x)$ *est une solution régulière par* $q\in U$, *il existe* $\lambda_0\in \boldsymbol{C}$ *tel que* $R(x,y(x),\lambda_0)=0$. *Alors,* $R(x,y,\lambda)$ *est une intégrale première.*

Preuve. On peut supposer que $(x,y)\in U$ implique $c_0(x,y)D(x,y)\neq 0$. Alors, pour chaque $q=(a,b)\in U$ il existe une solution régulière $y=y(x)$ par q (1.4). Soit $c=y'(a)$. Par l'hypothèse, il existe $\lambda_0\in \boldsymbol{C}$ tel que:

$$R(a,b,\lambda_0) = 0 \quad \text{et} \quad R_x(a,b,\lambda_0) + cR_y(a,b,\lambda_0) = 0 .$$

Dans les notations de (5.5) on a:

$$\Phi(a,b,R_x(a,b,\lambda_0),-R_y(a,b,\lambda_0)) = 0 .$$

En effet, si $R_y(a,b,\lambda_0)=0$ alors $R_x(a,b,\lambda_0)=0$ et c'est trivial. Si $R_y(a,b,\lambda_0)\neq 0$ alors

$$\Phi(a,b,R_x(a,b,\lambda_0),-R_y(a,b,\lambda_0)) =$$

$$= (-R_y(a,b,\lambda_0))^m F(a,b,-\frac{R_x(a,b,\lambda_0)}{R_y(a,b,\lambda_0)}) = (-R_y(a,b,\lambda_0))^m F(a,b,c) = 0.$$

Cela montre que l'image par la projection $(x,y,\lambda)\to(x,y)$ de l'ensemble algébrique défini par

$$R(x,y,\lambda) = \Phi(x,y,R_x(x,y,\lambda),-R_y(x,y,\lambda)) = 0$$

contient U . Donc, cet ensemble est de dimension >1 . Alors, il coïncide avec l'ensemble $\{R(x,y,\lambda)=0\}$. Il résulte de ceci et de (5.5) que $R(x,y,\lambda)$ est une intégrale première.[]

Pour la réciproque de (5.7) voir II(3.18).

(5.8) PROPOSITION.- *Soit* $R \in \boldsymbol{C}[x,y,\lambda]$ *irréductible et qui dépend effectivement de* y *et* λ. *Alors, il existe* $F \in \boldsymbol{C}[x,y,z]$ *irréductible et qui dépend effectivement de* z *tel que* $R(x,y,\lambda)$ *est une intégrale première de l'équation* $F(x,y,y')=0$.

Preuve. Soit $T \subset \boldsymbol{C}^4$ l'ensemble défini par:

$$R(x,y,\lambda) = 0 \quad \text{et} \quad R_x(x,y,\lambda) + zR_y(x,y,\lambda) = 0 .$$

C'est une surface algébrique. Soit $U \subset \boldsymbol{C}^3$ l'ensemble défini par:

$$R(x,y,\lambda) = 0 \quad \text{et} \quad R_y(x,y,\lambda) \neq 0.$$

Alors U est une variété analytique, connexe, non-vide, de dimension 2 (voir [9, vol. II E, thm.19]). Considérons l'application $\varphi : U \to \boldsymbol{C}^4$ définie par

$$\varphi(x,y,\lambda) = (x, y, -\frac{R_x(x,y,\lambda)}{R_y(x,y,\lambda)}, \lambda).$$

On vérifie, par le critère jacobien, que $\varphi(U) \subset T - \operatorname{Sing} T$. Puisque U est connexe, il existe une composante irréductible T_0 de T qui contient $\varphi(U)$.

Étant donné que $\dim T_0 = 2$, il existe $F(x,y,z) \in \boldsymbol{C}[x,y,z]$ irréductible tel que $F|T_0 = 0$. Donc,

$$(x,y,\lambda) \in U \quad \text{implique} \quad F(x,y,-\frac{R_x(x,y,\lambda)}{R_y(x,y,\lambda)}) = 0;$$

ceci entraîne, en particulier, que F dépend effectivement de z.

Soient $a, b, \lambda_0 \in \boldsymbol{C}$ tels que:

$$R(a,b,\lambda_0) = 0 \quad \text{et} \quad R_y(a,b,\lambda_0) \neq 0 .$$

Soit $y = y(x)$ la fonction implicite dans $R(x,y,\lambda_0) = 0$ avec $y(a) = b$. Alors $(x, y(x), \lambda_0) \in U$. Donc,

$$0 = F(x, y(x), -\frac{R_x(x, y(x), \lambda_0)}{R_y(x, y(x), \lambda_0)}) = F(x, y(x), y'(x)).$$

Pour finir la preuve, il suffit, alors, d'appliquer (5.3).[]

(5.9) OBSERVATION.- On voit, dans la preuve de (5.8), que $F(x,y,z)$ est obtenu des équations

$$R(x,y,\lambda) = 0, \quad R_x(x,y,\lambda) + zR_y(x,y,\lambda) = 0$$

par élimination de λ.

(5.10) EXEMPLE.- Prenons $R(x,y,\lambda) = x + \lambda^2 y + \lambda$. On élimine λ entre les équations

$$x + \lambda^2 y + \lambda = 0 \quad \text{et} \quad 1 + \lambda^2 z = 0$$

et on obtient l'équation de (5.4).

(5.11) DÉFINITION.- *Soit* $C \subset \boldsymbol{C}^2$ *une courbe algébrique irréductible. On dit que* C *est une* <u>*solution algébrique*</u> *de l'équation (1) si* C *n'est pas une droite verticale et si tout couple de fonctions* $x=\alpha(t)$, $y=\beta(t)$ *, où* α *est holomorphe non-constante et* β *méromorphe, au voisinage de* $0\in\boldsymbol{C}$*, tels que*

$$(\alpha(t),\beta(t))\in C \quad si \quad t\neq 0,$$

est une solution locale.

(5.12) EXEMPLE.- $xy' - y - x = 0$ est dans la classe de Fuchs par (4.15). Si $a\neq 0$, toute solution locale en a est régulière de la forme $y=x(\log x+c)$, où $\log x$ est une branche du logaritme au voisinage de a. Comme une branche du logaritme ne peut pas être algébrique, cette équation n'admet pas de solution algébrique.

(5.13) LEMME.- *Soit* C *une courbe algébrique irréductible. Supposons qu'il existe* $y=y(x)$ *holomorphe au voisinage de* $a\in\boldsymbol{C}$ *telle que:*
a) $y=y(x)$ *est une solution locale en* a *et*
b) $(x,y(x))\in C$ *pour* x *au voisinage de* a *.*
Alors, C *est une solution algébrique.*

Preuve. Il est évident que C n'est pas une droite verticale.

Soit C_0 l'ensemble des points réguliers de C où la tangente n'est pas verticale. L'ensemble C_0 est connexe. Soit $U\subset C_0$ l'ensemble des $q=(a,b)\in C_0$ tels que si $y=\eta(x)$ est l'équation locale de C en q , alors $y=\eta(x)$ est une solution locale en a . On voit tout de suite que U est ouvert et fermé dans C_0 . Comme C_0 est dense dans C , l'hypothèse implique que U n'est pas vide. Donc, $U=C_0$.

Soient $x=\alpha(t)$ holomorphe non-constante et $y=\beta(t)$ méromorphe au vosinage de $0\in\boldsymbol{C}$ telles que

$$(\alpha(t),\beta(t))\in C \quad \text{si} \quad t\neq 0 .$$

Il existe $t_1\in\boldsymbol{C}$ proche de 0 tel que $(\alpha(t_1),\beta(t_1))\in U$. Par définition de U ,

$$F(\alpha(t),\beta(t),\beta'(t)/\alpha'(t)) = 0$$

pour t au voisinage de t_1 . Cela entraîne immédiatement que $x=\alpha(t)$, $y=\beta(t)$ définissent une solution locale.[]

Pour la proposition suivante on garde les notations de (5.5).

(5.14) PROPOSITION.- *Soit* $f(x,y)\in\boldsymbol{C}[x,y]$ *irréductible et qui dépend effectivement de* y *. Soit* C *la courbe d'équation* $f(x,y)=0$ *. Alors* C *est une solution algébrique si et seulement si* $f(x,y)$ *divise le polynôme*

$$\Phi(x,y,f_x(x,y),-f_y(x,y)) .$$

Preuve. Il suit de (5.13) comme dans la preuve de (5.5).[]

(5.15) LEMME.- *Soit* $R\in\boldsymbol{C}[x,y,\lambda]$ *irréductible et qui dépend effectivement de* y *et* λ *. La condition nécessaire et suffisante pour que* R *soit une intégrale*

première est que pour $\lambda_0 \in \boldsymbol{C}$ *générique, l'équation* $R(x,y,\lambda_0)=0$ *définisse une courbe de* $\boldsymbol{C}^2$ *dont toutes les composantes irréductibles soient de solutions algébriques.*

Preuve. Comme R dépend de y, $R(x,y,\lambda_0)$ n'est constant que pour un nombre fini de valeurs de λ_0.

D'autre part, comme R est irréductible et $R_y \neq 0$, le sous-ensemble de $\boldsymbol{C}^3$ défini par

$$R(x,y,\lambda) = R_y(x,y,\lambda) = 0,$$

est de dimension ≤ 1. Alors, pour λ_0 générique, l'ensemble $\boldsymbol{C}^2$ défini par

$$R(x,y,\lambda_0) = R_y(x,y,\lambda_0) = 0,$$

est fini. Cela implique que $R(x,y,\lambda_0)$ n'est pas divisible par le carré d'un polynôme non-constant en x,y.

Supposons que, pour λ_0 générique, chaque composante irréductible de la courbe de $\boldsymbol{C}^2$ définie par $R(x,y,\lambda_0)=0$ est une solution algébrique. Alors, de ce qui precède et de (5.14) il résulte que $R(x,y,\lambda_0)$ divise le polynôme

$$\Phi(x,y,R_x(x,y,\lambda_0), -R_y(x,y,\lambda_0)).$$

Donc l'ensemble de $\boldsymbol{C}^3$ défini par

$$R(x,y,\lambda) = \Phi(x,y,R_x(x,y,\lambda), -R_y(x,y,\lambda)) = 0,$$

est de dimension ≥ 2. L'assertion suit de (5.5).[]

(5.16) OBSERVATION.- Supposons que l'équation est dans la classe de Fuchs et qu'elle admet l'intégrale première rationnelle $R(x,y,\lambda) \in \mathbf{C}[x,y,z]$.

Soit $p=(a,b,l) \in \boldsymbol{C}^3$ tel que $R(a,b,l)=0$. Si $R_y(a,b,l)=0$ et $R_x(a,b,l) \neq 0$, le germe Σ d'ensemble analytique en (a,b) défini par $R(x,y,l)=0$ est non-singulier et à tangente verticale en (a,b). Par la définition (5.1), Σ est le support d'une solution par (a,b). Alors, il existe une solution ramifiée par (a,b) (voir(3.13)). Donc, si a est générique,

$$R(a,b,l) = R_y(a,b,l) = 0 \quad \text{implique} \quad R_x(a,b,l) = 0.$$

D'après la Nullstellensatz (voir [9]) on en déduit qu'il existe $m \in \boldsymbol{N}$ tel que:

$$R_x(x,y,\lambda)^m = A(x,y,\lambda)R(x,y,\lambda) + B(x,y,\lambda)R_y(x,y,\lambda)$$

où A, B sont des polynômes en y,λ à coefficients des fonctions rationnelles de x. Cette condition nécessaire, pour que l'équation qui admet l'intégrale première $R(x,y,\lambda)$ soit dans la classe de Fuchs, n'est même pas suffisante pour qu'elle soit dans la classe de Fuchs faible : en effet, il suffit de regarder l'équation

$$8(y')^3 - 27y = 0,$$

dont une intégrale première est:

$$R(x,y,\lambda) = (x+\lambda)^3 - y^2.$$

* * *

Chapitre II – ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES ET FEUILLETAGES.

1.- Introduction. Dans ce chapitre nous reprenons l'étude des équations polynomiales sous un point de vue un peu plus général. Comme au chapitre I on se donne $F \in \boldsymbol{C}[x,y,z]$ irréductible,

$$F(x,y,z) = c_0(x,y)z^m + c_1(x,y)z^{m-1} + \ldots + c_m(x,y) \quad , \quad m \geq 1 \quad , \quad c_0(x,y) \neq 0$$

et $D \in \boldsymbol{C}[x,y]$ dénote son discriminant comme polynôme en z.

On se donne aussi $P, Q \in \boldsymbol{C}[x,y,z]$ premiers entre eux et tels que F ne divise pas Q. Cela implique que

$$F(x,y,z) = Q(x,y,z) = 0$$

définit un sous-ensemble algébrique de $\boldsymbol{C}^3$ de dimension pure 1. On définit $\Delta \subset \boldsymbol{C}^2$ comme étant l'union de l'adhérence de l'image de cet ensemble par la projection $(x,y,z) \to (x,y)$ avec l'ensemble défini par $D(x,y)=0$. Alors Δ est un sous-ensemble algébrique de dimension ≤ 1.

On considère l'équation différentielle:

$$(*) \qquad \left\{ \begin{array}{l} P(x,y,z)dx - Q(x,y,z)dy = 0 \\ F(x,y,z) = 0 \end{array} \right\}$$

(l'équation $F(x,y,y')=0$ en est le cas particulier où $P=z$, $Q=1$).

(1.1) DÉFINITION.- *Une* <u>*solution locale*</u> *en* $a \in \boldsymbol{C}$ *de (*) est un couple de fonctions* $x=\alpha(t)$, $y=\beta(t)$ *où* α *est holomorphe et non-constante et* β *est méromorphe au voisinage de* $0 \in \boldsymbol{C}$ *telles que* $\alpha(0)=a$ *et que les équations en* z

$$P(\alpha(t),\beta(t),z)\alpha'(t) - Q(\alpha(t),\beta(t),z)\beta'(t) = 0 \quad , \quad F(\alpha(t),\beta(t),z) = 0$$

ont une racine en commun pour tout $t \neq 0$ *au voisinage de* 0.

(1.2) EXEMPLE.- a) $z^2dx - dy = 0$, $z^2 + (y-x^2)z - 2x = 0$.
Une solution locale en 0 est $x=t$, $y=t^2$. Observons qu'il n'existe pas de fonction (uniforme) $z=\gamma(t)$ qui soit solution des deux équations de (1.1) pour $t \neq 0$.
b) $dx-dy=0$, $xz-1=0$. Une solution locale en 0 est $x=t$, $y=t$. Observons qu'il n'existe pas de racine en z commune aux équations $1-1=0$, $tz-1=0$ si $t=0$.

(1.3) LEMME.- *Si* $x=\alpha(t)$, $y=\beta(t)$ *est une solution locale de (*) alors, il existe* $t=t(s)$, *holomorphe et non-constante au voisinage de* $0 \in \boldsymbol{C}$, *avec* $t(0)=0$, *et* $z=\gamma(s)$, *méromorphe au voisinage de* $0 \in \boldsymbol{C}$, *telles que*

$$P(\alpha(s),\beta(s),\gamma(s))\alpha'(s) - Q(\alpha(s),\beta(s),\gamma(s))\beta'(s) = F(\alpha(s),\beta(s),\gamma(s)) = 0$$

(où $\alpha(s)=\alpha(t(s))$, $\beta(s)=\beta(t(s))$ *) pour tout* $s\neq 0$ *au voisinage de* 0 .

Preuve. Soit $E_0 \subset D^* \times \boldsymbol{C}$ l'ensemble analytique défini par:

$$P(\alpha(t),\beta(t),z)\alpha'(t) - Q(\alpha(t),\beta(t),z)\beta'(t) = F(\alpha(t),\beta(t),z) = 0$$

où D dénote un petit disque de centre $0\in\boldsymbol{C}$ et $D^*= D-\{0\}$.

Il est clair que l'adhérence E de E_0 dans $D\times P_1(\boldsymbol{C})$ est aussi un ensemble analytique. Comme F est irréductible, $F(\alpha(t),\beta(t),z)$ n'est pas identiquement nul. Alors, $\dim E \leq 1$. De la définition (1.1) il résulte qu'il existe un germe irréductible $S\subset E$ d'ensemble analytique de dimension 1 en un point $u\in\{0\}\times P_1(\boldsymbol{C})$ tel que $S-\{u\}\subset D^*\times\boldsymbol{C}$. On définit $t=t(s)$, $z=\gamma(s)$ comme étant une paramétrisation de ce germe définie au voisinage de $0\in\boldsymbol{C}$.[]

Les notions de *solution par* (a,b) , solutions *équivalentes*, *pente* d'une solution, solution *uniforme* ou *ramifiée*, solution *régulière*, définies au chap. I §1 se généralisent immédiatement à l'équation (*).

(1.4) LEMME.- *Toute solution par* $(a,b)\in\boldsymbol{C}^2$ *de pente* ∞ *est ramifiée.*

Preuve. Voir I(3.13).

Les notions de *point de ramification, classe de Fuchs, classe de Fuchs faible* définies au chap. I §4 se généralisent aussi au cas de l'équation (*), ainsi que celle de *solution algébrique* I(5.11).

On va donner une définition légèrement plus générale d'intégrale première rationnelle mais qui est équivalente à I(5.1) dans le cas de l'équation $F(x,y,y')=0$ (voir I(5.15)).

(1.5) DÉFINITION.- *Soit* $R\in\boldsymbol{C}[x,y,\lambda]$ *irréductible et qui dépend effectivement de* y *et de* λ . *On dit que* R *est une* <u>*intégrale première rationnelle*</u> *de (*) si pour tout* $\lambda_0\in\boldsymbol{C}$ *générique,* $R(x,y,\lambda_0)=0$ *définit une courbe algébrique de* $\boldsymbol{C}^2$ *dont toutes les composantes irréductibles sont des solutions algébriques de (*).*

(1.6) EXEMPLE.- $dx - zdy = 0$, $yz - x = 0$.
$R = y - \lambda x$ est une intégrale première, mais $y = 0$ n'est pas solution.

En général, le sous-ensemble $E\subset\boldsymbol{C}^3$ défini par l'équation

$$P(x,y,z)=Q(x,y,z)=F(x,y,z)=0$$

est fini. Si, par contre, l'ensemble E est de dimension ≥ 1, alors tout couple de fonctions $x=\alpha(t)$, $y=\beta(t)$ méromorphes au voisinage de $0\in\boldsymbol{C}$ avec α holomorphe et non-constante tel que $(\alpha(t),\beta(t))$ appartient à la projection de E sur $\boldsymbol{C}^2$ pour $t\neq 0$, fournit une solution locale de (*). Ceci justifie la définition suivante.

(1.7) DÉFINITION.-*Une solution locale* $x=\alpha(t)$, $y=\beta(t)$ *de (*) est triviale si pour tout* $t\neq 0$ *au voisinage de* 0, *les équations en* z

$$P(\alpha(t),\beta(t),z)=0 \ , \quad Q(\alpha(t),\beta(t),z)=0 \ , \quad F(\alpha(t),\beta(t),z)=0$$

ont une racine en commun.

Considérons maintenant une équation différentielle de la forme

$$(**) \qquad \left\{\begin{array}{l} P_1(x,y,z)dx - Q_1(x,y,z)dy = 0 \\ F(x,y,z) = 0 \end{array}\right\}$$

où P_1 et Q_1 sont premiers entr'eux et F ne divise pas Q_1.

(1.8) DÉFINITION.- *Les équations (*) et (**) sont* <u>*équivalentes*</u> *si F divise* $PQ_1 - QP_1$.

(1.9) LEMME.- *Si (*) et (**) sont équivalentes alors toute solution locale non-triviale de l'une est une solution locale de l'autre.*

Preuve. Supposons que F divise PQ_1-QP_1. Soit $x=\alpha(t)$, $y=\beta(t)$ une solution locale non-triviale de (*). Notons T l'image de l'ensemble

$$\{(x,y,z)\in \boldsymbol{C}^3 : F(x,y,z)=P(x,y,z)=Q(x,y,z)=0\}$$

par la projection $(x,y,z)\to(x,y)$ sur $\boldsymbol{C}^2$. Comme cet ensemble est de dimension ≤ 1, on a que le complementaire de T dans son adhérence Zariski dans $\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{C})^2$ est fini. Il en résulte que $(\alpha(t),\beta(t))\notin T$ pour tout $t\neq 0$ au voisinage de 0. De ceci et de la définition (1.1) on déduit que $x=\alpha(t)$, $y=\beta(t)$ est une solution locale de (**).[]

(1.10) EXEMPLE.- a) Prenons $F=z$, $P=y+z$, $Q=y$, $P_1=1$, $Q_1=1$. Alors F divise PQ_1-QP_1 et $y=0$ est une solution de (*) mais pas de (**).
b) Les équations

$$zdx-dy=0 \ , \ x+y+z^2=0 \quad \text{et} \quad zdx+dy=0 \ , \ x+y+z^2=0$$

ont les mêmes solutions mais elles ne sont pas équivalentes.

(1.11) PROPOSITION. *Soit* $D\subset \boldsymbol{C}$ *un disque ouvert de centre* 0 *et soient* $\alpha: D\to \boldsymbol{C}$, $\beta: D^*=D-\{0\}\to \boldsymbol{C}$ *holomorphes, avec* α *non-constante, où* 0 *est, au plus, un pôle de* β. *Supposons qu'il existe* $t_0\in D^*$ *tel que pour tout* $t\neq t_0$ *assez proche de* t_0, *les équations en* z

$$P(\alpha(t),\beta(t),z)\alpha'(t)-Q(\alpha(t),\beta(t),z)\beta'(t)=0, \ F(\alpha(t),\beta(t),z)z=0$$

ont une racine en commun. Alors $x=\alpha(t)$, $y=\beta(t)$ *est une solution locale de (*) en* $a=\alpha(0)$.

Preuve. Considérons les expressions

$$M(t,z)=P(\alpha(t),\beta(t),z)\alpha'(t)-Q(\alpha(t),\beta(t),z)\beta'(t),\ N(t,z)=F(\alpha(t),\beta(t),z)z,$$

avec $t\in D^*$, $z\in \boldsymbol{C}$. Ce sont des polynômes en z, analytiques en t avec N non-identiquement nul (parce que $F(x,y,z)$ est irréductible). Soit $S\subset D^*$ l'ensemble des zéros du coefficient du terme de plus haut degré en z dans N. Alors S est un sous-ensemble discret et fermé de D.

Soit $T\subset D^*\times \boldsymbol{C}$ le sous-ensemble analytique défini par

$$M(t,z)=0,\ N(t,z)=0.$$

Alors, si $p:D^*\times \boldsymbol{C}\to D^*$ est la projection canonique, sa restriction au sous-ensemble analytique $T\cap p^{-1}(D^*\neg S)$ est propre. Donc $p(T\cap p^{-1}(D^*\neg S))$ est un sous-ensemble analytique de $D^*\neg S$. Par hypothèse, cet ensemble contient un ouvert non-vide; d'où que $p(T)\supset D^*\neg S$, ce qui entraîne tout de suite l'assertion.[]

Dans la suite de ce chapitre on motrera qu'on peut réduire l'étude globale de (*) à celui d'un feuilletage d'une surface fibrée. Comme on verra, l'équation (*) est dans la classe de Fuchs si et seulement si le feuilletage est génériquement transverse aux fibres. On profitera du théorème de Jouanolou [6] pour prouver que (*) possède une infinité de solutions algébriques si et seulement si elle admet une intégrale première rationnelle. Dans (3.17) on corrige la condition nécessaire 4 de [2].

2.- L'équation polynomiale associée. On peut ramener (*) à une équation polynomiale en éliminant z des équations:

$$y'=\frac{P(x,y,z)}{Q(x,y,z)}\quad ,\qquad F(x,y,z)=0$$

Plus précisément, notons $T_0\subset \boldsymbol{C}^4$ l'ensemble algébrique de dimension pure 2 défini par les équations

$$P(x,y,z)-wQ(x,y,z)=0\ .\quad F(x,y,z)=0,$$

et $S_0\subset \boldsymbol{C}^3$ la surface irréductible définie par $F(x,y,z)=0$; désignons par U l'ensemble des points réguliers de S_0 . L'application

$$U-\{Q=0\}\to \boldsymbol{C}^4\quad ,\quad (x,y,z)\to (x,y,z,P(x,y,z)/Q(x,y,z))$$

est un plongement. Comme l'ensemble $\{Q(x,y,z)=F(x,y,z)=0\}$ est de dimension ≤ 1, l'image de ce plongement est un sous-ensemble dense de T_0. Alors, T_0 est irréductible.

On en déduit qu'il existe $G \in \boldsymbol{C}[x,y,w]$ irréductible tel que:

$$(x,y,z,w) \in T_0 \quad \text{implique} \quad G(x,y,w) = 0 .$$

Comme l'image de T_0 par la projection $(x,y,z,w) \to (x,y)$ est dense dans $\boldsymbol{C}^2$, G dépend effectivement de w. Cela montre aussi que G est determiné à multiplication par une constante non-nulle près.

(2.1) DÉFINITION.- *On dira que* $G(x,y,y')=0$ *est une* <u>*équation polynomiale associée*</u> *à (*).*

Si Y est un espace analytique et $p \in Y$ est un point régulier, $T_p(Y)$ dénote l'espace tangent de Y en p.

(2.2) PROPOSITION.- *a) Toute solution locale de (*) est une solution locale de* $G(x,y,y')=0$.
b) Il existe un ouvert de Zariski non-vide $W \subset \boldsymbol{C}^2$ *tel que toute solution de* $G(x,y,y')=0$ *par* $q \in W$ *est régulière et est une solution de (*).*
c) L'équation (*) est dans la classe de Fuchs si et seulement si $G(x,y,y')=0$ *est dans la classe de Fuchs.*

Preuve. (a) C'est une conséquence immédiate de la définition (1.1).
(b) Soit $R_0 \subset \boldsymbol{C}^3$ la surface d'équation $G(x,y,w)=0$. Il existe un sous-ensemble algébrique Z de R_0 tel que $\dim Z \leq 1$ et que si $(x,y,w) \in R_0 - Z$, alors il existe $z \in \boldsymbol{C}$ tel que $(x,y,z,w) \in T_0$. Soit Σ un sous-ensemble algébrique propre de $\boldsymbol{C}^2$ qui contient l'image de Z par la projection $(x,y,w) \to (x,y)$. Soit $W \subset \boldsymbol{C}^2 - \Sigma$ un ouvert de Zariski non-vide tel que toute solution de $G(x,y,y')=0$ par $q \in W$ est régulière (I(1.4)). Ce W satisfait les conditions voulues.[]
(c) Si $G(x,y,y')=0$ est dans la classe de Fuchs, alors (*) l'est aussi d'après (a).

Réciproquement, supposons que $G(x,y,y')=0$ n'est pas dans la classe de Fuchs; notons Y l'adhérence de $\boldsymbol{C}^2 - W$ dans $\boldsymbol{P}_1^2$ où W est l'ouvert de (b): est un sous-ensemble analytique de $\boldsymbol{P}_1^2$ de dimension (pas forcément pure) ≤ 1. Pour $a \in \boldsymbol{C}$ générique, si $p=(a,b)$ appartient à Y, $(b \in \boldsymbol{C} \cup \{\infty\})$, on peut supposer que $\dim_p Y = 1$, que p est point régulier de Y et que $T_p(Y)$ n'est pas verticale. Alors, si $x=\alpha(t)$, $y=\beta(t)$ est une solution ramifiée par p, on aura que $(\alpha(t), \beta(t)) \in W$ pour tout $t \neq 0$ assez proche de 0. D'après (b) et (1.11), $x=\alpha(t)$, $y=\beta(t)$ est une solution locale de (*). Alors (*) n'est pas dans la classe de Fuchs, d'où suit la preuve. []

(2.3) COROLLAIRE.- *a) Toute solution algébrique de (*) est une solution algébrique de* $G(x,y,y')=0$.
b) Il existe un nombre fini $C_1, C_2, \ldots, C_k$ *de courbes algébriques irréductibles dans* $\boldsymbol{C}^2$ *telles que si* C *est une solution algébrique de* $G(x,y,y')=0$ *avec* $C \neq C_j$, $j=1,2,\ldots,k$, *alors* C *est une solution algébrique de (*).*

Preuve. (a) Elle découle immédiatement de (2.2)a.
(b) Soient $C_1, C_2, \ldots, C_k$ les composantes irréductibles de $\boldsymbol{C}^2 - W$, où W est l'ouvert donné par (2.2)b. Soit $C \neq C_1, C_2, \ldots, C_k$ une solution algébrique de $G(x,y,y')=0$. Alors $C \cap (\boldsymbol{C}^2 - W)$ est un ensemble fini. Soit $x=\alpha(t)$, $y=\beta(t)$ une solution locale de $G(x,y,y')=0$ contenue dans C. Alors, $(\alpha(t),\beta(t)) \in W$ si $t \neq 0$. De ceci et de (2.2)b il résulte que $x=\alpha(t)$, $y=\beta(t)$ est une solution locale de(*) (voir (1.11)).[]

(2.4) EXEMPLE.- On considère l'équation

$$\left\{\begin{matrix} dx - zdy = 0 \\ yz^2 - x = 0 \end{matrix}\right\}.$$

L'équation associée est donc

$$(y')^2 x - y = 0.$$

Alors $y=0$ est une solution algébrique de celle-ci qui n'est pas solution de l'équation donnée.

(2.5) COROLLAIRE.- *Soit* $R \in \boldsymbol{C}[x,y,\lambda]$. *Alors* R *est une intégrale première de (*) si et seulement si* R *est une intégrale première de* $G(x,y,y')=0$.

*Preuve.*Il découle de la définition (1.5), de I(5.15) et de (2.3).[]

Ce qui précéde permet d'appliquer les résultats du chapitre I à l'équation (*). En particulier on a la proposition suivante.

(2.6) PROPOSITION.- *Soit* $R \in \boldsymbol{C}[x,y,\lambda]$ *irréductible et qui dépend effectivement de* y *et de* λ. *Supposons qu'il existe un ouvert non-vide* U *de* $\boldsymbol{C}^2$ *tel que si* $y=y(x)$ *est une solution régulière de (*) par* $q \in U$, *il existe* $\lambda_0 \in \boldsymbol{C}$ *tel que* $R(x,y(x),\lambda_0)=0$. *Alors,* R *est une intégrale première.*

Preuve. Cela résulte de I(5.7), (2.2) et (2.5).[]

Pour la réciproque de (2.6) voir (3.18).

3.- Construction du feuilletage. Il est bien connu, quoique un résultat profond et difficile à démontrer, que si Z est une variété algébrique projective avec ensemble de singularités Σ, il existe une variété projective lisse Z^0 et une application analytique birrationnelle $\pi : Z^0 \to Z$ qui induit, par restriction, un isomorphisme

$$\pi : Z^0 - \pi^{-1}(\Sigma) \to Z - \Sigma.$$

Ce résultat a été démontré par Hironaka en 1963 et la variété Z^0 s'appèle *une désingularisation* de Z. Dans le cas où la variété est une surface, c'est-à-dire de dimension 2, on peut faire une démonstration différente à celle d'Hironaka et plus élémentaire : voir [12,chap.III, § 6]. Le cas où Z est une courbe est classique et se trouve dans plusieurs livres de geométrie algébrique ; pour une preuve assez constructive on peut regarder [12, chap.2, § 7] où on traite le cas (qui nous suffit pour les applications qu'on en fera) d'une courbe contenue dans une surface lisse; une preuve très directe mais intrinsèque consiste à prendre la normalisation de la courbe (indépendemment du fait d'être plongée dans une surface lisse). Finalement, il faut dire que la désingularisation n'est pas unique (à isomorphisme près) en général pour des variétés de dimension plus grande ou égal à 2 ; en revanche, il n'y a qu'une désingularisation, à isomorphisme près, pour chaque courbe algébrique : celle-ci est appelée des fois *le modèle lisse* de la courbe.

On appelera *surface fibrée* une surface analytique complexe compacte, connexe, non-singulière X munie d'une application holomorphe surjective $h: X \to B$ où B est une surface de Riemann.

Si $b \in B$ est une valeur réguliére de h on dira que $h^{-1}(b)$ est une *fibre régulière*.

Si C est une courbe algébrique irréductible (affine ou projective) on appelera *genre* de C le genre de la désingularisation projective de C.

On identifiera toujours la droite projective complexe $\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{C})$ avec $\boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$. Alors,

$$\boldsymbol{C}^k \subset \boldsymbol{P}_1 \times \overset{k}{\ldots} \ldots \times \boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_1^{\,k} \ .$$

(3.1) DÉFINITION.- *Le germe de sous-ensemble analytique de* $\boldsymbol{P}_1^{\,2}$ *au point* $q \in \boldsymbol{P}_1^{\,2}$ *défini par l'image (ou graphe) d'une solution par* q *de (*) sera appelé le support de cette solution.*

Si Σ est le support d'une solution par $q=(a,b)$, alors l'application locale

$$(\Sigma, q) \to (\boldsymbol{C}, a) \quad , \quad (x,y) \to x$$

est finie. D'après les définitions on a le résultat suivant.

(3.2) LEMME.- *Le degré de cette application est plus grand que* 1 *si et seulement si la solution est ramifiée.*

Soit $S_0 \subset \boldsymbol{C}^3$ la surface algébrique irréductible d'équation $F(x,y,z) = 0$. Soit S l'adhérence de S_0 dans $\boldsymbol{P}_1^{\,3}$. C'est une surface projective et irréductible.

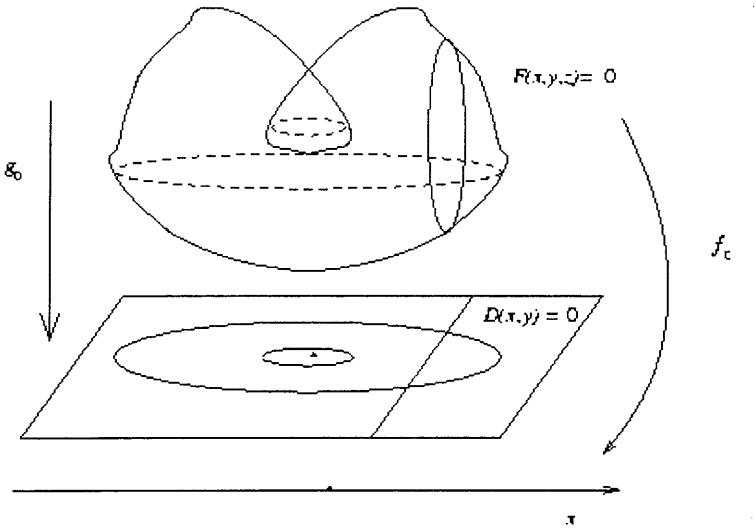

Figura II.1

Soit $\pi : X \to S$ une désingularisation de S. Considérons les applications

$f_0 : S_0 \to \boldsymbol{C}$, $f_0(x,y,z)=x$ et $g_0 : S_0 \to \boldsymbol{C}^2$, $g_0(x,y,z)=(x,y)$.

Alors f_0, g_0 se prolongent à des applications holomorphes $f : S \to \boldsymbol{P}_1$ et $g : S \to \boldsymbol{P}_1^2$ respectivement ; posons $f' = f \circ \pi$, $g' = g \circ \pi$.

On sait que f' se factorise à travers un revêtement ramifié $\varphi : B \to \boldsymbol{P}_1$ et définit une surface fibrée $h : X \to B$ dont les fibres sont *connexes* ([21, chap. III, §11, cor. 11.5]).

Considérons, finalement, les ouverts de Zariski non-vides:

$$V = g_0^{-1}(\boldsymbol{C}^2 - \Delta) \quad , \qquad U = \pi^{-1}(V) .$$

On a le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{C}^2 \arrow[r, hook] & \boldsymbol{P}_1^2 & & \\
V \arrow[r, hook] & S_0 \arrow[u, "g_0"] \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_0"'] & S \arrow[u, "g"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[l, "\pi"'] \arrow[ul, "g'"'] \arrow[dl, "f'"] \arrow[d, "h"] & U \arrow[l, hook'] \\
 & \boldsymbol{C} \arrow[r, hook] & \boldsymbol{P}_1 & B \arrow[l, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

Considérons la 1-forme holomorphe sur $\boldsymbol{C}^3$ définie par

$$\omega = P(x,y,z)dx - Q(x,y,z)dy,$$

où P,Q sont les polynômes de la définition (*).

(3.3) LEMME.- *a)* $\pi | U : U \to V$ *est un isomorphisme.*
b) $\omega | V$ *est holomorphe et jamais nulle.*

Preuve. Par définition de Δ, F_z ne s'annulle jamais sur V. Alors, les points de V sont non-singuliers dans S, ce qui prouve (a).

D'autre part, $\omega | V$ est holomorphe. Si $a \in V$, on peut prendre x,y comme coordonnées locales dans V au voisinage de p. Puisque $Q(p) \neq 0$, il en suit

$$(\omega | V)(p) \neq 0. \qquad []$$

(3.4) LEMME.- *Pour* $a \in \boldsymbol{C}$ *générique,* $\pi : f'^{-1}(a) \to C_a$ *est une application birationnelle où* $C_a \subset \boldsymbol{C}^2$ *est la courbe définie par* $F(a,y,z) = 0$.

Preuve. $S - S_0$ est composé d'un nombre fini de courbes irréductibles. On peut supposer qu'aucune de ces courbes n'est contenue dans $f^{-1}(a)$. Alors, $f^{-1}(a)$ est l'adhérence de $f_0{}^{-1}(a)$.

D'autre part, on peut supposer que $f'^{-1}(a)$ ne contient aucune composante irréductible de $X-U$. Cela implique que $\pi : f'^{-1}(a) \to f^{-1}(a)$ est un morphisme birationnel par (3.1)a.[]

(3.5) PROPOSITION.- *Pour* $a \in \boldsymbol{C}$ *générique le genre de chaque composante irréductible de la courbe* $F(a,y,z) = 0$ *est égal au genre de la fibre générique de* h. *En particulier, toutes ces composantes ont le même genre* g *qui ne dépend pas de* a.

Preuve. En effet, par (3.4) les désingularisées projectives de ces composantes sont des fibres génériques de h.[]

(3.6) DÉFINITION.- *L'entier* $g \geq 0$ *est appélé le genre de l'équation (*).*

(3.7) EXEMPLE.- Revenons à l'équation binomiale I(4.16). Dans les cas A) B) e C) on voit tout de suite que les composantes irréductibles de la courbe $F(a,y,z)=0$ sont toutes rationnelles, pour $a \in \boldsymbol{C}$ générique. Donc, le genre de ces équations est 0. Dans les cas D) et E) on a encore genre 0 par la formule de Hurwitz. Cette même formule nous permet de montrer qu'on a genre 1 dans les cas restants.

Considérons $\omega = P(x,y,z)dx - Q(x,y,z)dy$ comme 1-forme méromorphe sur $\boldsymbol{P}_1{}^3$. Alors $\pi^*(\omega)$ est 1-forme méromorphe non-nulle sur X. L'équation de Pfaff $\pi^*(\omega)=0$ définit un feuilletage analytique de X à singularités isolées (voir

annexe §3); il est différent du feuilletage défini par la fibration h. On note $\mathcal{F}(P,Q)$ ce feuilletage associé à l'équation (*).

Si W est un espace analytique irréductible, on note $\boldsymbol{C}(W)$ le corps des fonctions méromorphes sur W.

(3.8) THÉORÈME.- *On a les assertions suivantes.*
(a) Tout feuilletage analytique à singularités isolées sur X, différent de celui défini par h, est de la forme $\mathcal{F}(P,Q)$ pour P, $Q\in\boldsymbol{C}[x,y,z]$.
(b) Les équations (*) et (**) définissent le même feuilletage sur X si et seulement si elles sont équivalentes.

Preuve. (a) Comme X est une variété algébrique, tout feuilletage de X est défini par une équation de Pfaff $\alpha = 0$, où α est une 1-forme méromorphe non-nulle sur X (voir annexe §3).

Soient ξ , $\eta\in\boldsymbol{C}(X)$ les fonctions obtenues par composition de g' avec les projections canoniques de $\boldsymbol{P}_1^2$ sur le premier et le deuxième facteur respectivement. Comme g' est dominante, ξ et η sont algébriquement indépendantes. Alors,

$$\alpha = u d\xi - v d\eta\,, \quad u,v\in\boldsymbol{C}(X).$$

Puisque π est birationnelle, il existe $A,B,C\in\boldsymbol{C}[x,y,z]$ tels que F ne divise pas C et

$$u=\left(\frac{A(x,y,z)}{C(x,y,z)}\right)\circ\pi, \qquad v=\left(\frac{B(x,y,z)}{C(x,y,z)}\right)\circ\pi.$$

En plus, comme $\alpha\neq 0$, F ne divise pas A ou B.

Soit $R=pgcd(A,B)$. Posons

$$P(x,y,z)=\frac{A(x,y,z)}{R(x,y,z)}, \qquad Q(x,y,z)=\frac{B(x,y,z)}{R(x,y,z)}.$$

Considérons la 1-forme rationnelle sur $\boldsymbol{P}_1^3$ définie par

$$\omega = P(x,y,z)dx - Q(x,y,z)dy,$$

On voit que

$$\pi^*(\omega)\wedge\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \pi^*(\omega)\neq 0\,.$$

Donc, $\alpha=0$ et $\pi^*(\omega)=0$ définissent le même feuilletage analytique de X à singularités isolées (voir annexe §3) ; en plus F ne divise pas Q, car ce feuilletage est différent de celui défini par h. Pour ces polynômes P,Q le feuilletage $\mathcal{F}(P,Q)$ défini par (*) est identique à celui défini par $\alpha=0$.

(b) Il suit de la définition (1.8) et (à nouveau) du fait que deux équations de Pfaff $\alpha=0, \beta=0$ définissent le même feuilletage à singularités isolées si et seulement si $\alpha \wedge \beta=0$.[]

(3.9) DÉFINITION.- *Un germe Λ d'ensemble analytique irréductible de dimension* 1 *en $p \in X$ est une séparatrice locale de $F(P,Q)$ en p si $\Lambda - \{p\}$ est contenu dans une feuille de $F(P,Q)$.*

(3.10) LEMME.- *Soit Λ une séparatrice locale de $F(P,Q)$ en $p \in X$. Supposons que:*
i) $f'(p) = a \in \boldsymbol{C}$; ii) $f'|\Lambda$ n'est pas constante ; iii) $\Lambda - \{p\} \subset U$.
Alors $g'(\Lambda)$ est le support d'une solution locale en a de (*) et cette solution est ramifiée si et seulement si le degré de l'application locale f': $(\Lambda,p) \to (\boldsymbol{C},a)$ est plus grand que 1 .

Preuve. Le germe $\pi(\Lambda)$ admet une paramétrisation:

$$x = \alpha(t) \ , \ y = \beta(t) \ , \ z = \gamma(t)$$

où α est holomorphe non-constante et β, γ méromorphes au voisinage de $0 \in \boldsymbol{C}$, $\alpha(0)=a$ et:

$$F(\alpha(t),\beta(t),\gamma(t)) = 0 \quad \text{si} \quad t \neq 0 .$$

Par (3.1), $\pi^*(\omega)|U$ est holomorphe est jamais nulle. Alors, par hypothèse:

$$\pi^*(\omega)|(\Lambda - \{p\}) = 0 .$$

Donc, $$\omega\,|(\pi(\Lambda) - \{\pi(p)\}) = 0 .$$

Il en résulte: $-P(\alpha(t),\beta(t),\gamma(t))\alpha'(t) - Q(\alpha(t),\beta(t),\gamma(t))\beta'(t) = 0 \quad$ si $t \neq 0$.
On en déduit tout de suite que $x=\alpha(t)$, $y=\beta(t)$ est une solution locale en a dont le support est $g(\pi(\Lambda))=g'(\Lambda)$.

La dernière affirmation découle de (3.2) et (2.2)a et du fait que:

$$g_0|V : V \to \boldsymbol{C}^2$$

est un isomorphisme local.

(3.11) LEMME.- *Soit Σ le support d'une solution locale par $q \in \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{P}_1$ de (*). Supposons que $\Sigma - \{q\} \subset \boldsymbol{C}^2 - \Delta$. Alors il existe un point $p \in X$ et une séparatrice locale Λ de $F(P,Q)$ en p tels que $g'(p) = q$ et $g'(\Lambda) = \Sigma$.*

Preuve. Soit $x=\alpha(t)$, $y=\beta(t)$ la solution dont Σ est le support. D'après (1.3) on peut supposer qu'il existe $z=\gamma(t)$ telle que

$$t \to (\alpha(t),\beta(t),\gamma(t))$$

est un germe L de courbe analytique irréductible en $p'=(\alpha(0),\beta(0),\gamma(0)) \in S$ avec

$$L - \{p'\} \subset V \quad \text{et} \quad \omega\,|(L - \{p'\}) = 0 .$$

D'après (3.1)a:

$$\pi^{-1}(L - \{p'\}) = \Lambda - \{p\}$$

où Λ est un germe de courbe analytique irréductible en $p \in X$ avec $\pi(p)=p'$ ([9] chap. K thm.7). Alors,

$$\omega|(L-\{p'\})=0 \quad \text{implique} \quad \pi*(\omega)|(\Lambda-\{p\})=0 .$$

D'après (3.1), cela entraîne que Λ est une séparatrice locale de $F(P,Q)$.[]

(3.12) LEMME.- *Soit $C_0 \not\subset \Delta$ une solution algébrique de (*). Alors, il existe une courbe algébrique projective $E \subset X$ invariante par $F(P,Q)$ telle que $g'(E)$ est l'adhérence C de C_0 dans $\boldsymbol{P}_1^2$.*

Preuve. $g'^{-1}(C) \subset X$ est une courbe algébrique projective. D'après (3.11) cette courbe contient une composante irréductible E invariante par $F(P,Q)$ telle que $g'|E$ n'est pas constante (voir annexe (4.3)).[]

(3.13) DÉFINITION.- *Un feuilletage analytique à singularité isolées F de X est <u>de Riccati relativement à</u> h si F est transverse à une fibre régulière de h (comparer avec [8] §4).*

(3.14) PROPOSITION.- *Si F est de Riccati, il existe un ensemble fini $E \subset B$ tel que:*

a) pour tout $b \in B-E$, $h^{-1}(b)$ est une fibre régulière transverse à F;

b) les fibres qui ne sont pas transverses à F contiennent des composantes irréductibles invariantes par F.

Preuve. En effet, si F est de Riccati, le support du diviseur de tangence entre F et la fibration h est contenu dans un nombre fini de fibres de h ([8] §1 et annexe §5).[]

(3.15) THÉORÈME.- *L'équation (*) est dans la classe de Fuchs (I(4.2)) si et seulement si $F(P,Q)$ est de Riccati.*

Preuve. Supposons que $F(P,Q)$ n'est pas de Riccati. Pour $s \in B$ générique on peut supposer que :

i) $X_s = h^{-1}(s)$ est une fibre régulière et $a=\varphi(s) \in \boldsymbol{C}$;

ii) X_s n'est pas invariant par $F(P,Q)$ et ne contient pas de point singulier de $F(P,Q)$;

iii) X_s n'est pas contenue dans la courbe $T = X - U$;

iv) chaque point de $X_s \cap T$ est non-singulier dans T ;

v) $d(h|T)(u) \neq 0$ pour tout $u \in X_s \cap T$.

Il existe $p \in X_s$ tel que le germe Λ de courbe analytique irréductible en p invariant par $F(P,Q)$ est tangent à X_s et $\Lambda \not\subset X_s$. De plus Λ n'est pas contenu dans T, car autrement il serait transverse à X_s. Alors, $\Lambda-\{p\} \subset U$. D'après (3.10) il existe une solution locale en a ramifiée.

Donc, l'équation n'est pas dans la classe de Fuchs.

Supposons que l'équation n'est pas dans la classe de Fuchs. Soit Γ l'adhérence de Δ dans $\boldsymbol{P}_1^2$. Pour $a \in \boldsymbol{C}$ générique et $b \in \boldsymbol{P}_1$, ou bien $q=(a,b) \notin \Gamma$ ou bien l'équation locale de Γ au voisinage de q est de la forme $y=\eta(x)$ où $\eta(x)$ est méromorphe au voisinage de a.

Soit Σ le support d'une solution locale par q ramifiée. Alors,

$$\Sigma - \{q\} \subset \boldsymbol{C}^2 - \Delta .$$

Par (3.11) et (3.10) il existe une séparatrice locale Λ de $F(P,Q)$ en $p \in X$ telle que $f'(p)=a$ et f': $(\Lambda,p) \to (\boldsymbol{C},a)$ est finie et de degré >1 . Alors $F(P,Q)$ n'est pas transverse à la fibre de h par p . Donc, $F(P,Q)$ n'est pas de Riccati.[]

(3.16) EXEMPLE.- Supposons qu'il existe des fonctions rationnelles

$$y = A(x,t) \quad , \quad z = B(x,t)$$

telles que, pour $a \in \boldsymbol{C}$ générique,

$$y = A(a,t) \quad , \quad z = B(a,t)$$

est une paramétrisation de la courbe $F(a,y,z)=0$ (tout point générique de la courbe correspond à une seule valeur du paramètre).

Par ce changement de variable dépendante l'équation (*) se transforme en une équation explicite de la forme

$$(***) \qquad \frac{dt}{dx} = H(x,t).$$

Si l'on suppose, en plus, que (*) *est dans la classe de Fuchs, alors* (***) *est une équation de Riccati; c'est- à-dire*

$$H(x,t) = a(x)t^2 + b(x)t + c(x)$$

où a,b,c sont des fonctions rationnelles.

En effet, soit p_1: $\boldsymbol{P}_1^2 \to \boldsymbol{P}_1$ la projection sur le premier facteur. Alors,

$$x = x \quad , \quad y = A(x,t) \quad , \quad z = B(x,t)$$

définit une application birationnelle $\theta : \boldsymbol{P}_1^2 \to S$ telle que $f \circ \theta = p_1$.

Dans cet exemple, $F(a,y,z)=0$ est une courbe irréductible de genre 0 pour $a \in \boldsymbol{C}$ générique ; alors, dans les notations du début du ce paragaraphe, $B=\boldsymbol{P}_1$, $\varphi = \mathrm{Id.}$, $f'=h$ et les fibres régulières de h sont isomorphes à $\boldsymbol{P}_1$. On en déduit que $\mu=\pi^{-1} \circ \theta$ est une application birationnelle $\boldsymbol{P}_1^2 \to X$ telle que $h \circ \mu = p_1$.

L'équation (***) définit un feuilletage de $\boldsymbol{P}_1^2$ qui se correspond avec $F(P,Q)$ par μ . D'après (3.15) $F(P,Q)$ est de Riccati. Comme les courbes qui se contractent par μ ne peuvent être que des composantes des fibres de p_1 , on voit que ce feuilletage de $\boldsymbol{P}_1^2$ est de Riccati relativement à p_1 dans le sens de (3.13). Cela implique que l'équation (***) est de Riccati ([10, thm. 3.3.3]).

Par exemple, pour obtenir l'intégrale première de l'exemple I(5.4) on fait le changement:

$$y = A(x,t) = -\frac{t}{x^2t^2 - 2xt + 1} \quad , \quad z = B(x,t) = -\frac{t^2}{x^2t^2 - 2xt + 1}$$

et on intègre l'équation

$$\frac{dt}{dx} = -t^2$$

ainsi obtenue.

(3.17) OBSERVATION.- Supposons que l'équation $F(x,y,y')=0$ est dans la classe de Fuchs. Soit $p=(a,b,c)$ un point non-singulier de S. Comme π^{-1} est un isomorphisme au voisinage de p qui commute avec f, f', on a que $(dx|S)(p)\neq 0$ pour a générique. Par la même raison et d'après (3.13), (3.14) et (3.15), si $(\omega|S)(p)\neq 0$ alors $(dx|S)(p)\wedge(\omega|S)(p)\neq 0$ pour a générique. Donc,

$$(dx\wedge\omega\wedge dF)(p) = 0 \quad \text{implique} \quad (\omega\wedge dF)(p) = 0\ ;$$

c'est à dire,

$$F_z(a,b,c)= 0 \quad \text{implique} \quad cF_y(a,b,c) + F_x(a,b,c) = 0$$

pour a générique.

Il est clair que si p est un point singulier de S alors

$$cF_y(a,b,c) + F_x(a,b,c) = 0\ .$$

En conclusion,

$$F(a,b,c) = F_z(a,b,c) = 0 \quad \text{implique } cF_y(a,b,c) + F_x(a,b,c) = 0$$

pour a générique, car $\omega=zdx-dy$ dans ce cas-ci. De ceci et de la Nullstellensatz on déduit qu'il existe $m\in\boldsymbol{N}$ tel que

$$(zF_y(x,y,z) + F_x(x,y,z))^m = A(x,y,z)F(x,y,z) + B(x,y,z)F_z(x,y,z)$$

où A, B sont des polynômes en y,z à coefficients fonctions rationnelles de x. Cela remplace la condition nécessaire 4 de [2] qui est fausse comme le montre l'équation $(y')^3 - xy^2 = 0$.

À continuation on donnera quelques applications aux intégrales premières et aux solutions algébriques.

(3.18) PROPOSITION.- *Soit $R(x,y,\lambda)$ une intégrale première rationnelle de (*). Alors, il existe un ouvert de Zariski non-vide W de $\boldsymbol{C}^2$ tel que:*

a) toute solution par $q\in W$ est régulière et

b) si $y=y(x)$ est une solution par $q\in W$, il existe $\lambda_0\in\boldsymbol{C}$ tel que $R(x,y(x),\lambda_0)=0$.

Preuve. En considérant l'équation polynomiale associée (2.1) on voit qu'il suffit de considérer le cas de l'équation $F(x,y,y')=0$ (voir (2.2) et (2.5)). Soit $W\subset\boldsymbol{C}^2$ l'ouvert de Zariski défini par:

$$c_0(x,y)D(x,y) \neq 0\ .$$

Soient S_0 et g_0: $S_0\to\boldsymbol{C}^2$ définis comme au début de ce paragraphe et soit $V_1=g_0^{-1}(W)$. Alors g_0: $V_1\to W$ est un revêtement fini connexe non-ramifié.

Notons $T\subset\boldsymbol{C}^3$ la surface définie par $R(x,y,\lambda)=0$ et h: $T\to\boldsymbol{C}^2$, l'application définie par $h(x,y,\lambda)=(x,y)$. En prenant W éventuellement plus petit on peut supposer d'une part que h: $V_2\to W$ est aussi un revêtement fini connexe non-ramifié, où $V_2=h^{-1}(W)$; d'autre part que R_y ne s'annulle jamais sur V_2.

Soit

$$\varphi : V_2 \to \boldsymbol{C}^3 \quad \text{définie par} \quad \varphi(x,y,\lambda) = (x,y,-R_x(x,y,\lambda)/R_y(x,y,\lambda))\ .$$

Par I(5.5), $\varphi(V_2)\subset S_0$ *. Alors, comme* $g_0\circ\varphi = h$ *, on a que* $\varphi(V_2)\subset V_1$ *et que* $\varphi: V_2\to V_1$ *est un isomorphisme local, propre et ouvert; en particulier, il est surjectif.*

Soit $q\in W$. L'affirmation (a) découle de I(1.4).

Soit $y=y(x)$ une solution régulière par q . Si $q=(a,b)$ et $c=y'(a)$ on a:

$$(a,b,c)\in V_1 .$$

De ce qui précède il résulte qu'il existe $\lambda(x)$ holomorphe au voisinage de a telle que:

$$(x,y(x),\lambda(x))\in V_2 \quad \text{et} \quad \varphi(x,y(x),\lambda(x)) = (x,y(x),y'(x)) .$$

Alors,

$$R(x,y(x),\lambda(x)) = 0 \quad \text{et} \quad y'(x) = -\frac{R_x(x,y(x),\lambda(x))}{R_y(x,y(x),\lambda(x))}.$$

En dérivant la première égalité et en utilisant la deuxième on obtient:

$$R_\lambda(x,y(x),\lambda(x))\lambda'(x) = 0 .$$

Comme h est un isomorphisme local, R_λ ne s'annulle jamais sur V_2 . Alors $\lambda'(x)=0$. Donc, $\lambda(x)=\text{cte.}=\lambda_0\in \boldsymbol{C}$.[]

(3.19) THÉORÈME.- *Il existe une infinité de solutions algébriques si et seulement s'il existe une intégrale première rationnelle.*

Preuve. Si $R(x,y,\lambda)$ est une intégrale première alors, pour $\lambda_0\in\boldsymbol{C}$ générique, $R(x,y,\lambda_0)=0$ définit une courbe algébrique dont les composantes irréductibles sont des solutions algébriques.

Réciproquement, supposons qu'il existe une infinité de solutions algébriques. Il en résulte, d'après (3.12), qu'il existe une infinité de courbes algébriques irréductibles invariantes par $F(P,Q)$. Par [6], $F(P,Q)$ admet une intégrale première rationnelle. La preuve de (3.19) suit, alors, du lemme suivant.[]

(3.20) LEMME.- *Si le feuilletage* $F(P,Q)$ *possède une intégrale première rationnelle, alors il existe une intégrale première rationnelle de l'équation (*).*

Preuve. Soit Θ une intégrale première rationnelle de $F(P,Q)$. Posons $\Gamma=\Theta\circ\pi^{-1}$ C'est une fonction rationnelle non constante sur S_0 on peut représenter Γ par un quotient

$$\frac{A(x,y,z)}{B(x,y,z)} \qquad A,B\in C[x,y,z]$$

où A,B sont premiers entre eux et F ne divise pas B . Le sous-ensemble algébrique de $\boldsymbol{C}^3$ défini par:

$$F(x,y,z) = B(x,y,z) = 0$$

est de dimension ≤ 1 . Alors, il existe $L(x,y)\in\boldsymbol{C}[x,y]$ non-nul qui s'annulle sur cet ensemble. Notons:

$$W = \{(x,y,z)\in S_0 : c_0(x,y)L(x,y)\neq 0 \text{ et } (x,y)\notin\Delta\};$$

l'ensemble W est une variété analytique complexe non-vide de dimension 2, connexe.

Par ailleurs, notons $Y \subset \boldsymbol{C}^4$ l'ensemble algébrique de dimension pure 2 défini par:

$$A(x,y,z) - \lambda B(x,y,z) = F(x,y,z) = 0 .$$

Considérons maintenant l'application analytique $\varphi : W \to \boldsymbol{C}^4$ définie par:

$$\varphi(x,y,z) = (x,y,z,\frac{A(x,y,z)}{B(x,y,z)})$$

Par le critère jacobien on a que $\varphi(W) \subset Y - \mathrm{Sing} Y$. Comme W est connexe, $\varphi(W)$ est contenu dans une composante irréductible Y' de Y . Puisque $\dim Y' = 2$, il existe $R(x,y,\lambda) \in \boldsymbol{C}[x,y,\lambda]$ irréductible qui s'annulle sur Y' . C'est-à-dire,

$$R(x,y,\frac{A(x,y,z)}{B(x,y,z)}) = 0 \qquad \text{si} \qquad (x,y,z) \in W.$$

Il est évident que R dépend effectivement de λ et de x ou y , puisque Γ n'est pas constante.

Soient $a,b \in \boldsymbol{C}$ tels que:

$$c_0(a,b)L(a,b) \neq 0 \quad \text{et} \quad (x,y) \notin \Delta .$$

Soit $x=\alpha(t)$, $y=\beta(t)$ une solution de (*) par (a,b) . Par le lemme (1.3) on peut supposer qu'il existe $z=\gamma(t)$ méromorphe au voisinage de $0 \in \boldsymbol{C}$ telle que

$$P(\alpha(t),\beta(t),\gamma(t))\alpha'(t) - Q(\alpha(t),\beta(t),\gamma(t))\beta'(t) = F(\alpha(t),\beta(t),\gamma(t)) = 0 .$$

Comme $c_0(a,b) \neq 0$, $\gamma(0) \in \boldsymbol{C}$. Il en résulte que le germe de courbe:

$$t \to (\alpha(t),\beta(t),\gamma(t))$$

est contenu dans W et satisfait à l'équation $\omega=0$. En plus, comme W est non-singulière, la restriction de π à $\pi^{-1}(W)$ est un isomorphisme sur W (voit diagramme du début de ce paragraphe). Alors, d'après (3.3)b, la courbe

$$t \to \pi^{-1}(\alpha(t),\beta(t),\gamma(t)),$$

est invariante par $F(P,Q)$, car $W \subset V$; elle est contenue dans l'ouvert où Θ est holomorphe, d'après la définition de W. Donc,

$$\Theta(\pi^{-1}(\alpha(t),\beta(t),\gamma(t))) = \text{constante},$$

d'où suit qu'il existe $\lambda_0 \in \boldsymbol{C}$ tel que

$$\frac{A(\alpha(t),\beta(t),\gamma(t))}{B(\alpha(t),\beta(t),\gamma(t))}=\lambda_0$$

On en déduit que

$$0=R(\alpha(t),\beta(t),\frac{A(\alpha(t),\beta(t),\gamma(t))}{B(\alpha(t),\beta(t),\gamma(t))})=R(\alpha(t),\beta(t),\lambda_0)$$

Il en résulte que R dépend effectivement de y et, par (2.6), que R est une intégrale première de (*).[]

(3.21) COROLLAIRE.- *Si* $C_1, C_2, C_3, \ldots$ *est une suite de solutions algébriques de (*) toutes différentes, alors le genre de* C_n *ne dépend pas de* n *pour tout* n *assez grand.*

Preuve. Par (3.19), il existe une intégrale première rationnelle $R(x,y,\lambda)$ de (*).

Soit W l'ouvert de la proposition (3.18). Alors, $C_n \cap W$ n'est pas vide si n est assez grand. Supposons que $y=y_n(x)$ soit l'equation locale de C_n au voisinage d'un point $q \in C_n \cap W$. Alors, il existe $\lambda_n \in \boldsymbol{C}$ tel que $R(x,y_n(x),\lambda_n)=0$. Alors C_n est une composante irréductible de la courbe D_n définie par $R(x,y,\lambda_n)=0$. Comme les C_j sont toutes différentes, on peut supposer que, pour n assez grand, λ_n est générique dans le sens de (3.5) appliqué à R. Alors, les composantes irréductibles de D_n ont toutes le même genre qui ne dépend pas de n.[]

(3.22) EXEMPLE.- $(y')^2 - 2yy' + y^2 - y = 0$. On vérifie, par I(4.10), I(4.12) et I(2.6), que l'équation est dans la classe de Fuchs. Son genre est 0. Suivant (3.16) on prend

$$y=\frac{1}{(t-1)^2} \quad , \quad z=\frac{t}{(t-1)^2}$$

et on trouve l'équation de Riccati

$$-2\frac{dt}{dx}=t^2-t.$$

On la résout par le changement de variable $u=1/t$ et on obtient finalement la solution générale:

$$y=\frac{(1+ce^{-x/2})^2}{c^2e^{-x}} \quad , \quad y=0 \quad , \quad y=1$$

On voit tout de suite que cette équation n'admet pas d'intégrale première rationnelle; elle possède pourtant la solution algébrique $y=1$, qui n'est pas contenue dans Δ.

4. **Solutions méromorphes**. Considérons l'équation de Riccati

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x),$$

avec $p,q,r \in \boldsymbol{C}(x)$ (comparer avec I(4.15)).

Notons $S \subset \boldsymbol{C}$ l'ensemble des poles de p,q et r. Soient $a \in \boldsymbol{C} - S$ et $y=y(x)$ une solution locale uniforme de cette équation en a. Soit U un ouvert simplement connexe tel que $a \in U \subset \boldsymbol{C} - S$. L'une des propriétés remarquables des équations de Riccati (voir [10, § 3.2 et § 3.3]) nous dit que $y=y(x)$ se prolonge à une solution méromorphe dans U tout entier. Dans ce paragraphe nous généralisons cette propriété aux équations différentielles (*) qui sont dans la classe de Fuchs.

(4.1) DÉFINITION. *Soit $f \in \boldsymbol{C}(U)$ avec $U \subset \boldsymbol{C}$ un ouvert connexe. Alors $y=f(x)$ est une* <u>*solution méromorphe*</u> *de (*) dans U si elle détermine une solution uniforme locale de (*) en chaque point $a \in U$. Dans le cas où f est holomorphe on dira que la solution est* <u>*holomorphe*</u>.

(4.2) LEMME. *Soit $f \in \boldsymbol{C}(U)$ avec $U \subset \boldsymbol{C}$ un ouvert connexe. Alors $y=f(x)$ est une solution méromorphe de (*) dans U si et seulement s'il existe un sous-ensemble discret S de U, contenant les pôles de f, tel que pour tout $x \in U - S$ les équations en z suivantes:*

$$P(x,f(x),z) - Q(x,f(x),z)f'(x) = 0\,, \quad F(x,f(x),z)=0,$$

ont une racine en commun.

Preuve. Il résulte immédiatement des définitions du §1. [ ]

(4.3) EXEMPLE. La fonction $f(x)=x/2$ est une solution holomorphe dans $\boldsymbol{C}$ de l'équation

$$dx - xzdy = 0\,, \qquad (y-x)z+1 = 0$$

avec $S=\{0\}$ non-vide.

(4.4) PROPOSITION. *Soit $f \in \boldsymbol{C}(U)$ avec $U \subset \boldsymbol{C}$ un ouvert connexe. Supposons qu'il existe $a \in U$ tel que $y=f(x)$ détermine une solution locale uniforme de (*) en a. Alors $y=f(x)$ est une solution méromorphe de (*) dans U.*

Preuve. Considérons le sous-ensemble algébrique S de $\boldsymbol{C}^5$ défini par

$$P(x,y,z)u-Q(x,y,z)v=F(x,y,z)=0\ ;$$

notons $T\subset \boldsymbol{C}^4$ l'image de S par la projection $(x,y,z,u,v)\to(x,y,u,v)$.

Par ailleurs, considérons l'application analytique injective $\phi: U\to \boldsymbol{P}_1{}^4$ définie par

$$\phi(x) = (x,f(x),1,f'(x)).$$

D'après le lemme (4.2), il suffit de démontrer que $U-\phi^{-1}(T)$ est un sous-ensemble discret et fermé de U.

Puisque T est un sous-ensemble constructible de $\boldsymbol{P}_1{}^4$ ([17, thm. 3.16]), l'un des sous-ensembles $U-\phi^{-1}(T)$ ou $\phi^{-1}(T)$ doit être discret et fermé dans U. Or, par hypothèse, il existe un voisinage $V_a\subset U$ de a tel que $\phi(V_a-\{a\})\subset T$, et donc $\phi^{-1}(T)$ n'est pas discret, d'où l'assertion. []

(4.5) THÉORÈME. *Supposons que l'équation (*) est dans la classe de Fuchs. Il existe un ensemble fini $S\subset \boldsymbol{C}$ tel que si $\Omega\subset \boldsymbol{C}-S$ est un ouvert simplement connexe et $a\in\Omega$, alors toute solution locale de (*) en a est uniforme et se prolonge à une solution méromorphe de (*) dans Ω.*

Preuve. On reprend les notations et définitions du début du §3. Soit Γ l'adhérence dans $\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{P}_1$ de Δ (voir §1).

Soit S un sous-ensemble fini de $\mathbf{C}$ *tel que:*

(i) si $a\in \boldsymbol{C}-S$, toute solution locale de (*) en a est uniforme ;

(ii) si $a\in \boldsymbol{C}-S$ et $q=(a,b)\in\Gamma$, alors q est un point régulier de Γ à tangente non-verticale;

(iii) tout $a\in \boldsymbol{C}-S$ est une valeur régulière de φ (voir diagramme du début du §3).

(iv) si $a\in \boldsymbol{C}-S$, tout $\xi\in\varphi^{-1}(a)$ est une valeur régulière de h et $h^{-1}(\xi)$ est transverse à $\mathcal{F}(P,Q)$ (voir (3.15) et (3.13)).

Notons $\Omega'= \boldsymbol{C}-S$. Prenons $a\in\Omega'$ et soit $y=y(x)$ une solution locale de (*) en a. Posons $q=(a,b)$ avec $b=y(a)\in\boldsymbol{P}_1$ et notons Σ le support de cette solution. On distingue deux cas:

1er cas. $\Sigma-\{q\}\subset\boldsymbol{C}^2-\Delta$. Soit $\mathcal{F}$ la restriction de $\mathcal{F}(P,Q)$ à $h^{-1}(\varphi^{-1}(\Omega'))$; de (iv) suit que $\mathcal{F}$ est régulier. D'après (3.11), il existe une séparatrice locale Λ de $\mathcal{F}$ telle que $g'(\Lambda)=\Sigma$; en particulier Λ est contenue dans une feuille de $\mathcal{F}$. Puisque les feuilles de $\mathcal{F}$ sont transverses aux fibres de h au-dessus de $\varphi^{-1}(\Omega')$, il existe une surface de Riemman L et une application analytique $\alpha: L\to X$ telles que $h^o\alpha: L\to\varphi^{-1}(\Omega')$ est un revêtement non-ramifié et $\Lambda\subset\alpha(L)$. Alors, $g'(\alpha(L))\supset\Sigma$ (voir annexe (4.1) et (6.4)).

On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "h"'] & P_1^2 \arrow[d, "h'"] \\ A \arrow[r, "\varphi"] & P_1 \end{tikzcd}$$

où h' est la projection sur le premier facteur. De ceci et du fait que la restriction de φ à $\varphi^{-1}(\Omega')$ est un revêtement fini non-ramifié, on déduit que l'application

$$h' \circ g' \circ \alpha : L \to \Omega'$$

l'est aussi.

Prenons maintenant un ouvert simplement connexe Ω tel que $a \in \Omega \subset \Omega'$. Il existe un ouvert $W \subset L$ tel que $\Lambda \subset \alpha(W)$ et $h' \circ g' \circ \alpha$ applique isomorphiquement W sur Ω. Alors $g'(\alpha(W)) \subset \Omega \times \boldsymbol{P}_1$ est le graphe d'une fonction méromorphe sur Ω qui prolonge $y=y(x)$. On conclut par (4.4).

$2^{\text{ème}}$ cas. $\Sigma \subset \Gamma$. Soit K la composante irréductible de Γ qui contient Σ. Posons

$$K_0 := \{(x,y) \in K : x \in \Omega'\}.$$

Alors K_0 est une surface de Riemann ([9, vol II(E) thm. 19]) contenant Σ telle que la restriction de h' à K_0 induit un isomorphisme local propre sur Ω'; en particulier h' est un revetêment fini non-ramifié. On complète la preuve comme dans le premier cas.[]

5. Singularités essentielles. Un fait remarquable pour l'équation (*) est que sa solution générale ne possède pas de « singularité essentielle mobile » (comparer avec [3, 3.16] et [10, thm. 3.3.2]). Plus précisément, on a la définition et le théorème suivants.

(5.1) DÉFINITION.- *Soit* $a \in \boldsymbol{C}$ *. Alors* a *est une* <u>*singularité essentielle*</u> *de (*) s'il existe un disque ouvert* $D \subset \boldsymbol{C}$ *de centre* 0 *et des fonctions*

$$\alpha : D \to \boldsymbol{C} \quad , \quad \beta : D^* \to \boldsymbol{C} \qquad (D^* = D - \{0\})$$

telles que $\alpha(0)=a$ *,* α *est holomorphe et non constante,* β *est méromorphe,* 0 *est une singularité essentielle de* β *et les équations en* z

$$P(\alpha(t),\beta(t),z)\alpha'(t) - Q(\alpha(t),\beta(t),z)\beta'(t) = 0 \quad , \quad F(\alpha(t),\beta(t),z) = 0$$

ont une racine en commun pour tout $t \in D^*$ *qui ne soit pas un pôle de* β.

(5.2) THÉORÈME.- *Il n'existe qu'un nombre fini de singularités essentielles de l'équation (*).*

La preuve de ce théorème suivra du lemme (5.4) ci-dessous.

(5.3) LEMME.- *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage analytique à singularités isolées de la surface analytique non-singulière X. Soit $M \subset X$ un sous-ensemble analytique, compact, de dimension pure 1 . Supposons que $p_1, \ldots, p_n$ sont des points non-singuliers de M tels que $\mathcal{F}$ et M sont transverses en chaque p_j $(j=1,\ldots,n)$. Alors, il existe un ouvert U de X contenant M tel que si F est une feuille de $\mathcal{F}|(U-M)$ dont l'adhérence, disons $F^{\#}$, dans U contient un point p_i, alors $F^{\#} \cap M = \{p_i\}$.*

Preuve. La structure produit de $\mathcal{F}$ au voisinage de chaque p_j (voir annexe (1.7)) implique que, pour U convenable, une telle feuille F doit être un germe de courbe analytique transverse à M au point p_i, moins le point p_i .[]

Pour le lemme qui suit on garde les notations des §1 et §3.

(5.4) LEMME.- *Soit $a \in \mathbf{C}$ tel que $c_0(a,y) \neq 0$ et que la droite $x=a$ n'est pas contenue dans Δ. Supposons que a est une singularité essentielle de (*). Alors, l'une (au moins) des composantes irréductibles de $(f')^{-1}(a)$ est invariante par $F(P,Q)$.*

Preuve. Supposons, par absurde, qu'aucune des composantes irréductibles de $(f')^{-1}(a)$ n'est invariante par $F(P,Q)$; notons D le diviseur de tangence entre le feuilletage défini par f' et $F(P,Q)$. Alors, l'intersection de $(f')^{-1}(a)$ avec le support de D est finie (voir annexe (2.4),(5.1),(5.2)). Cela implique qu'il existe $b \in \mathbf{C}$ tel que $c_0(a,b) \neq 0$, $(a,b) \notin \Delta$ et que $(g')^{-1}(a,b)$ est disjoint du support de D (voir début du §3).

Soit $q=(a,b)$. Des deux premières conditions il résulte que $g^{-1}(q)$ est fini et contenu dans V. Alors, $(g')^{-1}(q)$ est fini. De la troisième on déduit que si $p \in (g')^{-1}(q)$ alors p est un point non-singulier de $(f')^{-1}(a)$ et de $F(P,Q)$; de plus $(f')^{-1}(a)$ et $F(P,Q)$ sont transverses en p (voir annexe (5.2)).

D'après (5.3), il existe un voisinage ouvert V_a de a tel que si F est une feuille de

$$F(P,Q)|\,(f')^{-1}(V_a^*) \qquad (V_a^* = V_a - \{a\})$$

et si l'adhérence $F^{\#}$ de F dans $(f')^{-1}(V_a)$ contient un point $p \in (g')^{-1}(q)$, alors $F^{\#} \cap (f')^{-1}(a) = \{p\}$.

Soient $x=\alpha(t)$, $y=\beta(t)$ comme dans la définition (5.1). On peut supposer que $\alpha(D)=V_a$, $\alpha^{-1}(a)=0$ et que le morphisme $\alpha : D \to V_a$ est propre; en particulier $\alpha \,|\, D^* : D^* \to V_a^*$ est propre. Donc, l'application analytique

$$\Gamma : D^* \to V_a^* \times P_1 \subset P_1^2 \ , \quad \Gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t)) \ , \quad t \in D^*$$

est aussi propre. Alors $Y = \Gamma(D^*)$ est un sous-ensemble analytique irréductible de dimension 1 de $V_a^* \times P_1$. Comme 0 est une singularité essentielle de β, l'adhérence $Y^{\#}$ de Y dans $V_a \times P_1$ contient $\{a\} \times P_1$. En particulier, $Y \not\subset \Delta$.

L'application

$$g' | (f')^{-1}(V_a^*) : (f')^{-1}(V_a^*) = (g')^{-1}(V_a^* \times P_1) \to V_a^* \times P_1$$

est analytique, propre et surjective. On en déduit que $(g')^{-1}(Y)$ est un sous-ensemble analytique de dimension 1 de $(f')^{-1}(V_a^*)$. Comme $Y \not\subset \Delta$, il résulte de (3.11) qu'il existe une composante irréductible Z de $(g')^{-1}(Y)$ invariante par $F(P,Q)$ et telle que $\dim g'(Z) = 1$ (voir annexe (4.3)). Comme Y est irréductible, $g'(Z) = Y$.

Finalement, notons $Z^{\#}$ l'adhérence de Z dans $(f')^{-1}(V_a)$. On voit que $g'(Z^{\#})$ est fermé dans $V_a \times P_1$. Comme $q \in Y^{\#}$, $Z^{\#}$ contient un point $p \in (g')^{-1}(q)$. L'ensemble des points réguliers de Z est contenu dans une feuille de $F(P,Q)|(f')^{-1}(V_a^*)$. Alors, d'après ce qu'on a vu plus haut, $Z^{\#} \cap (f')^{-1}(a)$ ne contient d'autre point que p . Cela implique que $Y^{\#} \cap (\{a\} \times P_1) = \{q\}$, ce qui est une contradiction.[]

Preuve de (5.2). S'il existait une infinité de singularités essentielles de (*) il existerait une infinité de valeurs régulières y de h (dans les notations du début du §3) telles que $h^{-1}(y)$ est invariante par $F(P,Q)$, ce qui est absurde: en effet, autrement le diviseur de contact entre $F(P,Q)$ et le feuilletage défini par h contiendrait une infinité de fibres de h.[]

* * *

Chapitre III – LES ÉQUATIONS DE GENRE 0 ET DE GENRE >1 DANS LA CLASSE DE FUCHS

1. Introduction. Dans ce chapitre on reprend l'étude de l'équation

$$(*) \qquad \left\{\begin{matrix} P(x,y,z)dx - Q(x,y,z)dy = 0 \\ F(x,y,z) = 0 \end{matrix}\right\}$$

dans les conditions et avec les notations du §1 du chap. II.

Dans II(3.6) on a défini la notion de genre de l'équation (*). Dans cet exposé on va considérer les équations de la classe de Fuchs (voir chap. I §4 et chap. II §1 et §3) de genre 0 et de genre >1. Dans le premier cas, on montrera qu'elles se ramènent à des équations de Riccati à coefficients algébriques [2] (l'exemple II(3.16) en est un cas particulier). Comme application on donnera un critère pour l'existence d'une intégrale première rationnelle (voir (5.7) et (5.8)). Dans le deuxième cas, on montrera qu'elles admettent toujours une intégrale première rationnelle ((6.4) et [2]); l'utilisation des variétés hyperboliques simplifie considérablement la preuve de cette dernière assertion. Ceci a été généralisé par Bruno Scárdua dans [18].

Comme exemple, on montre que les tangentes à une courbe plane irréductible de degré >1 sont les solutions d'une équation dans la classe de Fuchs de genre égal à celui de la courbe.

2. L'image réciproque régulière. Soient $h: X \to B$ une surface fibrée, dans le sens du §3 chap. II et dont les fibres sont connexes, A une surface de Riemann compacte et $\gamma: A \to B$ une application analytique surjective. En général, l'image réciproque de h par γ n'est pas une surface fibrée à cause de l'apparition de singularités.

(2.1) DÉFINITION.- *Une* <u>*image réciproque régulière*</u> *de* h *par* γ *est un triple* (Y,k,Γ) *où*:

a) $k: Y \to A$ *est une surface fibrée*;

b) $\Gamma: Y \to X$ *est une application analytique telle que* $h^o\Gamma = \gamma^o k$;

c) *il existe un ouvert de Zariski non-vide* V *de* B *tel que si* $a \in A$ *et* $\gamma(a) \in V$ *alors* $\Gamma|k^{-1}(a) : k^{-1}(a) \to h^{-1}(\gamma(a))$ *est un isomorphisme.*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d, "k"'] & X \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "\gamma"] & B \end{tikzcd}$$

(2.2) LEMME.- *Il existe toujours une image réciproque régulière de* h *par* γ.

Preuve. Soit $h': X' \to A$ l'image réciproque usuelle de h par γ et soit $\gamma': X' \to X$ l'application canonique. Prenons une désingularisation $p: Y \to X'$ de X' et posons $\Gamma = \gamma' \circ p$ et $k = h' \circ p$. Alors (Y,k,Γ) est une image réciproque régulière de h par γ; on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "p"] \arrow[drr, bend left, "\Gamma"] \arrow[ddr, bend right, "k"'] & & \\
& X' \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[d, "h'"] & X \arrow[d, "h"] \\
& A \arrow[r, "\gamma"] & B
\end{tikzcd}$$

Pour vérifier (c) de (2.1), prenons par $V \subset B$ l'ouvert de Zariski formé par les points qui sont des valeurs régulières de h et de γ. Alors $W = h'^{-1}(\gamma^{-1}(V))$ est formé par des points non-singuliers de X'. Donc,

$$p|\, p^{-1}(W) : p^{-1}(W) \to W$$

est un isomorphisme.[]

On attire l'attention du lecteur sur le fait que l'application $\Gamma: Y \to X$ du lemme ne contracte que des composantes irréductibles des fibres de la surface fibrée $k: Y \to A$, car la surface X', obtenue comme image réciproque, n'est singulière que le long d'un nombre fini de fibres de $h': X' \to A$.

(2.3) LEMME.- *Soit* (Y,k,Γ) *une image réciproque régulière de* h *par* γ. *Soit* $K \subset X$ *une courbe analytique fermée telle que* $h|K: K \to B$ *est finie. Alors,*

$$\Gamma^{-1}(K) = K' \cup K_1$$

où K' *et* K_1 *sont des courbes analytiques fermées,* $k|K': K' \to A$ *est finie et* $K_1 \subset k^{-1}(E)$ *où* $E \subset A$ *est un ensemble fini. Cette décomposition est unique et* $\deg(h|K) = \deg(k|K')$. *En particulier, si* K *est une section de* h, *alors* K' *est une section de* k.

Preuve. Il découle de la définition (2.1) puisque Γ ne contracte que des composantes irréductibles des fibres de k.[]

(2.4) DÉFINITION.- *On dira que K' est <u>l'image réciproque</u> de K dans Y.*

(2.5) LEMME.- *Soit $K\subset X$ une courbe analytique fermée telle que $h|K: K\to B$ est finie de degré $d\geq 1$. Alors, il existe une surface de Riemann A, une application analytique surjective $\gamma: A\to B$ et une image réciproque régulière (Y,k,Γ) de h par γ telle que l'image réciproque K' de K dans Y est la réunion de d sections différentes de k.*

Preuve. Soit $L\subset K$ une composante irréductible qui n'est pas une section. Considérons une désingularisation $\alpha: A\to L$ de L et notons $\gamma = h^{o}\alpha$. Soient (Y,k,Γ) une image réciproque régulière de h par γ et $V\subset B$ l'ouvert de la définition (2.1); posons $U=\gamma^{-1}(V)$. On peut supposer que tout point de U est une valeur régulière de k et tout point de V est une valeur régulière de h et de γ. Dans ces conditions on peut définir une section $s: U\to Y$ de k par:

$$\Gamma(s(x)) = \alpha(x) \quad , \quad x\in U .$$

Il suit de (2.1) que

$$\Gamma|k^{-1}(U) : k^{-1}(U) \to h^{-1}(V)$$

est un isomorphisme local. Il en résulte que s est analytique.

Soit L' l'image réciproque de L dans Y. Alors, $s(U)\subset L'$. Donc, si $x\in U$ et $x\to a\in A$, alors $s(x) \to L'\cap k^{-1}(a)$, qui est un ensemble fini. On en déduit que s se prolonge à une section analytique $t: A\to Y$ de k et $t(A)\subset L'$, puisque A est lisse et L' fermée.

Puisque l'image réciproque d'une section est une section, il suffit d'itérer le procédé ci-dessus et d'appliquer (2.3) pour compléter la démonstration.[]

(2.6) PROPOSITION.- *Supposons que X est une surface projective. Soit d un entier positif. Alors, il existe une surface de Riemann A, une application analytique surjective $\gamma: A\to B$ et une image réciproque régulière (Y,k,Γ) de h par γ telle que $k: Y\to A$ possède d sections analytiques différentes.*

Preuve. Puisque X est une variété projective, il résulte du théoréme de Bertini (voir [21, chap. II, thm. 8.18]) qu'il existe dans X une infinité de courbes irréductibles dont l'autointersection dans X est positive. Aucune de ces courbes n'est contenue dans une fibre de h, par le lemme de Zariski ([13, chap.III lemma (8.2)]).

De ce qui précède on déduit qu'il existe une courbe algébrique projective $K\subset X$ telle que $h|K: K\to B$ est finie de degré $\geq d$. La proposition découle, alors, de (2.5).[]

Si T est un espace analytique irréductible, on désigne par $\boldsymbol{C}(T)$ le corps des fonctions méromorphes sur T.

(2.7) LEMME.- *Soit (Y,k,Γ) une image réciproque régulière de h par γ. Comme γ,Γ,h,k sont surjectives et $h^{o}\Gamma=\gamma^{o}k$, on peut supposer que $\boldsymbol{C}(A)$, $\boldsymbol{C}(B)$*

et $\boldsymbol{C}(X)$ *sont des sous-corps de* $\boldsymbol{C}(Y)$. *Alors* $\boldsymbol{C}(Y)$ *est engendré, comme corps, par les éléments de* $\boldsymbol{C}(A)$ *et* $\boldsymbol{C}(X)$.

Preuve. Soit $d = \deg \gamma$. D'après la définition (2.1), Γ est génériquement finie et $\deg \Gamma = d$. Alors,

$$[\boldsymbol{C}(Y):\boldsymbol{C}(X)] = d.$$

Par ailleurs, il est clair que $\boldsymbol{C}(B)$ est algébriquement clos dans $\boldsymbol{C}(X)$. Si $f \in \boldsymbol{C}(A)$ un élément primitif de $\boldsymbol{C}(A)/\boldsymbol{C}(B)$, on en déduit que

$$d = [\boldsymbol{C}(B)[f],\boldsymbol{C}(B)] = [\boldsymbol{C}(X)[f]:\boldsymbol{C}(X)] \leq [\boldsymbol{C}(Y):\boldsymbol{C}(X)] = d.[]$$

(2.8) DÉFINITION.- *On dira que la surface fibrée* $h:X \to B$ *est* <u>*birationnellement triviale*</u> *s'il existe une surface de Riemann compacte* F *et une application birationnelle* $f: B \times F \to X$ *telle que* $p = h \circ f$ *où* $p: B \times F \to B$ *est la projection canonique. On dit que* f *est une* <u>*trivialisation birationnelle*</u>.

(2.9) OBSERVATION.- Cela implique que f ne contracte que des composantes irréductibles de quelques fibres et que les fibres de h sont génériquement isomorphes à F.

3. Résultats geométriques. Soit K le diviseur canonique d'une surface projective lisse X et soit $C \subset X$ une courbe algébrique projective irréductible. On rappele les résultats suivants:

A) $$2g(C) - 2 = C.(K + C) - 2\delta(C)$$

où $g(C)$ est le genre de C, le point dénote l'indice d'intersection dans X et $\delta(C) \geq 0$ est un entier qui s'annulle si et seulement si C est non-singulière ([11, I-15 et I-16]).

B) Si $h: X \to B$ est une surface fibrée et $C \subset h^{-1}(b)$ pour un $b \in B$, alors $C.C \leq 0$ et $C.C = 0$ implique $C = h^{-1}(b)$. De plus, l'autointersection de chaque fibre, en tant que diviseur, de h est nulle [13, chap. III Lemma (8.2)]).

(3.1) PROPOSITION.- *Soit* $h: X \to B$ *une surface fibrée telle que:*
a) il existe une fibre régulière isomorphe à $\boldsymbol{P}_1$ *et*
b) aucune fibre ne contient de courbe isomorphe à $\boldsymbol{P}_1$ *et d'autointersection* -1.
Alors h *est un fibré localement analytiquement trivial de fibre type* $\boldsymbol{P}_1$.

Preuve. Prenons $b \in B$ et posons $F = h^{-1}(b)$.
Fixons $F_0 = h^{-1}(b_0)$ une fibre régulière isomorphe à $\boldsymbol{P}_1$; par (A) et (B), $-2 = F_0.K$.

Il existe une fonction f méromorphe et non-constante sur B dont le seul pôle est b et dont les zéros $b_1,...,b_s$ sont tous simples et sont aussi des valeurs régulières de h. Si $C_1,...,C_k$ sont les composantes irréductibles de F alors,

$$\operatorname{div}(f \circ h) = \sum_{j=1}^{s} h^{-1}(b_j) - s\sum_{i=1}^{k} n_i C_i \qquad \text{avec} \qquad n_i > 0$$

On en déduit que le diviseur

$$D = \sum_{i=1}^{k} n_i C_i$$

est numériquement équivalent à F_0. Donc,

$$\text{(1)} \qquad \sum_{i=1}^{k} n_i C_i.K = D.K = F_0.K = -2$$

On distingue deux cas :

Cas 1. Supposons que l'une des C_i a une auto-intersection nulle. Par (B), $k=1$ et $D=nC$ avec $C.C=0$. Comme $nC.K=-2$ on a $n=1$ ou $n=2$.

Si $n=1$ alors $C.K=-2$. Par (A), $g(C)=\delta(C)=0$ et F est isomorphe à $\boldsymbol{P}_1$.

Si $n=2$, $C.K=-1$. Mais (A) implique que $C.K$ est pair; contradiction.

Cas 2. $C_i.C_i < 0$ pour tout $i=1,2,...,k$, d'après (B). Par (A) et (1) on a:

$$-2 = \sum_{i=1}^{k} n_i(2g(C_i) - 2 - C_i.C_i + 2\delta(C_i)).$$

Si $C_i.C_i<-1$ alors le terme correspondant de cette somme est ≥ 0. Si $C_i.C_i = -1$ et $g(C_i)=\delta(C_i)=0$, $C_i \subset F$ serait isomorphe à $\boldsymbol{P}_1$, ce qui contredit l'hypothèse. Si $C_i.C_i = -1$ et $g(C_i)+\delta(C_i)>0$, le terme correspondant dans la somme est encore >0. On obtient $-2 \geq 0$; contradiction.

En définitive, on a démontré que $D=C$ où C est une courbe isomorphe à $\boldsymbol{P}_1$. C'est-à-dire, toutes les fibres sont régulières et isomorphes à $\boldsymbol{P}_1$. Cela implique la proposition, d'après [7]. []

Si a,b,c,d sont quatre points d'une surface de Riemann de genre zéro, on dénote $[a,b,c,d]$ leur rapport anharmonique.

(3.2) LEMME.- *Supposons que la surface fibrée $h: X \to B$ admet trois sections analytiques différentes s_0, s_1, s_2 et que ses fibres régulières sont isomorphes à $\boldsymbol{P}_1$. Alors, il existe une trivialisation birationnelle $f: B\times\boldsymbol{P}_1 \to X$ de h telle que les images de $B\times\{0\}$, $B\times\{1\}$, $B\times\{\infty\}$ par f sont $s_0(B)$, $s_1(B)$, $s_2(B)$ respectivement.*

Preuve. En contractant les éventuelles composantes irréductibles des fibres isomorphes à $\boldsymbol{P}_1$ et d'autointersection -1 on peut se réduire, par (3.1), au cas

où h est une fibration analytiquement localement triviale. Dans ce cas on définit une application birationnelle $g: X \to B \times \boldsymbol{P}_1$ par:

$$[s_0(y), s_1(y), s_2(y), x] = [0,1,\infty,g(x)]$$

où $x \in X$, $y=h(x)$. L'inverse f de g est la trivialisation birationnelle cherchée.[]

L'existence de sections pour une surface fibrée est, en général, difficile à constater ; en plus, il n'est pas toujours vrai qu'une surface fibrée, même qu'elle n'ait pas de fibres singulières, possède des sections. Cependant, dans le cas où les fibres régulières son isomorphes à $\boldsymbol{P}_1$, il existe toujours une section : ceci est la version géomètrique d'un résultat connu comme Théorème de Tsen (on peut consulter [10, pag.24]). Par un argument standard de cohomologie de faisceaux on peut montrer que l'existence d'une section implique celle d'une infinité de sections ; du lemme suit alors le résultat suivant, connu comme Théorème de Noether-Enriques (voir [11, chap. III]).

(3.3) THÉORÈME.- *Soit $h: X \to B$ une surface fibrée dont les fibres régulières sont isomorphes à $\boldsymbol{P}_1$ et supposons que X est une variété algébrique. Alors h est birationnellement triviale.*

(3.4) OBSERVATION.- Si $K \subset X$ est une section de h on peut choisir la trivilisation birationnelle en sorte que $B \times \{\infty\}$ corresponde avec K.

4. Les équations de genre nul. Dans ce paragraphe on montrera que si l'équation (*) est de genre 0 alors son étude se ramène à celui d'un feuilletage d'un produit $A \times \boldsymbol{P}_1$, où A est une surface de Riemann compacte, différent de celui donné par les fibres de la projection canonique $A \times \boldsymbol{P}_1 \to A$ (c'est-á-dire qu'elle se ramène au cas des équations étudiées dans [10 chap. 3]). Si, en plus, l'équation est dans la classe de Fuchs, ce feuilletage est de Riccati relativement à cette projection canonique (dans le sens de II(3.13)). Dans le paragraphe suivant on étudiera ces feuilletages.

(4.1) PROPOSITION.- *Supposons que l'équation (*) est de genre 0. Alors, il existe une surface de Riemann compacte A, une application analytique surjective $\gamma: A \to \boldsymbol{P}_1$ et une application rationnelle $\Gamma: A \times \boldsymbol{P}_1 \to \boldsymbol{P}_1^3$ telles que*

$$\begin{tikzcd} A \times \boldsymbol{P}_1 \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d] & \boldsymbol{P}_1^3 \arrow[d] \\ A \arrow[r, "\gamma"] & \boldsymbol{P}_1 \end{tikzcd}$$

commute, où les fléches verticales sont les projections canoniques sur le premier facteur. En plus, pour $a \in A$ *générique,* $\gamma(a) \in \boldsymbol{C}$ *et* Γ *applique birationnellement* $\{a\} \times \boldsymbol{P}_1$ *sur une composante irréductible de la courbe*

$$\{F(\gamma(a),y,z) = 0\} \subset \{\gamma(a)\} \times \boldsymbol{P}_1^2 .$$

Preuve. Considérons la surface fibrée $h: X \to B$ introduite au §3 du chapitre II duquel on reprend les notations et définitions ; on prend $A=B$. Par hypothèse, les fibres régulières sont isomorphes à $\boldsymbol{P}_1$. On est, donc, en mesure d'appliquer (3.3). Tenant compte de II(3.4) et de (2.9), on voit que (4.1) en suit immédiatement.[]

(4.2) OBSERVATION.- On peut exprimer (4.1) de façon informelle en disant que si l'équation est de genre nul, alors on peut paramétriser birrationnellement la courbe $F(x,y,z)=0$, où l'on considère x constant, par des fonctions:

$$y = A(x,t) \quad , \quad z = B(x,t)$$

rationnelles en t et à coefficients des fonctions algébriques en x . Cette paramétrisation est birationnelle pour x générique.

(4.3) EXEMPLE.- $F(x,y,z) = z^2 - xy^2$. Il n'existe pas A,B comme dans (4.2) qui soient des fonctions rationnelles en t et en x , car autrement on aurait

$$B(x,t)^2 = xA(x,t)^2 ,$$

ce qui est absurde : le problème ici est que la courbe $F(a,y,z) = 0$ est réductible pour a générique ; après prendre une image réciproque par une application de degré 2, selon le théorème de factorisation de Stein ([21, chap. III, cor. 11.5]), on trouvera de telles A,B, rationnelles en t mais avec des coefficients des fonctions algébriques (d'ordre 2).

Reprenons les notations et définitions du début du §3 du chapitre II et supposons que l'équation est de genre zéro. Soient A, γ et Γ comme dans (4.1). Soit

$$\Gamma' : A \times \boldsymbol{P}_1 \to \boldsymbol{P}_1^2$$

la composition de Γ avec la projection canonique:

$$\boldsymbol{P}_1^3 = \boldsymbol{P}_1^2 \times \boldsymbol{P}_1 \to \boldsymbol{P}_1^2 .$$

(4.4) THÉORÈME.- *a) l'équation de Pfaff dans* $A \times \boldsymbol{P}_1$

$$\Gamma^*(P(x,y,z)dx - Q(x,y,z)dy) = 0$$

n'est pas triviale ; notons $\mathcal{G}$ *le feuilletage analytique de* $A \times \boldsymbol{P}_1$ *à singularités isolées défini par cette équation.*

b) $\mathcal{G}$ *est différent du feuilletage défini par les fibres de la projection canonique* $A \times \boldsymbol{P}_1 \to A$ *;*

c) pour $a \in \boldsymbol{C}$ *générique et pour tout* $b \in \boldsymbol{P}_1$ *, si* $\Sigma \not\subset \Delta$ *est le support d'une solution de (*) par* $q=(a,b)$ *, il existe une séparatrice locale* Λ *de* $\mathcal{G}$ *en* $p \in A \times \boldsymbol{P}_1$ *telle que* Γ *est définie en* p *,* $\Gamma'(p)=q$ *et* $\Gamma'(\Lambda)=\Sigma$ *;*

d) si $C \not\subset \Delta$ est une solution algébrique de (*), il existe une courbe algébrique projective irréductible $K \subset A \times \boldsymbol{P}_1$ invariante par G telle que l'image de K par Γ' est l'adhérence de C dans $\boldsymbol{P}_1^2$;

e) s'il existe dans $A \times \boldsymbol{P}_1$ une infinité de courbes algébriques fermées irréductibles invariantes par G , l'équation (*) possède une intégrale première rationnelle;

f) si l'équation (*) est dans la classe de Fuchs, G est de Riccati relativement à la projection canonique $A \times \boldsymbol{P}_1 \to A$.

Preuve. (a) Par construction, Γ est une application rationnelle dominante:

$$\Gamma : A \times \boldsymbol{P}_1 \to S .$$

De ceci est de II(3.3) on déduit que $\Gamma^*(P(x,y,z)dx - Q(x,y,z)dy)$ est une 1-forme méromorphe et non nulle sur $A \times \boldsymbol{P}_1$.

(b) L'assertion résulte du fait que F ne divise pas Q.

(c) Considérons le diagramme commutatif (voir chap. II, §2)

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{P}_1^2 & \\
A \times \boldsymbol{P}_1 \arrow[ur, "\Gamma'"] \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d, "\pi_1"'] & S \arrow[u, "g"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[ul, "g'"'] \arrow[l, "\pi"'] \arrow[dl, "f'"] \\
A \arrow[r, "\gamma"] & \boldsymbol{P}_1 &
\end{tikzcd}$$

où π_1 est la projection canonique.

Comme $\pi^{-1} \circ \Gamma$ ne contracte que des composantes de quelques fibres de π_1 , il existe un ouvert de Zariski non-vide $W_2 \subset \boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{P}_1$ tel que si $W_1 = \gamma^{-1}(W_2)$ alors:

$$\Theta = \pi^{-1} \circ \Gamma | \pi_1^{-1}(W_1) : \pi_1^{-1}(W_1) \to f'^{-1}(W_2)$$

est analytique, propre et finie. D'après (4.1), pour $a \in W_1$ générique, $\Gamma | \pi_1^{-1}(a)$ est une désingularisation d'une composante irréductible de la courbe $F(a,y,z)=0$ tandis que $\pi | f'^{-1}(\gamma(a))$ est une désingularisation de cette courbe (II(2.2)). Il en résulte que $\Theta | \pi_1^{-1}(a)$ est injective. On en déduit que Θ est un isomorphisme local, à condition de prendre W_2 plus petit si nécessaire.

Rappelons que $F(P,Q)$ est le feuilletage de X associé à l'équation (*) (voir §3 du chapitre II).

D'après les définitions, l'image réciproque par Θ de $F(P,Q) | f'^{-1}(W_2)$ est $\mathrm{G} | \pi_1^{-1}(W_1)$ (voir II(3.3)). Il suffit, alors, d'appliquer II(3.11).

(d) Il est analogue à (c) au moyen de II(3.12).

(e) D'après ce qu'on a vu dans la preuve de (c), si $C \subset A \times \boldsymbol{P}_1$ est une courbe irréductible invariante par G et telle que $\pi_1(C) = A$, alors son image par $\pi^{-1} \circ \Gamma$ est une courbe irréductible invariante par $F(P,Q)$ (voir annexe (4.3)). Par le

théorème de Jouanolou [6], l'hypothèse entraîne que $F(P,Q)$ possède une intégrale première rationnelle. On conclut par II(3.20).
(f) Si l'équation est dans la classe de Fuchs, $F(P,Q)$ est transverse aux fibres génériques de f' (II(3.15) et II(3.14)). Comme Θ est un isomorphisme local, cela implique que $\mathcal{G}$ est transverse aux fibres génériques de π_1 .[]

5.- Les équations de Riccati. Soit A une surface de Riemann compacte et supposons donné un feuilletage analytique à singularités isolées $\mathcal{G}$ de $Y=A\times\boldsymbol{P}_1$ différent de celui défini par les fibres de la projection canonique $p: Y\to A$.

Comme Y est une variété algébrique, $\mathcal{G}$ est donné par une équation de Pfaff globale $\theta=0$, où θ est une 1-forme méromorphe non-nulle sur Y (voir annexe (3.4)). Soit $t: Y\to\boldsymbol{P}_1$ l'autre projection canonique. Choissisons $l\in\boldsymbol{C}(A)$ non-constante et soit $x=l\circ p$. Alors,

$$\theta = udx + vdt$$

où $u,v\in\boldsymbol{C}(Y)$ et $v\neq 0$. On peut , donc, écrire l'équation sous la forme:

$$\frac{dt}{dx} = f \quad , \qquad f = -\frac{u}{v} \in \mathcal{C}(Y).$$

(5.1) LEMME.- *Si* $\mathcal{G}$ *est de Riccati relativement à* p *alors*

$$f = at^2 + bt + c$$

où $a,b,c\in\boldsymbol{C}(A)$.

Preuve. Voir [10, thm. 3.3.3].

(5.2) OBSERVATION.- Supposons que l'équation est de genre nul et soient

$$y = A(x,t) \quad , \qquad z = B(x,t)$$

comme dans (4.2). L'équation du feuilletage $\mathcal{G}$ de Y défini au théorème (4.4) est:

$$P(x,A(x,t),B(x,t))dx - Q(x,A(x,t),B(x,t))A_x(x,t)dx - Q(x,A(x,t),B(x,t))A_t(x,t)dt = 0$$

Il en résulte l'équation explicite:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{P(x,A(x,t),B(x,t)) - Q(x,A(x,t),B(x,t))A_x(x,t)}{Q(x,A(x,t),B(x,t))A_t(x,t)}$$

Si, en plus, l'équation (*) est dans la classe de Fuchs, celle-là est une équation de Riccati, d'après (5.1) et (4.4)f (comparer avec II(3.16)).

(5.3) EXEMPLE.- $(y')^2 - xy(x-y)^2 = 0$. Comme $F(x,y,z)=z^2-xy(x-y)^2$, la courbe $F(a,y,z)=0$ est une cubique avec un point double en $y=a$, $z=0$. L'équation est, donc, de genre nul.

Comme $y=0$ est une solution, il résulte de I(4.10), I(4.12) et I(2.6) que l'équation est dans la classe de Fuchs. On fait:

$$y = P(x,t) = t^2 \quad , \qquad z = Q(x,t) = t\sqrt{x}(x - t^2)$$

et on obtient l'équation de Riccati:

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{\sqrt{x}}{2}t^2 + \frac{x\sqrt{x}}{2}$$

Observons qu'on perd la solution $y=0$, contenue dans Δ.

(5.4) LEMME.- *Supposons que* G *est de Riccati relativement à* p. *Soit* $U\subset A$ *un ouvert et soient* $y=y_j(x)$, $1\leq j\leq 4$, *des fonctions analytiques à valeurs dans* $\boldsymbol{P}_1$ *telles que leurs graphes dans* $U\times\boldsymbol{P}_1\subset Y$ *sont disjoints deux à deux et invariants par* G. *Alors, la raison anharmonique*

$[y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x)]$ *est constant pour* $x\in U$.

Preuve. D'après II(3.14), on peut supposer que G est transverse à $p^{-1}(x)$ pour tout $x\in U$. Comme le problème est local, on peut prendre U assez petit pour que G trivialise le fibré $p|\,p^{-1}(U)$. C'est à dire, il existe

$$\lambda: p^{-1}(U) \to \boldsymbol{P}_1$$

analytique telle que $\lambda|\,p^{-1}(x)$ est un isomorphisme pour $x\in U$ et que $\lambda(u)=\lambda(v)$ si et seulement si $u,v\in p^{-1}(U)$ sont dans la même feuille de $\mathrm{G}|\,p^{-1}(U)$ (voir annexe (6.3)). Alors,

$$[y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x)] = [\lambda(x, y_1(x)),\lambda(x, y_2(x)),\lambda(x, y_3(x)),\lambda(x, y_4(x))] = \text{cte.}$$

parce que $\lambda(x, y_j(x))=\text{cte.}$ pour $j=1,2,3,4$.[]

(5.5) EXEMPLE.- Dans les hypothèses et notations de (5.1) supposons que $A\times\{\infty\}$ est invariante par G. Alors $a=0$; c'est à dire, on a une équation linéaire.

(5.6) LEMME.- *Supposons que* G *est de Riccati relativement à* p *et qu'il existe une courbe algébrique projective* $K\subset Y$ *telle que:*

a) $K\cap p^{-1}(x)$ *est fini pour tout* $x\in A$,

b) le degré de $p|K: K\to A$ *est* ≥ 3,

c) K *est invariante par* G.

Alors il existe dans Y *une infinité de courbes algébriques projectives irréductibles invariantes par* G.

Preuve. Il est évident qu'on peut supposer que $A\times\{\infty\}\not\subset K$. Alors, l'hypothèse implique qu'il existe $U\subset A$, ouvert connexe non-vide, et $y=y_j(x)$ $(j=1,2,3)$ analytiques sur U à valeurs dans $\boldsymbol{C}$ dont les graphes dans $U\times\boldsymbol{P}_1\subset Y$ sont disjoints deux à deux et invariants par G. On peut aussi supposer que $\mathrm{G}|\,p^{-1}(U)$ n'a pas de point singulier.

Dans ces conditions, il suit de (5.4) et du théorème d'existence et unicité pour les équations différentielles analytiques, que le graphe de la fonction analytique $y=y(x)$ définie, pour $c\in\boldsymbol{C}$ générique, par l'équation:

$$[y_1(x), y_2(x), y_3(x), y(x)] = c \quad , \qquad x \in U,$$

est invariant par G .

Finalement, puisque les $y_j(x) \in \boldsymbol{C}(U)$ sont algébriques sur $\boldsymbol{C}(A) \subset \boldsymbol{C}(U)$, la fonction $y(x) \in \boldsymbol{C}(U)$ l'est aussi. Donc, il existe une courbe algébrique fermée irréductible dans Y qui contient ce graphe; cette courbe est invariante par G , d'où suit le lemme.[]

(5.7) THÉORÈME.- *Supposons que:*

a) l'équation (*) est de genre nul et appartient à la classe de Fuchs,

b) il existe une courbe algébrique $C \subset \boldsymbol{C}^2$ dont toutes les composantes irréductibles sont des solutions algébriques telle que son équation minimale est de degré ≥ 3 en y et que $C \cap \Delta$ est fini.

Alors l'équation (*) admet une intégrale première rationnelle.

Preuve. Cela résulte de (4.4)f, (4.4)d, (5.6) et (4.4)e.

(5.8) EXEMPLE.- $(y')^2 - y^2(1 - y^2) = 0$. Comme $F(x,y,z)=z^2-y^2(1-y^2)$, la courbe $F(a,y,z)=0$ est une quartique irréductible avec deux points doubles. L'équation est, donc, de genre nul. De I(4.10), I(4.12) et I(2.6) on déduit que cette équation est dans la classe de Fuchs. Suivant (5.2) on prend:

$$y = P(x,t) = \frac{2t}{1+t^2} \quad , \qquad z = Q(x,t) = \frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

et on obtient l'équation: $dt/dx=t$. On en déduit que la solution générale est:

$$y = \frac{2ce^x}{1+c^2e^{2x}} \quad , \qquad c \in C \qquad \text{et} \qquad y = \pm 1$$

Il est facile de voir que $y=0,\pm 1$ sont les seules solutions algébriques.

Cette équation possède trois solutions algébriques différentes mais n'admet pas d'intégrale première rationnelle.

(5.9) COMPLÉMENT.- Supposons que l'équation (*) appartient à la classe de Fuchs faible (I(4.3)), que son genre est 0 et que

$$\deg_y c_1(x,y) \geq \deg_y c_j(x,y) \quad , \qquad 2 \leq j \leq m .$$

Si $\deg_y c_1(x,y)=0$, l'équation est dans la classe de Fuchs puisque, pour $a \in \boldsymbol{C}$ générique il n'existe pas de solution par (a,∞).

Supposons $\deg_y c_1(x,y)>0$. Dans ce cas $L \subset S$, dans les notations de chap. II,§3, où L est la droite:

$$L = \boldsymbol{P}_1 \times \{(\infty,\infty)\} \subset \boldsymbol{P}_1^{\,3} .$$

En plus, pour $a \in \boldsymbol{C}$ générique, $(a,\infty,\infty) \in L$ est non-singulier dans S . Il en résulte que $\pi^{-1}(L)$ est composé d'une section T de f' et d'éventuelles courbes contenues dans des fibres de f' (l'existence de cette section entraîne $B=\boldsymbol{P}_1$ et φ=Id.; c'est à dire, $F(a,y,z)=0$ est une courbe irréductible pour $a \in \boldsymbol{C}$ générique).

D'après (3.3) et (3.4) il existe une trivialisation birationnelle α: $\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{P}_1\to X$ de h' telle que l'image de $A\times\{\infty\}$ par α est l'image réciproque de T (défs. (2.1) et (2.4)). De ceci on déduit que le feuilletage $\mathcal{G}$ de $\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{P}_1$ défini dans (4.4) est transverse à la fibration $\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{P}_1\to A$ en-dehors d'un ensemble de la forme:

$$\boldsymbol{P}_1\times\{\infty\}\cup E\times\boldsymbol{P}_1$$

où $E\subset \boldsymbol{P}_1$ est fini. Il en résulte, comme au début de ce paragraphe, que l'équation se ramène à une équation de la forme:

$$\frac{dt}{dx}=a_0(x)t^n+a_1(x)t^{n-1}+.....+a_n(x)$$

où les $a_j(x)$ sont des fonctions algébriques, au moyen d'un changement de variable du type:

$$y=A(x,t)\quad,\quad z=B(x,t)$$

où A,B sont des fonctions rationnelles en t à coefficients des fonctions rationnelles en x.

(5.10) EXEMPLE.- On reprend l'équation binomiale, dans la classe de Fuchs, considérée dans l'exemple I(4.16) (voir [3, §13.8]). On a vu dans II(3.7) que cette équation est de genre 0 dans les cas (A), (B), (C), (D), (E).

Dans les cas (A), (B), (C), l'équation se ramène immédiatement à une équation de Riccati dont les coefficients sont des fonctions algébriques de x. Dans le cas (D), suivant ce qu'on vient de voir, on doit paramétriser la courbe :

$$z^{2n}=B(x)(p(x)y+q(x))^{2n}(y-b_2)^n(y-b_3)^n$$

comme dans (4.2). L'égalité

$$z^2=\sqrt[n]{B(x)}(p(x)y+q(x))^2\frac{y-b_2}{y-b_3}(y-b_3)^2$$

suggère de faire

$$t^2=(y-b_2)/(y-b_3)$$

Un calcul direct montre que, en effet, ce changement de variable dépendante ramène l'équation à l'équation de Riccati:

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2}\sqrt[2n]{B(x)}((b_3p(x)+q(x))t^2-(b_2p(x)+q(x))$$

On traite (E) analoguement en faisant

$$t^d=(y-b_1)/(y-b_2)$$

et on obtient l'équation de Riccati en variables séparables:

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt[d]{B(x)}\,\frac{b_1 - b_2}{d}\,t^2$$

6. Les équations de genre plus grand que 1 . Le théorème suivant est un cas particulier du théorème (6.2) plus bas compte tenu de II(3.14).

(6.1) THÉORÈME.- *Soit $h: X \to B$ une surface fibrée et soit* F *un feuilletage analytique de X, de Riccati relativement à h (voir §3 du chap. II). Si la fibre générique de h est de genre ≥ 2, alors* F *possède une intégrale première méromorphe.*

(6.2) THÉORÈME.- *Soient $h: X \to B$ une surface fibrée et $S \subset B$ un ensemble fini ; notons $V = B - S$, $U = h^{-1}(V)$. Soit* F *un feuilletage analytique de U transverse à $F_y = h^{-1}(y)$ pour tout $y \in V$. Si les fibres régulières de h sont de genre ≥ 2, alors* F *se prolonge à un feuilletage analytique* G *de X qui possède une intégrale première méromorphe.*

Preuve. On peut supposer que S contient toutes les valeurs critiques de h. Fixons $a \in V$. Comme les fibres de h sont compactes, l'holonomie de F nous donne un homomorphisme $\pi_1(V,a) \to \mathrm{Aut}(F_a)$. Étant donné que ce dernier groupe est fini, puisque le genre de F_a est ≥ 2 [21, chap. IV Ex. 5.2], il existe un revêtement fini non-ramifié $\alpha: V' \to V$ tel que l'holonomie du relèvement F' de F à U' soit triviale, où $g: U' \to V'$ est l'image réciproque par α de $h|U: U \to V$. Ce revêtement peut être complété à un revêtement ramifié fini $\beta: B' \to B$; notons $h': X' \to B'$ l'image réciproque de $h: X \to B$ par β.

Soit $q: Y \to X'$ une désingularisation de X'. Comme l'holonomie de F' est triviale, ce feuilletage induit une trivialisation analytique du fibré $g: U' \to V'$; c'est-à-dire, il existe une application analytique $p: U' \to F_a$ qui identifie chaque fibre de g avec F_a et qui est constante sur chaque feuille de F'. D'après [14, cor. 4.13 (chap. IV) et théor. 4.1 (chap. VI)], $p \circ (q|q^{-1}(U'))$ se prolonge à une application analytique $r: Y \to F_a$.

Prenons une fonction méromorphe u non-constante sur F_a et considérons $v = u \circ r$. Alors v est une fonction méromorphe qui est, d'une part, non-constante sur Y, donc aussi sur X', et, d'autre part, constante sur chaque feuille de F'.

Puisque X' est un revêtement fini de X, le corps $\boldsymbol{C}(X')$ est une extension algébrique finie de $\boldsymbol{C}(X)$. Comme $v \in \boldsymbol{C}(X')$ n'est pas constante, au moins l'un des coefficients, disons f, de son polynôme caractéristique sur $\boldsymbol{C}(X)$ n'est pas constant. Alors $df = 0$ définit un feuilletage de X (annexe §3) qui prolonge F, parce que f est constante sur chaque feuille de F, d'où la fin de la preuve.[]

(6.3) EXEMPLE.- Soit $B = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$, $X = B \times B$, $h: X \to B$ la projection sur le premier facteur. Dans $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C} \subset X$ le champ de vecteurs:

$$z^2 \frac{\partial}{\partial z} + e^z \frac{\partial}{\partial w}$$

engendre un feuilletage qui se prolonge à $\boldsymbol{C} \times B$ en ajoutant la feuille $\boldsymbol{C}^* \times \{\infty\}$ et le point singulier $(0, \infty)$. Ce feuilletage est transverse aux fibres de $h|\boldsymbol{C}^* \times B$. Mais le champ de droites tangentes aux feuilles n'a pas de limite lorsqu'on tend vers un point quelconque de $\{\infty\} \times \boldsymbol{C}$. Donc,ce feuilletage ne se prolonge pas à X.

(6.4) THÉORÈME.- *Supposons que l'équation (*) est dans la classe de Fuchs et que son genre est* >1 . *Alors, il existe une intégrale première rationnelle de (*).*

Preuve. Résulte de II(3.15), II(3.20) et (6.1).[]

(6.5) EXEMPLE.- Soit $C_0 \subset \boldsymbol{C}^2$ une courbe irréductible de degré $d>1$. Soit $U \subset C_0$ l'ensemble des points réguliers q de C_0 tels que la tangente à C_0 en q n'est pas verticale. Soit $y=y_q(x)$ l'équation de cette tangente. L'application:

$$T: \boldsymbol{C} \times U \to \boldsymbol{C}^3 \quad , \qquad T(x,q) = (x, y_q(x), y_q'(x))$$

définit une application rationnelle:

$$T: \boldsymbol{P}_1 \times C \to \boldsymbol{P}_1^3 \ ,$$

où C est l'adhérence de C_0 dans $\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{C})$, dont l'image est une surface algébrique irréductible fermée $S \subset \boldsymbol{P}_1^3$. Soit $S_0 = S \cap \boldsymbol{C}^3$ et soit $F(x,y,z)=0$ une équation irréductible de S_0 . Si $a \in \boldsymbol{P}_1$, l'application $T\,|\{a\} \times C$ est génériquement injective. C'est-á-dire, pour $a \in \boldsymbol{C}$ générique C est birationnallement équivalente à la courbe $F(a,y,z)=0$.

On déduit de ce qui précède que $F(x,y,y')=0$ est une équation de genre égal au genre de C . Si $q \in U$ alors $y=y_q(x)$ est une solution. On va montrer que l'équation est dans la classe de Fuchs.

Il existe un ouvert de Zariski non-vide V de S tel que pour tout $p \in V$, il existe $x \in \boldsymbol{C}$ et $q \in U$ avec:

$$p = (x, y_q(x), y_q'(x)) \ .$$

Soit W l'intersection de V avec l'ouvert $\{F_z(x,y,z) \neq 0\}$. Alors, par I(1.3) et ce qu'on vient de voir, pour tout $p=(a,b,c) \in W$, la seule solution par (a,b) de pente c est l'équation d'une droite, à équivalence près.

Considérons, d'autre part, la courbe $\Sigma = S - W$. Soit $f: S \to \boldsymbol{P}_1$ la projection sur la première coordonnée. Pour $a \in \boldsymbol{C}$ générique, si $p \in \Sigma$ et $f(p)=a$, alors p est régulier dans Σ et $d(f\,|\,\Sigma)(p) \neq 0$.

Soit $x=\alpha(t)$, $y=\beta(t)$ une solution locale en $a \in \boldsymbol{C}$. Posons

$$\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t), \beta'(t)/\alpha'(t)) \in S \ .$$

Alors, pour $a \in \boldsymbol{C}$ générique, si $\gamma(t) \in \Sigma$ pour tout t , la solution est non-ramifiée (II(3.2)). Si, par contre, il existe t_0 tel que $\gamma(t_0) \in W$ alors:

$$\beta(t) = k\alpha(t) + l$$

où k et l sont des constantes. La solution est encore non-ramifiée.

Par conséquent, pour chaque entier non-négatif g il existe une équation de genre g dans la classe de Fuchs.

* * *

Chapitre IV – LES ÉQUATIONS DE GENRE 1 DANS LA CLASSE DE FUCHS

1. Introduction. Dans ce chapitre on étudiera les équations du type (*) (chap. II §1) de genre 1 dans la classe de Fuchs (définitions I(4.2) et chap. II §1) et on montrera qu'elles se ramènent à une équation aux variables séparées [2]. Comme application on donnera un critère pour l'existence d'une intégrale première rationnelle (voir (4.5) et (4.3)).

2. Résultats géométriques. Si T est un espace analytique irréductible, on notera $\boldsymbol{C}(T)$ les corps de fonctions méromorphes sur T. Si T est non-singulier et $g\in\boldsymbol{C}(T)$, $g\neq 0$ alors,

$$\operatorname{div} g = \operatorname{div}_0 g - \operatorname{div}_\infty g$$

où $\operatorname{div}_0 g$ est le diviseur des zéros et $\operatorname{div}_\infty g$ celui des pôles de g.

Une surface fibrée (voir §3 du chap. II) est *relativement minimale* si aucune de ses fibres ne contient de courbe lisse rationnelle d'auto-intersection -1 [13, chap. III §10] ; quitte à collapser un nombre fini de ces courbes, on peut factoriser h à travers une surface fibrée relativement minimale.

(2.1) LEMME.- *Soit X une surface algébrique, soit $h: X\to B$ une surface fibrée dont les fibres régulières sont elliptiques et supposons qu'il existe une section holomorphe $\sigma: B\to X$ de h. Alors, il existe $t,v\in\boldsymbol{C}(X)$ telles que:*

$$\operatorname{div}_\infty t = 2\sigma(B) + D \quad et \quad \operatorname{div}_\infty v = 3\sigma(B) + D'$$

où les supports des diviseurs D,D' sont contenus dans l'union d'un nombre fini de fibres de h.

Preuve. Sans perte de généralité on peut supposer h relativement minimale. Soit K un diviseur canonique de X. Par la formule de Kodaira ([13, chap. V (12.3)] le support de K est contenu dans $h^{-1}(E)$, où $E\subset B$ est un ensemble fini, et $K.K=0$ (où le point indique indice d'intersection dans X). Soit F une fibre régulière de h, $F\not\subset h^{-1}(E)$. Considérons le diviseur:

$$D_{m,n} = mC + K + nF$$

où m,n sont des entiers positifs et $C=\sigma(B)$. Alors, par la dualité de Serre:

$$\chi(D_{m,n}) = h^0(D_{m,n}) - h^1(-mC-nF) + h^0(-mC-nF)$$

où χ dénote la caractéristique d'Euler-Poincaré et h^i les nombres de Betti du faisceau associé au diviseur; évidemment, $h^0(-mC-nF)=0$.

On vérifie facilement que, si m est donné, alors le diviseur $mC+nF$ est 1-connexe (dans le sens de [13, Chap. II §12.1]) et son auto-intersection est positive pour tout n assez grand. Il en résulte que:

$$h^1(-mC-nF) = 0$$

[13, chap. IV cor. (8.2)]. On en déduit que pour chaque $m\in\boldsymbol{N}$:

$$h^0(D_{m,n}) = \chi(D_{m,n})$$

pour tout $n \in \boldsymbol{N}$ assez grand.

D'autre part, par Riemann-Roch:

$$\chi(D_{m,n}) = \frac{1}{2}[m^2 C.C + m(2n + K.C)] + \chi_X$$

où le dernier terme est la caractéristique du faisceau structurel de X. Donc,

$$\chi(D_{m+1,n}) - \chi(D_{m,n}) = \frac{2m+1}{2} C.C + n + \frac{1}{2} K.C$$

Alors, pour chaque $m \in \boldsymbol{N}$, $h^0(D_{m+1,n}) > h^0(D_{m,n})$ pour tout $n \in \boldsymbol{N}$ assez grand. En particulier, il existe $n \in \boldsymbol{N}$ tel que:

$$h^0(D_{3,n}) > h^0(D_{2,n}) > h^0(D_{1,n}),$$

d'où aussitôt, qu'ils existent: $t, v \in \boldsymbol{C}(X)$ tels que

$$\operatorname{div} t + D_{2,n} \quad \text{et} \quad \operatorname{div} v + D_{3,n}$$

sont effectifs mais

$$\operatorname{div} t + D_{1,n} \quad \text{et} \quad \operatorname{div} v + D_{2,n}$$

ne le sont pas. On voit facilement que t, v satisfont les conditions voulues.[]

(2.2) LEMME.- *Dans les mêmes hypothèses de (2.1), on suppose encore $\boldsymbol{C}(B) \subset \boldsymbol{C}(X)$ par composition avec h. Alors, il existe $t, u \in \boldsymbol{C}(X)$ tels que:*

a) si F est une fibre générique de h, $t|F: F \to \boldsymbol{P}_1$ est holomorphe de degré 2 et ∞ est l'un de ses valeurs critiques;

b) $u^2 = P(t)$, où $P(t)$ est un polynôme séparable de degré trois à coefficients dans $\boldsymbol{C}(B)$;

c) $\boldsymbol{C}(X)$ est engendré par t et u sur $\boldsymbol{C}(B)$:

$$\boldsymbol{C}(X) = \boldsymbol{C}(B)(t)[u].$$

Preuve. Soient t, v comme dans (2.1). Alors $t|F: F \to \boldsymbol{P}_1$ est holomorphe de degré 2 (avec un seul pôle) si F est une fibre générique de h. Donc, l'application rationnelle:

$$h \times t: X \to B \times \boldsymbol{P}_1$$

est dominante de degré 2. On en déduit que:

$$[\boldsymbol{C}(X):\boldsymbol{C}(B)(t)] = 2.$$

Alors, $$\boldsymbol{C}(X) = \boldsymbol{C}(B)(t)[v]$$

car $v \notin \boldsymbol{C}(B)(t)$: en effet, le pôle de $v|F$ est d'ordre 3 d'aprés (2.1).

Soit v' le conjugué de v comme élément de l'extension $\boldsymbol{C}(X)/\boldsymbol{C}(B)(t)$; posons $u = v - v'$. On voit que:

$$\boldsymbol{C}(X) = \boldsymbol{C}(B)(t)[u] \quad \text{et} \quad u^2 \in \boldsymbol{C}(B)(t);$$

de plus, si F est une fibre générique de h et si $x, x' \in F$ sont tels que $t(x) = t(x')$ alors:

$$u(x) + u(x') = 0.$$

Écrivons:

$$u^2 = P(t)/Q(t) \quad \text{avec} \quad P(t), Q(t) \in \boldsymbol{C}(B)[t].$$

Puisque F est elliptique, $(u|F)^2$ est un polynôme séparable de degré 3 en $(t|F)$ à coefficients complexes. On en déduit, d'abord, que le reste de la division de P

par Q dans $\boldsymbol{C}(B)[t]$ est nul. On peut, donc, supposer que $u^2=P(t)$. On voit, ensuite, que P est séparable et de degré 3 .[]

(2.3) THÉORÈME.- *Soit $h: X\to B$ une surface fibrée dont les fibres génériques sont isomorphes et de genre 1 et telle que X est une variété algébrique. Alors, il existe une surface de Riemann compacte A , une application analytique finie $\gamma: A\to B$ et une image réciproque régulière (Y,k,Γ) (déf. III(2.1)) de h par γ avec les propriétés suivantes:*

a) il existe $t\in\boldsymbol{C}(Y)$ et $\delta\in\boldsymbol{C}$, $\delta\neq 0,1$, tels que si F est une fibre générique de k alors $t|F: F\to\boldsymbol{P}_1$ est holomorphe de degré 2 et ses valeurs critiques sont $0,1,\delta,\infty$;

b) il existe $u\in\boldsymbol{C}(Y)$ tel que

$$u^2 = t(t-1)(t-\delta) ;$$

c) si on considère $\boldsymbol{C}(A)\subset\boldsymbol{C}(Y)$ par composition avec k , $\boldsymbol{C}(Y)$ est engendré par t et u sur $\boldsymbol{C}(A)$:

$$\boldsymbol{C}(Y) = \boldsymbol{C}(A)(t)[u] .$$

Preuve. Par III(2.6) on peut supposer que h admet une section analytique $\sigma: B\to X$. Soient t,u les fonctions méromorphes données par (2.2). Choisissons $l\in\boldsymbol{C}(B)$ non-constante et posons $g=l\circ h$. Alors,

$$t,g: X\to\boldsymbol{P}_1$$

sont des applications rationnelles, holomorphes sur un ouvert $U\subset X$ tel que $X-U$ est un ensemble fini. Considérons:

$$L = \{x\in U : dt(x) \text{ et } dg(x) \text{ ne sont pas indépendantes}\} .$$

Alors L est un sous-ensemble analytique de U dont l'adhérence dans X est un sous-ensemble analytique de X . Il en résulte qu'il existe une courbe algébrique projective $K\subset X$ telle que:

i) $h|K: K\to B$ est finie et

ii) si F est une fibre générique de h , alors $F\cap K$ est l'ensemble des points critiques de $t|F$.

Par la formule de Hurwitz, $t|F$ a quatre points critiques. Donc, deg $h|K = 4$.

D'après III(2.5), il existe une surface de Riemann compacte A , une application analytique finie $\gamma: A\to B$ et une image réciproque régulière (Y,k,Γ) de h par γ telle que l'image réciproque K' de K dans Y (déf. III (2.4)) est formée par quatre sections différentes $\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_\infty$ de k . Par abus, on désigne $t\circ\Gamma$ et $u\circ\Gamma$ encore par t et u respectivement; on a $t,u\in\boldsymbol{C}(Y)$. Maintenant, si $F_a=k^{-1}(a)$ avec $a\in A$ générique, alors

$$t|F_a: F_a\to\boldsymbol{P}_1$$

est holomorphe de degré 2 et ses points critiques sont:

$$\sigma_0(a),\sigma_1(a),\sigma_2(a),\sigma_\infty(a) \quad \text{où} \quad t(\sigma_\infty(a)) = \infty .$$

En plus,

$$\boldsymbol{C}(Y) = \boldsymbol{C}(A)(t)[u] ,$$

d'aprés III (2.7), et

$$u^2 = pt^3 + qt^2 + rt + s$$

avec $p,q,r,s\in\boldsymbol{C}(A)$ et $p\neq 0$. Puisque F_a est elliptique, les racines de:

$$p(a)t^3 + q(a)t^2 + r(a)t + s(a) = 0$$

sont $\sigma_0(a), \sigma_1(a), \sigma_2(a)$.

Soit $t_0 = t^\circ\sigma_0 \in \boldsymbol{C}(Y)$. En remplaçant t par $t - t_0^\circ k$ on voit qu'on peut supposer que $t_0 = 0$; posons $t_1 = t^\circ\sigma_1$. En remplaçant t par $t/(t_1^\circ k)$ on voit qu'on peut supposer que $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$. Alors, d'aprés l'hypothèse et [21, chap. IV §4]:

$$t_2 = t^\circ\sigma_2 = \delta$$

où δ est une constante différente de 0 et 1 . Donc,

$$u^2 = pt(t-1)(t-\delta) .$$

En prenant éventuellement une nouvelle image réciproque régulière on peut supposer que $p = m^2$ avec $m \in \boldsymbol{C}(A)$ (voir III (2.7)). Pour compléter la preuve on remplace u par u/m .[]

3. Les équations de genre 1 dans la classe de Fuchs. Dans ce paragraphe on montrera comment ramener les équations de genre 1 dans la classe de Fuchs à des feuilletages d'un produit $A \times E$ (où A est une surface de Riemann compacte et E est une courbe elliptique) qui sont de Riccati relativement à la projection canonique $A \times E \to A$. Dans le §4, on déterminera ces feuilletages.

(3.1) PROPOSITION.- *Supposons que l'équation (*) est de genre* 1 *et appartient à la classe de Fuchs. Alors, il existe une surface de Riemann compacte* A *, une application holomorphe finie* $\lambda: A \to \boldsymbol{P}_1$ *, un nombre complexe* $\delta \neq 0,1$ *et une application rationnelle* $\Lambda: A \times E \to \boldsymbol{P}_1^3$ *, où* $E \subset \boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{C})$ *est la courbe elliptique d'équation affine:*

$$u^2 = t(t-1)(t-\delta) ,$$

avec les propriétés suivantes:
le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \times E \arrow[r, "\Lambda"] \arrow[d] & \boldsymbol{P}_1^3 \arrow[d] \\ A \arrow[r, "\lambda"] & \boldsymbol{P}_1 \end{tikzcd}$$

commute, ou les flèches verticales sont les projections canoniques sur le premier facteur, et pour tout $a \in A$ *générique,* $\lambda(a) \in \boldsymbol{C}$ *et* Λ *applique birationnellement* $E = \{a\} \times E$ *sur une composante irréductible de la courbe*

$$\{F(\gamma(a), y, z) = 0\} \subset \{\gamma(a)\} \times \boldsymbol{P}_1^2 .$$

Preuve. On reprend les considérations de II, §3. La surface fibrée $h: X \to B$ satisfait aux hypothèses de (2.3) parce que les fibres régulières sont elliptiques

(II(3.4) et II(3.5)) et que le feuilletage est transverse aux fibres génériques (II(3.13), II(3.14) et II(3.15); voir aussi annexe §6). Soient A,γ,δ et (Y,k,Γ) donnés par (2.3). Considérons l'application rationnelle:

$$\theta: Y \to A\times E \quad , \quad \theta(y) = (k(y),(t(y),u(y))) .$$

D'aprés (2.3)c, θ est birationnelle. On définit:

$$\Lambda = \pi^\circ\Gamma^\circ\theta^{-1} \quad , \quad \lambda = \varphi^\circ\gamma$$

(voir diagramme du chap. II §3). On conclut par II(3.4).[]

(3.2) OBSERVATION.- La proposition (3.1) nous dit qu'on peut paramétriser les courbes $F(x,y,z)=0$, où l'on considère x=cte., par des fonctions:

$$y = A(x,t) + B(x,t)\sqrt{t(t-1)(t-\delta)} \quad , \quad z = C(x,t) + D(x,t)\sqrt{t(t-1)(t-\delta)}$$

où A,B,C,D sont des fonctions rationnelles en t à coefficients des fonctions algébriques en x .

Reprenons les notations et définitions du chap. II §3 et supposons que l'équation est de genre 1 et qu'elle appartient à la classe de Fuchs. Soient A,λ,Λ,δ et E comme dans la proposition (3.1). Soit

$$\Lambda': A\times E \to \boldsymbol{P}_1^2$$

la composition de Λ avec la projection canonique:

$$\boldsymbol{P}_1^3 = \boldsymbol{P}_1^2 \times \boldsymbol{P}_1 \to \boldsymbol{P}_1^2 .$$

$P,Q\in \boldsymbol{C}[x,y,z]$ désignent encore les polynômes considérés dans l'équation (*) du chap. II §1.

(3.3) THÉORÈME.- *a) l'équation de Pfaff*

$$\Lambda^*(P(x,y,z)dx - Q(x,y,z)dy) = 0$$

n'est pas triviale; notons $\mathcal{G}$ *le feuilletage analytique à singularités isolées de* $A\times E$ *défini par cette équation.*

b) $\mathcal{G}$ *est de Riccati relativement à la projection canonique* $A\times E\to A$*;*

c) pour $a\in\boldsymbol{C}$ *générique et tout* $b\in\boldsymbol{P}_1$ *, si* $\Sigma\not\subset\Delta$ *est le support d'une solution par* $q=(a,b)$ *de (*), il existe une séparatrice locale* Ω *de* $\mathcal{G}$ *en un point* $p\in A\times E$ *tel que* Λ' *est définie en* p *,* $\Lambda'(p)=q$ *et* $\Lambda'(\Omega)=\Sigma$*;*

d) si $C\not\subset\Delta$ *est une solution algébrique de (*), il existe une courbe algébrique projective irréductible* $K\subset A\times E$ *invariante par* $\mathcal{G}$ *telle que l'image de* K *par* Λ' *est l'adhérence de* C *dans* $\boldsymbol{P}_1^2$ *;*

e) s'il existe dans $A\times E$ *une infinité de courbes algébriques projectives irréductibles invariantes par* $\mathcal{G}$ *, l'équation (*) admet une intégrale première rationnelle.*

Preuve. On déduit (3.3) de (3.1) par le même raisonnement de la preuve de III(4.4).[]

4. Séparation de variables. Soient A une surface de Riemann compacte, $E\subset \boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{C})$ la courbe elliptique définie par l'équation affine:

$$u^2 = t(t-1)(t-\delta) \quad , \qquad \delta \in \boldsymbol{C} - \{0,1\} .$$

et G un feuilletage analytique à singularités isolées de $Y=A\times E$.
Soient $p: Y\to A$, $q: Y\to E$ les projections canoniques. Par composition avec p,q on considère $\boldsymbol{C}(A)\subset\boldsymbol{C}(Y)$ et $\boldsymbol{C}(E)\subset\boldsymbol{C}(Y)$ (dans la notation du début du §2).

Comme Y est une variété algébrique, G est défini par une équation de Pfaff $\theta=0$ où θ est une 1-forme méromorphe sur Y, non-nulle.

Rappelons que dt/u est une 1-forme holomorphe sur E.

(4.1) PROPOSITION.- *Soit* $x\in\boldsymbol{C}(A)$ *non-constante. Si* G *est de Riccati relativement à* p *(déf. II(2.8)) alors:*

$$\theta = f dx - \frac{dt}{u} \qquad \text{avec} \qquad f \in C(A)$$

Preuve. On a:

$$\theta = g dx - h\frac{dt}{u} \quad , \qquad g,h \in C(Y)$$

Comme G n'est pas la fibration p, $h\neq 0$. Alors, on peut supposer:

$$\theta = f dx - \frac{dt}{u} \quad , \qquad f \in C(Y)$$

Prenons $a\in A$ générique. D'une part, x est holomorphe au voisinage de a et a n'est pas un point critique de x ; d'autre part, la fibre $E_a = p^{-1}(a)$ est transverse aux feuilles de G (II(3.14)), n'est pas contenue dans le support du diviseur de pôles de f et ne contient aucun des points où l'application rationnelle $f: Y\to \boldsymbol{P}_1$ n'est pas définie.
Par ailleurs, supposons que $\xi\in E_a$ est un pôle de $f|E_a$. Alors,

$$(((1/f)\theta)|E_a)(\xi) = 0 ,$$

ce qui implique que G est tangent à E_a au point ξ ; contradiction.
Il en résulte que $f|E_a$ est constante. Donc, $f\in\boldsymbol{C}(A)$.[]

(4.2) OBSERVATION.- On déduit de (4.1) et (3.3) qu'un changement de variables de la forme indiquée dans (3.2) ramène l'équation (*) à une équation de la forme:

$$f(x)dx = \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-\delta)}} \quad , \qquad \delta \in C - \{0,1\}$$

où f est une fonction algébrique de x.

(4.3) EXEMPLE.- $x^2(y')^2 - 2xyy' + (y^2 - 4y^3 + x^2y) = 0$.
On a:

$$D(x,y) = 4x^2y(4y^2 - x^2) .$$

Comme $y=0$, $x/2$, $-x/2$ sont des solutions de l'équation, de I(4.10), I(4.12) et I(2.6) suit que celle-ci est dans la classe de Fuchs. Si $a \in \boldsymbol{C}$ et $a \neq 0$, la courbe plane d'équation

$$a^2z^2 - 2ayz + (y^2 - 4y^3 + a^2y) = 0$$

est une cubique non-singulière. Donc, l'équation est de genre 1. On fait $y=tx$ et on obtient:

$$y = tx \quad , \quad z = t + \sqrt{x}\sqrt{4t^3 - t}.$$

Par ce changement de variables on obtient l'équation:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - t}}$$

Si $\wp(z)$ est la fonction de Weierstrass associée à l'équation

$$u^2 = 4t^3 - t$$

l'intégration de l'équation précédente nous donne:

$$t = \wp(2\sqrt{x} + c) \quad , \quad c \in \boldsymbol{C}.$$

Donc, la solution générale de l'équation donnée est:

$$y = x\wp(2\sqrt{x} + c) \ , \ c \in \boldsymbol{C} \ , \ y = 0 \ , \ x/2 \ , \ -x/2 \ .$$

La double périodicité de la fonction $\wp(z)$ implique que l'équation donnée n'a pas d'intégrale première rationnelle.

(4.4) LEMME.- *Supposons qu'il existe une courbe algébrique projective irréductible $K \subset Y$ invariante par* G *et telle que $p|K$ est finie. Alors, il existe une infinité de telles courbes.*

Preuve. D'aprés (4.1), l'équation de définition de G est invariante par les transformations:

$$(a,b) \to (a, T(b))$$

où T est une translation de E.

(4.5) THÉORÈME.- *Supposons que l'équation (*) est de genre* 1 *et appartient à la classe de Fuchs. S'il existe une solution algébrique qui n'est pas contenue dans Δ, alors l'équation possède une intégrale premiére rationnelle.*

Preuve. La preuve suit de (3.3)c, (4.4) et (3.3)d.[]

(4.6) EXEMPLE.- $(1 - x^4)(\dot{y})^2 - (1 - y^4) = 0$.

Puisque $y = 1, -1, i, -i$ sont des solutions, on vérifie par I(4.10), I(4.12), I(2.6) que l'équation donnée est dans la classe de Fuchs. Si $c \neq 0$ la quartique:

$$cz^2 - 1 + y^4 = 0$$

n'a qu'un point singulier à l'infini. On voit tout de suite que son genre est 1.

Par ailleurs, on a la solution algébrique $y=x$ qui n'est pas contenue dans Δ.

Par séparation de variables on obtient:

$$\int_0^y \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} \pm \int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = cte.$$

La formule d'addition d'Euler ([20, chap. I §2] nous donne l'intégrale première:

$$4x^2y^2(1-x^4)(1-y^4) - [\lambda^2(1+x^2y^2) - x(1-y^4) - y(1-x^4)]^2 = 0 .$$

(4.7) EXEMPLE.- On reprend l'équation binomiale dans la classe de Fuchs de l'exemple I(4.16) (comparer avec [3, §13.8]). Dans II(3.7) on a observé que ces équations sont de genre 1 dans les cas $F_1, F_{21}, F_{22}, F_{23}$.

F_1) On fait

$$t = \frac{y-b_1}{y-b_3}\frac{b_2-b_3}{b_2-b_1}$$

qui est la transformation de Möbius telle que :

$$b_1 \to 0 \ , \ b_2 \to 1 \ , \ b_3 \to \infty$$

Avec ce changement de variable dépendante, l'équation devient:

$$\frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-\delta)}} = \sqrt{c.\sqrt[n]{B(x)}}\,dx$$

où:

$$\delta = \frac{b_1-b_4}{b_3-b_4}\frac{b_2-b_3}{b_2-b_1} \qquad \text{et} \qquad c = (b_3-b_4)(b_1-b_2)$$

F_{21}) D'après ce qu'on a vu dans ce chapitre, on cherche à paramétriser la courbe:

$$z^{6n} = B(x)(y-b_1)^{5n}(y-b_2)^{4n}(y-b_3)^{3n}$$

comme dans (3.2). L'identité:

$$(y-b_1)^5(y-b_2)^4(y-b_3)^3 = (y-b_1)^3\frac{y-b_2}{y-b_1}\left[(y-b_1)(y-b_2)(y-b_3)\right]^3$$

suggère de faire:

$$t^3 = \frac{y-b_2}{y-b_1}$$

ce qui donne, en effet, une paramétrisation essentiellement du type (3.2). Ce changement de variable dépendante ramène l'équation à l'équation en variables séparées:

$$\frac{dt}{\sqrt{(b_1-b_3)t^3+(b_3-b_2)}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{(b_1-b_2)}\ .\sqrt[3n]{B(x)}\,dx$$

qui est essentiellement du type (4.2).

F_{22}) Considérant l'identité:

$$(y-b_1)^3(y-b_2)^3(y-b_3)^2 = (y-b_1)^2(y-b_2)^4(y-b_3)^2\,\frac{y-b_1}{y-b_2}$$

on fait:

$$t^2 = \frac{y-b_1}{y-b_2}$$

et l'équation devient:

$$\frac{dt}{\sqrt{(b_2-b_3)t^3+(b_3-b_1)t}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(b_2-b_1)}.\sqrt[2n]{B(x)}\,dx$$

F_{23}) Considérant l'identité:

$$(y-b_1)^2(y-b_2)^2(y-b_3)^2 = (y-b_1)^6\left[\frac{(y-b_2)(y-b_3)}{(y-b_1)^2}\right]^2$$

on fait:

$$(1) \qquad (y-b_2)(y-b_3) = t^3(y-b_1)^2$$

Le discriminant de cette équation en y est:

$$D = 4(b_1{}^2 + b_2b_3 - b_1b_2 - b_1b_3)t^3 + (b_2 - b_3)^2$$

Alors,

$$(2) \qquad y = \frac{2b_1t^3 - (b_2+b_3) + \sqrt{D}}{2(t^3-1)}$$

et

$$(3) \qquad z = \sqrt[3n]{B(x)}(y-b_1)^2 t^2$$

En dérivant (1) par rapport à x on obtient:

$$(2y - b_2 - b_3)y' - 2t^3(y - b_1)y' = 3t^2(y - b_1)^2 t'.$$

En remplaçant (2) dans cette équation il résulte:

$$\sqrt{D}y' = 3t^2(y-b_1)^2 t'$$

Finalement, puisque $y'=z$, de (3) on déduit:

$$\frac{dt}{\sqrt{D}} = \tfrac{1}{3}\sqrt[3n]{B(x)}dx \ .$$

* * *

Annexe: FEUILLETAGES ET ÉQUATIONS DE PFAFF SUR LES SURFACES ANALYTIQUES

1. Feuilletages réguliers. Soit X une surface analytique complexe, régulière. Pour $p \in X$, on dénote $Tp(X)$ l'espace tangent de X en p.

(1.1) DÉFINITION. *Un* <u>*champ analytique*</u> *L de* <u>*droites tangentes*</u> *à X est une correspondance $p \to L_p$, $p \in X$, où $L_p \subset T_p(X)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1, telle que pour tout $q \in X$ il existe une 1-forme ω holomorphe et jamais nulle sur un voisinage ouvert U de q telle que $L_p = Ker\ \omega(p)$ pour tout $p \in U$. Dans cette situation, on dit que $\omega = 0$ est une* <u>*équation locale*</u> *de L.*

Le problème qui se pose quand on a un tel champ L est d'étudier la famille des courbes analytiques de X tangentes à L.

(1.2) DÉFINITION. *Une* <u>*courbe tangente*</u> *à L est un couple (Σ, φ) où Σ est une surface de Riemann et $\varphi : \Sigma \to X$ est une application analytique et injective telle que $d\varphi(u)(T_u(\Sigma)) = L_{\varphi(u)}$ pour tout $u \in \Sigma$ (c'est-à-dire φ est une immersion).*

(1.3) LEMME. *Soit (Σ_1, φ_1) une courbe tangente à L et soit $\varphi_2 : \Sigma_2 \to X$ une immersion injective de la surface de Riemann Σ_2. Supposons que $\varphi_2(\Sigma_2) \subset \varphi_1(\Sigma_1)$. Alors $V = \varphi_1^{-1}\varphi_2(\Sigma_2)$ est un ouvert de Σ_1 et l'application $\Theta : V \to \Sigma_2$ définie par restriction de $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ à V est holomorphe et bijective. En particulier (Σ_2, φ_2) est une courbe tangente à L.*

Preuve. Que Θ est bien définie et bijective résulte du fait que φ_1 et φ_2 sont injectives. Comme φ_1 est une immersion, elle admet une inverse locale à gauche, holomorphe au voisinage de chaque point de $\varphi_1(\Sigma_1)$. Cela implique que l'application $\varphi_1^{-1}\varphi_2 : \Sigma_2 \to \Sigma_1$ est holomorphe; comme elle est aussi injective, son image est un ensemble ouvert. Finalement, Θ est holomorphe parce que φ_2, étant une immersion, admet une inverse locale à gauche qui est holomorphe au voisinage de chaque point de $\varphi_2(\Sigma_2)$. []

(1.4) OBSERVATION. Dans le cas où $\varphi_1(\Sigma_1) = \varphi_2(\Sigma_2)$, le lemme précédent nous dit qu'une courbe tangente à L est essentiellement déterminée par son image dans X.

(1.5) DÉFINITION. *Un sous-ensemble F de X est une* <u>*feuille tangente*</u> *à L s'il est l'image d'une courbe tangente à L et il n'est strictement contenu dans l'image d'aucune courbe tangente à L. L'ensemble des feuilles tangentes à L est un* <u>*feuilletage régulier*</u> *de X (défini par L). Si $p \in F$, L_p est la* <u>*droite tangente*</u> *à F*

en p. Le champ L est le <u>*champ tangent aux feuilles*</u> *du feuilletage. Une* <u>*courbe tangente au feuilletage*</u> *est une courbe tangente à L .*

(1.6) EXEMPLE. Soient S une surface de Riemann et $g:X\to S$ une application analytique telle que $dg(p)$ est surjectif pour tout $p\in X$. Alors, l'application qu'à $p\in X$ associe $L_p=Ker\ dg(p)$, définit un champ analytique de droites tangentes à X dont les feuilles sont les composantes connexes des fibres de g.

(1.7) PROPOSITION. *Pour chaque $p\in X$ il existe un voisinage U de p et un difféomorphisme analytique $\alpha: \Delta\times\Delta\to U$, où $\Delta\subset \mathbf{C}$ est un disque ouvert, tel que*

a) pour chaque $v\in\Delta$, l'application $\alpha_v: \Delta\to X$ définie par $\alpha_v(u)=\alpha(u,v)$, $u\in\Delta$, est une courbe tangente à L ;
b) si (Σ,φ) est une courbe tangente à L et $\varphi(\Sigma)\subset U$, alors il existe $v\in\Delta$ tel que $\varphi(\Sigma)\subset\alpha(\Delta\times\{v\})$ et $\varphi(\Sigma)$ est ouvert dans $\alpha(\Delta\times\{v\})$.

Preuve. Soit $\omega=0$ une équation locale de L au voisinage de p. Si (x,y) est un systéme de coordonnées locales de X centré en p on a

$$\omega = a(x,y)dx+b(x,y)dy$$

où a,b sont des fonctions holomorphes au voisinage de $0\in\mathbf{C}^2$ et

$$|a(x,y)|+|b(x,y)|>0 .$$

Supposons, par exemple, que $b(0,0)\neq 0$. Alors toute solution analytique $y=y(x)$ au voisinage de 0 de l'équation

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{a(x,y)}{b(x,y)}$$

détermine une courbe tangente à L. Par conséquent, a) suit du théorème d'existence, unicité et dépendance analytique des conditions iniciales des solutions d'une équation différentielle analytique ordinaire (voir [10] ou [3]).

Par un argument de connexité, pour prouver la première affirmation de b), il suffit de considérer le cas où $\Sigma=D\subset\mathbf{C}$ est un disque de centre 0. Soient $(x(t),y(t))$ les coordonnées de $\varphi(t)$, $t\in D$, où $x=x(t)$, $y=y(t)$ sont des fonctions analytiques sur D et $|x'(t)|+|y'(t)|>0$. Alors

$$a(x(t),y(t))x'(t)+b(x(t),y(t))y'(t) = 0 \ , \quad t\in D.$$

Comme on peut supposer $b(x,y)\neq 0$ en tout point de U, on a que $x'(t)\neq 0$ pour tout $t\in D$. Pour chaque $t_0\in D$, la fonction $x=x(t)$ admet une inverse locale analytique $t=t(x)$ au voisinage de $x_0=x(t_0)$. On voit tout de suite que $y=y(t(x))$ est une solution de (1). D'après le théorème d'unicité cité plus haut, il existe un voisinage $U(t_0)\subset D$ de t_0 et $v_0\in\Delta$ tels que le point de U coordonnées $(x(t),y(t))$ appartient à $\alpha(\Delta\times\{v_0\})$ pour tout $t\in U(t_0)$.

La premiére affirmation de b) en résulte aussitôt.

D'après (1.3), l'ensemble $\alpha_v^{-1}(\varphi(\Sigma))=\alpha^{-1}(\varphi(\Sigma))$ est un ouvert de $\Delta\times\{v\}$. Comme α est un homéomorphisme, $\varphi(\Sigma)$ est un ouvert de $\alpha(\Delta\times\{v\})$. []

(1.8) COROLLAIRE. *Soient* (Σ_1, φ_1), (Σ_2, φ_2) *deux courbes tangentes à L. On a les assertions suivantes :*

a) l'ensemble $V = \varphi_1^{-1}(\varphi_2(\Sigma_2))$ *est un ouvert de* Σ_1 *;*
b) l'application $(\varphi_2^{-1})^{\circ}(\varphi_1|V)$: $V \to \Sigma_2$ *est analytique ;*
c) l'intersection $\varphi_1(\Sigma_1) \cap \varphi_2(\Sigma_2)$ *est une réunion disjointe d'images de courbes tangentes à L.*

Preuve. a) Soit $\xi \in V$; notons $p = \varphi_1(\xi)$ et $\eta = \varphi_2^{-1}(p)$. Prenons un disque ouvert $\Delta \subset \boldsymbol{C}$, un voisinage U de p dans X et un difféomorphisme analytique $\alpha : \Delta \times \Delta \to U$ satisfaisant a) et b) de la proposition (1.7). Soit $v \in \Delta$ un point tel que $p \in \alpha(\Delta \times \{v\})$.

Soient V_1, V_2 des voisinages ouverts de ξ, η dans Σ_1, Σ_2 respectivement, tels que $\varphi_1(V_1) \subset U$ et $\varphi_2(V_2) \subset U$.

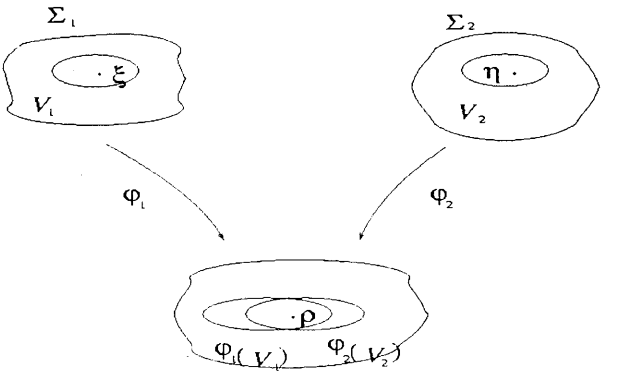

Figura A.1

Comme $(V_1, \varphi_1|V_1)$ *et* $(V_2, \varphi_2|V_2)$ sont des courbes tangentes à L, on a

$$\varphi_1(V_1) \cup \varphi_2(V_2) \subset \alpha(\Delta \times \{v\}).$$

Par ailleurs, puisque $\varphi_2(V_2)$ est ouvert dans $\alpha(\Delta \times \{v\})$, l'ensemble $\varphi_1(V_1) \cap \varphi_2(V_2)$ est ouvert dans $\varphi_1(V_1)$. Alors,

$$W = (\varphi_1|V_1)^{-1}(\varphi_1(V_1) \cap \varphi_2(V_2))$$

est ouvert dans V_1 ; donc il l'est aussi dans Σ_1. En plus, $\xi \in W \subset V$, ce qui prouve (a).

b),c). Soit $V = \{W_i\}_{i \in I}$ la décomposition de V en composantes connexes. Chaque paire $(W_i, \varphi_i|W_i)$, avec $i \in I$, est une courbe tangente à L. Alors, il suit de (1.3) que $(\varphi_2^{-1})^{\circ}\varphi_1|W_i$ est holomorphe pour tout $i \in I$, car l'inverse d'une application holomorphe bijective est holomorphe. Ceci implique b). Finalement, on a évidemment

$$\varphi_1(\Sigma_1) \cap \varphi_2(\Sigma_2) = \varphi_1(V) = \cup_{i \in I}\, \varphi_1(W_i),$$

ce qui entraîne c). []

(1.9) THÉORÈME. *On a les assertions suivantes :*

a) Les feuilles d'un feuilletage régulier de X sont des ensembles connexes par arcs, deux-à-deux disjoints et dont la réunion est X. L'image d'une courbe tangente aux feuilles est contenue dans une feuille.

b) La relation d'équivalence définie par la décomposition de X en feuilles est ouverte.

Preuve. On définie sur X une nouvelle topologie, et on note X' l'ensemble X muni de celle-ci. Une base d'ouverts de X' est formée par les images de toutes les courbes tangentes au champ L qui définissent le feuilletage.

Il résulte de (1.7) et (1.8)c que la famille des images des courbes tangentes à L satisfait les conditions pour être une base d'ouverts d'une topologie sur X et que cette topologie est plus fine que celle donnée sur X.

(a) Il suffit de démontrer que les feuilles sont les composantes connexes de X' (que chaque feuille soit connexe par arcs résulte du fait que les feuilles sont des images continues de surfaces de Riemann, par définition).

Observons d'abord que si (Σ,φ) est une courbe tangente à L, alors $\varphi:\Sigma\to X'$ est continue d'après (1.8)a. Donc $\varphi(\Sigma)$ est connexe dans X'; en particulier, toute feuille est contenue dans une composante connexe de X'. Pour compléter la preuve de a) il suffit de prouver que toute composante connexe de X' est l'image d'une courbe tangente à L.

Soit F une composante connexe de X' munie de la topologie induite par celle de X'. On va munir F d'une structure de surface de Riemann telle que (F,i) est une courbe tangente à L où $i: F\to X$ dénote l'inclusion. Pour ce faire, on prend comme cartes locales de cette structure, les couples (Δ,φ) où $\Delta\subset\boldsymbol{C}$ est un disque ouvert avec $\varphi(\Delta)\subset F$ et (Δ,φ) est une courbe tangente. D'après (1.7)a et ce qu'on vient de voir, ces cartes locales sont des homéomorphismes sur des ouverts de F et recouvrent F. Par (1.8)b, les fonctions de transition sont analytiques. Ceci complète la preuve de de l'assertion a).

b) On note $\sim$ la relation d'équivalence et pour tout $S\subset X$ on désigne par $S^{\sim}$ le saturé de S par $\sim$. Il résulte de la proposition (1.7) que X peut être recouvert par une famille $\mathcal{R}$ d'ouverts telle que si $U\in\mathcal{R}$, alors pour tout $p,q\in U$ avec $p\sim q$ et pour tout voisinage ouvert $V_p\subset U$ de p, on a que q est intérieur à $V_p^{\sim}$.

Considérons, maintenant, un ouvert quelconque $U\subset X$ et soit $p\in U$, $q\in X$, $p\sim q$. Par (a) il existe un chemin continu $\gamma:[0,1]\to X$ tel que $\gamma(0)=p$, $\gamma(1)=q$ et $\gamma(t)\sim p$ pour tout $t\in[0,1]$. Il existe une partition $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$ telle que

$$\gamma([t_{j-1},t_j])\subset U_j\in\mathcal{R},\quad 1\le j\le n.$$

On voit par récurrence que $\gamma(t_j)$ est intérieur à $U^{\sim}$ pour $j=1,\ldots,n$. Donc, q est aussi un point intérieur à $U^{\sim}$ []

(1.10) EXEMPLE. Soit $X\subset\boldsymbol{C}^2$ un ouvert connexe et soit ω une 1-forme holomorphe jamais nulle sur X. Alors $p\to Ker\ \omega(p)$ définit un champ analytique

de droites tangentes à X. Supposons que $d\omega=0$. Par intégration de ω on obtient une fonction multiforme f sur U. Les composantes connexes des courbes de niveau de chaque détermination uniforme locale de f sont des images de courbes tangentes à L. On peut intérpreter les feuilles du feuilletage défini par L comme étant les ``courbes de niveau'' de f.

(1.11) DÉFINITION. *Soit F une feuille du feuilletage défini par L. Soit (Σ,φ) une courbe tangente à L telle que $\varphi(\Sigma)=F$. On définit la topologie fine de F comme étant celle dont les ouverts sont les ensembles $\varphi(U)$ pour U ouvert de Σ (elle est bien définie : voir Obs. (1.4)). Si la topologie fine de F coïncide avec celle induite par X on dit que F est une feuille propre.*

(1.12) LEMME. *Soit $W\subset X$ un ouvert. Alors les feuilles du feuilletage de W défini par $L|W$ sont les composantes connexes, pour la topologie fine, de l'intersection avec W des feuilles du feuilletage de X défini par L.*

(1.13) DÉFINITION. *Dans les condition de (1.12), on dit que le feuilletage de W est la restriction de celui de X.*

Preuve de (1.12). Soit F une feuille de X. Il est claire, par définition, que chaque composante connexe F_i de $F\cap W$, pour la topologie finie de F, est l'image d'une courbe tangente à $L|W$.

Si C est l'image d'une courbe tangente à L et $F_i\subset C\subset W$ alors C est ouvert et connexe dans $F\cap W$ pour la topologie finie de F par (1.7)a et (1.8)a. Alors $F_i=C$, ce qui complète la preuve.[]

D'après les définitions ci-dessus on obtient tout de suite le lemme suivant.

(1.14) LEMME. *Soit $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement de X par des ouverts connexes. Supposons donné un feuilletage régulier $\mathfrak{I}_i$ de chaque U_i de tel façon que*

$$\mathfrak{I}_i|(U_i\cap U_j)=\mathfrak{I}_j|(U_i\cap U_j),\ \textit{pour tout } i,j\in I.$$

Alors, il existe un feuilletage régulier $\mathfrak{I}$ de X tel que $\mathfrak{I}|U_i=\mathfrak{I}_i$, pour tout $i\in I$.

(1.15) OBSERVATION. X est une variété réelle de dimension 4. Tout feuilletage régulier de X définit un feuilletage réel de X de dimension 2 (voir [19]).

Le lemme suivant sera utilisé plus tard.

(1.16) LEMME. *Supposons donné un feuilletage régulier de X. Soit Y un espace topologique localement connexe et soit $f:Y\to X$ une application continue telle*

que $f(Y)$ est contenu dans une feuille F. Alors $f:Y\to F$ est continue pour la topologie fine de F.

Preuve. On peut supposer que Y est connexe et que $f(Y)\subset U$ où U est un ouvert comme dans la proposition (1.7).

Par définition de la topologie fine, $F\cap\alpha(\{0\}\times\Delta)$ est un sous-ensemble discret de F pour la topologie fine. En particulier, cet ensemble est dénombrable. Alors

$$F\cap U=\alpha(\Delta\times S)$$

où $S\subset\Delta$ est un ensemble dénombrable. Il en résulte que chaque composante connexe de $F\cap U$, pour la topologie induite par celle de X, est de la forme $\alpha(\Delta\times\{v\})$, $v\in\Delta$. Alors, $f(Y)\subset\alpha(\Delta\times\{v_0\})$ pour un $v_0\in\Delta$. Comme la toplogie fine de F et la topologie de M induisent la même topologie sur $\alpha(\Delta\times\{v_0\})$ le lemme en résulte aussitôt.[]

2. Feuilletages à singularités isolés. Comme au § 1 X dénote une surface analytique régulière.

(2.1) DÉFINITION. *Un feuilletage à singularités isolées de X est un feuilletage régulier $\mathfrak{F}$ de $X-S$, où S est un sous-ensemble discret et fermé de X.*

(2.2) DÉFINITION. *Un point $p\in S$ est un point singulier de $\mathfrak{F}$ s'il n'existe pas de feuilletage régulier sur $(X-S)\cup\{p\}$ dont la restriction à $X-S$ soit $\mathfrak{F}$.*

D'après (1.14), on peut supposer que chaque point de S est un point singulier de $\mathfrak{F}$. Si S est vide, on a donc un feuilletage régulier de X.

(2.3) THÉORÈME. *Soit p un point singulier de $\mathfrak{F}$. Alors, il existe un voisinage ouvert connexe V de p et une 1-forme holomorphe ω sur V tels que:*

a) si $q\in V$ et $q\neq p$ alors q est non-singulier pour $\mathfrak{F}$;
b) $\omega(p)=0$;
c) $\omega(q)\neq 0$ si $q\in V$, $q\neq p$ et le champ de droites $L_q=Ker\ \omega(q)$ $(q\in V-\{p\})$ est celui de droites tangentes aux feuilles de $\mathfrak{F}|(V-\{p\})$.

Preuve. Soit $U\ni p$ un ouvert connexe, domain d'un système de coordonnées locales (x,y) de X centré en p et tel que $\mathfrak{F}|(V-\{p\})$ est une feuilletage régulier défini par un champ de droites L. Alors

$$U-\{p\}=\cup_{i\in I}\,U_i,$$

où les U_i sont des ouverts connexes, et dans chaque U_i on a une 1-forme holomorphe jamais nulle ω_i telle que

$$L_p=Ker\ \omega_i(p),\ \text{pour tout } q\in U_i.$$

Ceci entraîne que

$$Ker\ \omega_i(q)=Ker\ \omega_j(q) \text{ si } q\in U_i\cap U_j \quad (i,j\in I).$$

Donc $\omega_i\wedge\omega_j=0$ sur $U_i\cap U_j$.

Écrivons

$$\omega_i=a_i(x,y)dx + b_i(x,y)dy\ ;$$

alors $a_ib_j-a_jb_i=0$ sur $U_i\cap U_j$. Supposons, par exemple, $b_j\neq 0$. Par connexité de $U-\{p\}$ on a que $b_j\neq 0$ pour tout $i\in I$. Alors $h_i=a_i/b_i$ est une fonction méromorphe sur U_i *et*

$$h_i\,|\,(U_i\cap U_j)= h_j\,|\,(U_i\cap U_j),\ \ i,j\in I.$$

Donc, il existe h méromorphe sur $U-\{p\}$ tlle que $h_i\,|\,U_i=h$ pour tout $i\in I$. On sait que h se prolonge à une fonction méromorphe sur U, qu'on notera encore h [9, vol. II theor. O6).

Il existe un voisinage ouvert et connexe V de p tel que $h\,|\,V=f/g$ où f,g sont des fonctions holomorphes sur V et ne s'annulent pas simultanément en-dehors de p. Considérons la 1-forme

$$\omega=f(x,y)dx+g(x,y)dy\ ;$$

qui est holomorphe sur V et non nulle sur $V-\{p\}$. Par construction on a $\omega\wedge\omega_i=0$ sur $U_i\cap V$, ce qui implique

$$Ker\ \omega(q)=Ker\ \omega_i(q)=L_q \text{ si } q\in U_i\cap V.$$

On en déduit que

$$Ker\ \omega(q)=L_q \text{ pour } q\in V-\{p\}.$$

Finalement, $\omega(p)=0$ parce que p est un point singulier de $\mathfrak{F}$. []

(2.4) EXEMPLE. Supposons X connexe , soit B une surface de Riemann et soit $h:X\to B$ holomorphe, propre et non-constante. On note $X_b=h^{-1}(b)$ la *fibre* de h au-dessus du point $b\in B$.

Si p est un point régulier de la courbe X_b on pose

$$L_p=T_p(X_b).$$

Soit z une coordonnée locale de B centrée en b et soit $\varphi=z^o h$. Comme le germe en p de l'ensemble $\varphi=0$ est régulier, $\varphi=\theta^k$ où θ est holomorphe au voisinage de p, s'annule en p et $d\theta(p)\neq 0$. Alors, les ensembles $\theta=cte.$ sont réguliers au voisinage de p. Donc, q est un point régulier de $X_{h(q)}$ pour tout q au voisinage de p et $L_q=Ker\ d\theta(q)$.

Le fait que h est propre montre tout de suite que l'ensemble S des points singuliers des courbes X_b, $b\in B$, est fermé et discret dans X, et que L est un champ analytique de droites tangentes à $X-S$.

Enfin, nous avons un feuilletage à singularités isolées de X dont les points singuliers sont les singularités des fibres de h et dont les feuilles sont les composantes connexes des ensembles des points réguliers des celles-ci: c'est le *feuilletage défini par h.*

(2.5) OBSERVATION. On définit, comme dans (1.13), la notion de *restriction* à un ouvert de X d'un feuilletage à singularités isolées et on a un lemme analogue à (1.14). Le lemme suivant suit directement des définitions.

(2.6) LEMME. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux feuilletages à singularités isolées de X et supposons qu'il existe un ouvert connexe et non-vide $W\subset X$ tel que $\mathcal{F}|W=\mathcal{F}'|W$. Alors, si X est connexe, $\mathcal{F}=\mathcal{F}'$.*

3. Les équations de Pfaff. Soit $\omega\neq 0$ une 1-forme méromorphe sur la surface analytique complexe, réguliére et connexe X.

(3.1) PROPOSITION . *Il existe un sous-ensemble S discret et fermé de X et un champ de vecteurs analytique L de droites tangentes à $X\neg S$ tels que si ω est holomorphe au voisinage d'un point $p\in X$ et $\omega(p)\neq 0$, alors, $p\notin S$ et $L_p=Ker\ \omega(p)$.*

Preuve. Notons $U\subset X$ l'ouvert de Zariski constitué des points où ω est holomorphe et non-nulle; on sait que U est dense dans X. On pose

$$L_p=Ker\ \omega(p),\ \ p\in U.$$

Puisque U est connexe et dense, il existe un ouvert maximal W, avec $U\subset W\subset X$, sur lequel L se prolonge. Il suffit de prouver que $S=X-W$ est discret.

Soient $p\in S$ et (x,y) un système de coordonnées de X centré en p. Au voisinage de p on peut écrire ω sous la forme

$$\omega=a(x,y)dx+b(x,y)dy$$

où a,b sont des fonctions méromorphes. Par ailleurs, l'anneau local de X en p est factoriel; on note g le plus grand diviseur commun aux germes de a et b en p. On en déduit que $\omega=g\omega'$ où ω' est holomorphe au voisinage de p et ne s'annulle pas en-dehors de p .

On définit $L_q=Ker\ \omega'(q)$, pour $q\neq p$ au voisinage de p et on obtient un prolongement de L, car $Ker\ \omega'(q)=Ker\omega\ (q)$ dans l'ouvert non-vide où a,b,g sont holomorphes et où g et a ou b ne s'annullent pas. Donc p est isolé dans S, ce qui termine la preuve. []

(3.2) DÉFINITION. *Dans les conditions de* (3.1), *on dit que le feuilletage à singularités isolées défini par L est le feuilletage de X défini par l'équation de Pfaff* $\omega=0$.

(3.3) EXEMPLE. Soit $X=\boldsymbol{C}^2$ et $\omega = (y^2-1)dx-x[A(y+1)+B(y-1)]dy$ où $A,B\in\boldsymbol{C}$ sont tels que le sous-groupe aditif de $\boldsymbol{C}$ engendré par 1, A, B soit dense dans $\boldsymbol{C}$. (Voir [22]).

Soient $z_1=exp(2\pi iA)$, $z_2=exp(2\pi iB)$. Observons que $z_1^n z_2^m\neq 1$ si $n^2+m^2>0$ pour $n,m\in\boldsymbol{Z}$ et que l'ensemble

$$D = \{z_1^n z_2^m : \ n,m\in\boldsymbol{Z}\}$$

est dense dans $\boldsymbol{C}$, car il est l'image du sous-ensemble aditif engendré par 1, A,B par l'application $w = exp(2\pi iz)$.

Choisissons une détermination locale, au voisinage de 0, de $Alog(y-1)$ et de $Blog(y+1)$. Leur somme admet un prolongement analytique le long de chaque courbe de origine 0 contenue dans $U=\boldsymbol{C}-\{1,-1\}$.

Alors, la surface de Riemann Σ de la fonction

$$(1) \qquad Alog(y-1) + Blog(y+1)$$

est un revêtement non-ramifié $\pi : \Sigma\to U$ et il existe $f:\Sigma\to\boldsymbol{C}$ holomorphe tel que toute détermination locale de (1) est de la forme $f\circ\pi^{-1}$, avec π^{-1} une inverse locale de π ; considérons l'application $\varphi : \Sigma\to X$ donnée par

$$\varphi(\xi)=(exp\, f(\xi),\ \pi(\xi)).$$

Alors $\varphi(\Sigma)\subset\boldsymbol{C}\times U$, qui est l'ouvert où ω est holomorphe et jamais nulle. Nous allons vérifier que (Σ,φ) est une courbe tangente au champ L de droites tangents à $\boldsymbol{C}\times U$, défini par

$$L(x,y)=Ker\ \omega(x,y),\ (x,y)\in\ \boldsymbol{C}\times U.$$

1) φ est injective. Soient ξ, $\xi'\in\Sigma$ avec $\varphi(\xi)=\varphi(\xi')$. Alors $\pi(\xi)-\pi(\xi')=0$ et $exp(f(\xi)-f(\xi'))=1$. Mais $\pi(\xi)=\pi(\xi')$ entraîne $f(\xi)-f(\xi')=2\pi inA+2\pi inB$ pour certains $n,m\in\boldsymbol{Z}$. Donc $z_1^n z_2^m=1$, d'où suit aussitôt $m=n=0$. On conclut que ξ, ξ' correspondent à la même détermination locale de la fonction (1); c'est-à-dire, $\xi=\xi'$.

2) φ est une immersion. Cela suit du fait que π est un difféomorphisme local.

3) $d\varphi(T_\xi(\Sigma))\subset L_{\varphi(\xi)}$ parce que $\varphi^*(\omega)=0$. En effet, si $\pi^{-1} : W\to\Sigma$ est une inverse locale de π défini sur l'ouvert $W\subset U$, on vérifie tout de suite que $(\pi^{-1})^*(\varphi^*(\omega))=0$.

Maintenant on va vérifier que $\varphi(\Sigma)$ est dense dans X ; cela veut dire que le feuilletage de X défini par l'équation de Pfaff $\omega=0$ possède une feuille dense.

Il suffit de voir que $\varphi(\Sigma)$ est dense dans $\boldsymbol{C}\times U$.

Prenons $y\in U$. L'ensemble

$$\{(\exp f(\xi),y):\ \xi\in\Sigma \text{ et } \pi(\xi)=y\}$$

est donc contenu dans $\varphi(\Sigma)$. D'autre part, il existe $a\in\boldsymbol{C}$ tel que

$$\{\exp f(\xi):\ \xi\in\Sigma \text{ et } \pi(\xi)=y\} = \{\exp(a)z_1^n z_2^m:\ n,m\in \boldsymbol{Z}\}$$

Cet ensemble est donc dense dans $\boldsymbol{C}$, d'où suit l'assertion.

(3.4) THÉORÈME. *Supposons que X est une variété algébrique projective et soit $\mathfrak{F}$ un feuilletage à singularités isolées de X. Alors, il existe une 1-forme méromorphe non-nulle ω sur X telle que $\mathfrak{F}$ est défini par l'équation de Pfaff $\omega=0$.*

Preuve. Soit S un sous-ensemble fermé et discret de X et soit L un champ de droites tangentes à $X\neg S$ qui définit $\mathfrak{F}$. Prenons deux fonctions méromorphes $f,g\in\boldsymbol{C}(X)$ qui soient algébriquement indépendantes ([13, chap. I, § 7 et chap III, cor. 5.5]) ; un calcul direct montre que $df\wedge dg\neq 0$. Il existe un ouvert de Zariski non-vide $U\subset X$ tel que $f|U$ et $g|U$ sont holomorphes, $df\wedge dg$ ne s'annulle jamais sur U et $U\subset X\neg S$. Alors $U=\bigcup_{i\in I}U_i$, où les U_i sont des ouverts connexes sur lequels il existe une 1-forme holomorphe et jamais nulle ω_i telle que

$$L_q=Ker\,\omega_i(q), \text{ pour } q\in U_i\ \ (i\in I).$$

On écrit

$$\omega_i=a_i df+b_i dg$$

où a_i, b_i sont holomorphes sur U_i pour $i\in I$. Comme $\omega_i\wedge\omega_j\neq 0$ sur $U_i\cap U_j$, on a

$$a_i b_j - a_j b_i=0 \text{ sur } U_i\cap U_j, \text{ pour } i,j\in I.$$

Supposons, par exemple, $b_j\neq 0$. Alors, par la connexité de U, on obtient que $b_i\neq 0$ pour tout $i\in I$. Ceci permet de définir, pour chaque $i\in I$ une fonction méromorphe $h_i=a_i/b_i$ sur U_i en sorte que

$$h_i\,|\,(U_i\cap U_j)=h_j\,|\,(U_i\cap U_j),\quad i,j\in I.$$

Donc, il existe une fonction méromorphe h sur U telle que $h\,|\,U_i=h_i$ pour tout $i\in I$. Considérons la 1-forme méromorphe sur U définie par

$$\omega = h df+dg\ ;$$

alors $b_i(\omega\,|\,U_i)=\omega_i$ pour tout $i\in I$.

Soit $p\in U_i$ tel que $b_i(p)\neq 0$. Alors ω est holomorphe au voisinage de p et

$Ker\,\omega(p)= Ker\,\omega_i(p)=L_p$.

Supposons que h soit méromorphe sur X. Ce qui précède nous dit que l'équation de Pfaff $\omega=0$ définit le feuilletage $\mathfrak{F}$ (voir (2.6)). Il reste donc à démontrer que h est méromorphe sur X.

Soit $p\in X-U$. Par le théorème (2.3) et les définitions, il existe un voisinage ouvert connexe V de p et une 1-forme θ holomorphe sur V telle que $Ker\ \theta(q)=L_q$ pour tout $q\in V-\{p\}$. Soit $W=V\cap U$. Alors

$$\omega\wedge\theta = 0 \text{ sur } W.$$

On en déduit que

$$h(df\wedge\theta) = -dg\wedge\theta \text{ sur } W.$$

Il suffit, alors, de prover que $(df|V)\wedge\theta \neq 0$.

Si $(df|V)\wedge\theta=0$, on aurait

$$Ker\ df(q)=Ker\ \theta(q)=L_q \text{ pour tout } q\in W.$$

Soit $j\in I$ tel que $U_j\cap V$ n'est pas vide. Il existe $r\in U_j\cap V$ tel que $b_j(r)\neq 0$. Comme on a vu plus haut, ω est holomorphe au voisinage de r et $Ker\ \omega(r)=L_r$. Donc $(\omega\wedge df)(r)=0$. Ceci implique $dg(r)=0$, ce qui est absurde. []

4. Séparatrices et intégrales premières. On suppose donné un feuilletage analytique $\mathfrak{F}$ à singularité isolées sur une surface analytique régulière X.

(4.1) DÉFINITION. *Un germe irréductible Σ d'un ensemble analytique de dimension* 1 *en un point $p\in X$ est un* <u>*séparatrice locale*</u> *de $\mathfrak{F}$ en p si $\Sigma-\{p\}$ est contenu dans une feuille de $\mathfrak{F}$. On dit aussi que Σ est* <u>*invariant*</u> *par $\mathfrak{F}$.*

(4.2) DÉFINITION. *Un sous-ensemble analytique Y de X, fermé, irréductible, de dimension* 1, *est une* <u>*séparatrice*</u> *de $\mathfrak{F}$ si pour tout $p\in Y$ chaque composante irréductible du germe de Y en p est une séparatrice locale de $\mathfrak{F}$. On dit aussi que Y est une* <u>*courbe invariante*</u> *par $\mathfrak{F}$.*

(4.3) LEMME. *Soit $Y\subset X$ un sous-ensemble analytique fermé, irréductible de dimension* 1. *Supposons qu'il existe $p\in Y$ tel que l'une des composantes irréductibles du germe de Y en p est une séparatrice locale de $\mathfrak{F}$. Alors, Y est une séparatrice de $\mathfrak{F}$.*

Preuve. Soit L un champ analytique de droites tangentes à $X\neg S$ (où $S\subset X$ est fermé et discret) qui définit $\mathfrak{F}$. Notons Y_0 l'ensemble des points singuliers de Y; posons $Y_1=Y_0\neg S$: c'est une surface de Riemann en sorte que l'inclusion $j:Y_1\to X$ est une immersion injective.

Par hypothèse, il existe un ouvert non-vide $U\subset Y_1$ tel que (voir (1.3))

(2) $\qquad dj(T_u(Y_1)) = L_{j(u)}$, pour tout $u \in U$.

Par analyticité, (2) vaut en fait pour tout $u \in Y_1$, et donc Y_1 est contenu dans une feuille de $\mathfrak{F}$. Alors (Y_1, j) est une courbe tangente à L. Le lemme en découle aussitôt. []

(4.4) EXEMPLE. Les séparatrices du feuilletage défini dans (2.4) sont les composantes irréductibles des ensembles $h^{-1}(b)$ pour $b \in B$.

(4.5) DÉFINITION. *Soit X connexe et $f \in \mathbf{C}(X)$ non-constante; notons $U \subset X$ l'ouvert de Zariski constitué des points où f est holomorphe. Alors f est une* <u>*intégrale première méromorphe*</u> *de $\mathfrak{F}$ si $f|(F \cap U)$ est constante pour toute feuille F de $\mathfrak{F}$.*

(4.6) PROPOSITION. *Soient $\mathfrak{F}$ un feuilletage analytique sur X connexe et $f \in \mathbf{C}(X)$ non-constante. Supposons que $\mathfrak{F}$ est défini par une équation de Pfaff $\omega=0$. Alors, f est une intégrale première méromorphe si et seulement si*

$$df \wedge \omega = 0.$$

Preuve. Supposons que f est une intégrale première de $\mathfrak{F}$.

Soit $p \in X$ un point non-singulier de $\mathfrak{F}$ tel que ω et f sont holomorphes en p et $\omega(p) \neq 0$. Une application directe de la proposition (1.7) montre qu'il existe un voisinage ouvert U de p tel que

$$df(q)(L_q)=0 \text{ pour tout } q \in U,$$

où L est le champ analytique de droites défini par $\mathfrak{F}$.
D'autre part, quitte à retrécir U, nous pouvons supposer que $\omega(q)(L_q)=0$ pour tout $q \in U$, par la définition (3.2); donc $(df \wedge \omega)/U=0$, d'où suit l'assertion directe.

Réciproquement, supposons que $df \wedge \omega=0$. Soit $p \in X$ un point non-singulier de $\mathfrak{F}$ en lequel f est holomorphe et U un voisinage ouvert et connexe de p. L'ensemble des points $q \in U$ tels que ω est holomorphe et non-nulle en q est dense dans U; pour un tel point q on a: $Ker\ \omega(q)=L_q$ et alors $df(q)(L_q)=0$. Donc

$$df(p)(L_p)=0.$$

Soit (Σ, φ) une courbe tangente à L. Désignons par W l'ouvert de Zariski où f est holomorphe. Alors

$$d(f \circ \varphi)|\varphi^{-1}(W) = 0.$$

Comme $\varphi^{-1}(X-W)$ est un sous-ensemble analytique de Σ, nous devons avoir ou bien $d(f\circ\varphi)=0$ ou bien $\varphi(\Sigma)\subset X-W$; dans le premier cas $f\circ\varphi$ est constante. L'assertion suit de manière évidente.[]

5. La tangence de deux feuilletages. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux feuilletages (analytiques) à singularités isolées sur une surface analytique régulière et connexe X. Dans ce paragraphe on supposera que $\mathcal{F}\neq\mathcal{F}'$.

Désignons par L, et L' les champs de droites tangentes aux feuilles de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ respectivement. D'après (2.3), on peut couvrir X par une famille $\{U_j,\ (x_j y_j)\}_{j\in J}$ d'ouverts coordonnés connexes tels que, pour tout indice $j\in J$, il existe des équations locales

$$\omega_j=0,\ \ \omega_j'=0$$

sur U_j de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ respectivement. Alors

$$\omega_j\wedge\omega_j'=g_j\,dx_j\wedge dy_j,\quad j\in J,$$

où g_j est une fonction holomorphe sur U_j et $g_j\neq 0$ (voir (2.6)).

$$\omega=0,\ \ \omega=0$$

On déduit de (2.3) que $\{U_j,\ g_j\}_{j\in J}$ définit un diviseur de Cartier effectif $D(\mathcal{F},\mathcal{F}')$ de X qui ne dépend pas des choix réalisés.

(5.1) DÉFINITION. *Le diviseur $D(\mathcal{F},\mathcal{F}')$ est le* <u>*diviseur de tangence*</u> *entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ (voir* [8]).

(5.2) PROPOSITION. *On a les assertions suivantes :*
a) Un point $p\in X$ n'appartient pas au support de $D(\mathcal{F},\mathcal{F}')$ si et seulement si p n'est pas un point singulier ni de $\mathcal{F}$ ni de $\mathcal{F}'$ et les droites tangentes, en p, aux feuilles de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ par p sont différentes.
b) Si C est une séparatrice de $\mathcal{F}$ contenu dans le support de $D(\mathcal{F},\mathcal{F}')$, alors C est une séparatrice de $\mathcal{F}'$.

Preuve. a) Il suit immédiatement des définitions.
b) Il existe $p\in C$ qui n'est pas un point singulier ni de C ni de $\mathcal{F}$ ni de $\mathcal{F}'$. D'après l'hypothèse et (1.3), la droite tangente $T_q(C)$ est tangente à la feuille de $\mathcal{F}$ par q, pour tout $q\in C$ au voisinage de p. Par a), il en est de même pour $\mathcal{F}'$. On conclut par (4.3).[]

6. Feuilletages sur les fibrations. Soit $h: X\to B$ une application analytique où X est une surface analytique régulière connexe et B une surface de Riemann. On suppose que h est *propre* et qui est *une fibration localement triviale au sens C^∞*.
On se donne un feuilletage à singularités isolées $\mathcal{F}$ de X.

(6.1) DÉFINITION. *On dit que $\mathfrak{I}$ est* <u>*transverse aux fibres*</u> *de h si $\mathfrak{I}$ est régulier et, pour chaque $p \in X$, la droite tangente en p à la feuille de $\mathfrak{I}$ par p n'est pas tangente à la fibre de h qui contient p.*

(6.2). OBSERVATION. Prenons pour $\mathfrak{I}'$ le feuilletage défini par h (exemples (1.6) et (2.4)). Alors $\mathfrak{I}$ est transverse aux fibres de h si et seulement si $D(\mathfrak{I},\mathfrak{I}')=0$.

Pour $\rho>0$ on note D_ρ le disque de centre 0 et rayon ρ.

(6.3) THÉORÈME. *Supposons que $\mathfrak{I}$ est transverse aux fibres de h. Alors h est une fibration localement analytiquement triviale. Plus précisément, pour chaque $b \in B$, il existe un voisinage ouvert V de b, une variété analytique complexe, compacte, de dimension 1, X_b et un difféomorphisme analytique φ: $V \times X_b \to h^{-1}(V)$ tel que le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} V \times X_b \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & h^{-1}(V) \arrow[dl, "h"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

commute, où π désigne la projection canonique, et en sorte que pour chaque $p \in X_b$, l'image de $V \times \{p\}$ par φ est contenue dans une feuille de $\mathfrak{I}$.

Preuve. Notons L le champ de droites tangentes aux feuilles de $\mathfrak{I}$. Soit $b \in B$.

Soit z: $W \to D_1$ une coordonnée locale de B avec W un voisinage ouvert de b telle que $z(b)=0$. Comme l'application

$$dh(p)|L_p : L_p \to T_{h(p)}(B)$$

est un isomorphisme pour tout $p \in X$, le champ de vecteurs $\partial/\partial z$ se relève à un champ de vecteurs ξ sur $U=h^{-1}(W)$ tel que

$$\xi_p \in L_p \text{ et } dh(p)(\xi_p) = \partial/\partial z(h(p)) \text{ pour tout } p \in U.$$

De la définition (1.1) il suit que ξ est analytique.

Le théorème d'existence, unicité et dépendence analytique des conditions initiales pour les équations analytiques (voir par exemple [10]) et la compacité de X_b entraînent l'existence de ε, avec $0<\varepsilon<1$, et d'une application analytique

$$\psi: D_\varepsilon \times X_b \to U$$

telle que, pour chaque $p \in X_b$, l'application $t \to \psi(t,p)$ est la trajectoire de ξ telle que $\psi(0,p)=p$. Du fait que ξ relève $\partial/\partial z$ il suit que le diagramme

$$\begin{tikzcd} D_\varepsilon \times X_b \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & X \arrow[d, "h"] \\ D_\varepsilon \arrow[r, "z^{-1}"] & B \end{tikzcd}$$

est commutatif, où π désigne la projection canonique.

Par ailleurs, la restriction de ψ à $D_\varepsilon \times \{p\}$ est une courbe tangente à L pour tout $p \in X_b$. Alors $\psi(D_\varepsilon \times \{p\})$ est contenu dans une feuille de $\mathcal{F}$ pour tout $p \in X_b$. Comme $\psi(0,p)=p$ et $d\psi(0,p)(T_0(D_\varepsilon))=L_p$, on voit que $d\psi(0,p)$ est bijective pour tout $p \in X_b$. Alors ψ est un isomorphisme local au voisinage de $(0,p)$. Quitte à considérer ε suffisament petit, de cela et de la compacité de X_b, on déduit que ψ est injective. Puisque toutes les fibres de h sont difféomorphes, il en suit

$$\psi(D_\varepsilon \times \{p\})=h^{-1}(V),$$

où $V=z^{-1}(D_\varepsilon)$.

On définit $\varphi: V \times X_b \to U$ par

$$\varphi(v,p)=\psi(z^{-1}(v),p), \quad v \in V, p \in X_b.$$

ce qui complète la preuve.[]

(6.4) COROLLAIRE. *Supposons que $\mathcal{F}$ est transverse aux feuilles de h; notons F une feuille arbitraire de $\mathcal{F}$. Alors, l'application*

$$h|F : F \to B$$

est un revêtement non-ramifié pour la topologie fine de F.

Preuve. Soit $b \in B$. Soient X_b, V et φ comme dans (6.3). Alors, d'après (6.3), l'ensemble $F \cap h^{-1}(V)$ est homéomorphe, pour la topologie finie de F, à $V \times S$ où $S \subset X_b$ et sur S on a pris la topologie discrète. De plus, cet homéomorphisme commute avec h et la projection canonique $V \times S \to V$.[]

(6.5) COROLLAIRE. *Supposons que $\mathcal{F}$ est transverse aux fibres e h. Fixons $b \in B$ et choisissons $x \in h^{-1}(b)$; notons F la feuille passant par x. Alors, tout chemin continu $\gamma:[0,1] \to B$ avec $\gamma(0)=b$ admet un relèvement continue unique $\gamma':[0,1] \to X$ tel que*

$$h^{\circ}\gamma'=\gamma,\ \gamma'(0)=x \text{ et } \gamma'([0,1])\subset F.$$

En plus, $\gamma(1)$ ne dépend que de la classe d'homotopie à extremités fixes de γ.

Preuve. Il découle de (6.4) et (1.16).[]

Le corollaire (6.5) nous dit que si γ est fermé, alors il induit une application $x\to\gamma'(1)$ de $X_b=f^{-1}(b)$ dans lui-même et que ceci définit un homomorphisme de $\pi_1(B,b)$ dans le groupe des transformations bijectives $X_b\to X_b$, qu'on appèle <u>*l'holonomie*</u>.

(6.6) PROPOSITION. *L'holonomie est un homomorphisme de $\pi_1(B,b)$ dans le groupe $Aut(X_b)$* des *automorphismes analytiques de X_b. Si cet homomorphisme est trivial, alors il existe un isomorphisme analytique $\varphi : X\to B\times X_b$ tel que* :

(a) le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "h"'] & & B \times X_b \arrow[dl, "p_1"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

commute;

(b) les feuilles de $\mathfrak{F}$ sont de la forme

$$\varphi^{-1}(B\times\{x\}),\ x\in X_b.$$

Preuve. On définit

$$\varphi(z)=(h(z),x_2),\ z\in X$$

où $x_2\in X_b$ est dans la même feuille que z. La preuve suit de (6.3).[]

* * *

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Fuchs, *Ueber Differentialgleichungen deren Integrale feste Verzwueigungspunkte besitzen*, Math. Werke 2, pag. 355.

[2] H. Poincaré. *Sur un théorème de M. Fuchs.* Oeuvres complètes 3, pags. 1-31.

[3] E.L Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover, 1926.

[4] C. Camacho, *Quadratic Forms and Holomorphic Foliations on Singular Surfaces*, Math. Annalen 282 (1988) pags. 177-184.

[5] C. Camacho and P.Sad, *Invariant Varieties Through Singularities od Holomorphic Vector Fields*, Ann. of Math. 115 (1982), pags. 579-595.

[6] J.P. Jouanolou, *Hypersurfaces solution d'une équation de Pfaff analytique*, Mathem. Annalen 232 (1978) 239-245.

[7] G. Fischer, H. Grauert, *Lokaltriviale Familien kompakter complexer Mannifaltigkeiten*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen II (1965) 89-94.

[8] M. Brunella, *Feuilletages holomorphes sur les surfaces complexes compactes*, Ann. Sci. Écol. Norm. Sup. 30 (1997), pags. 569-594.

[9] R.C. Gunning, *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables*, Wadsworth & Brooks/Cole, 1990.

[10] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley and Sons, 1976.

[11] A. Beauville. *Complex algebraic surfaces.* Cambridge Univ. Press, 1996.

[12] I.R.Shafarevich, *Algebraic Surfaces*, Proc. Steklov Inst. Math. 75 (1965) (trans. Par A.M.S. 1967).

[13] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, Springer-Verlag, 1984.

[14] S. Kobayashi, *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings*, Marcel Dekker, 1970.

[15] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3rd. ed. McGraw-Hill, New York, 1979.

[16] S. Lang, *Algebra*, Addison Wesley, 1965.

[17] J. Harris, *Algebrai Geometry,* Springer Verlag, New York, 1992.

[18] B. Scárdua, *Holomorphic Foliations Transverse to Fibrations on Hyperbolic Manifolds*, Prépublication.

[19] C. Camacho and A. Lins Neto, *Teoria Geométrica das Folheações*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[20] C.L. Siegel, *Topics in complex function theory – vol. I,* John Wiley & Sons, 1969.

[21] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry,* Springer, 1977.

[22] D. Cerveau, *Densité des feuilles de certaines équations de Pfaff à deux variables*, Ann. Inst. Fourier, 33, 1 (1983), pags. 185-194.

[23] M Matsuda, *First-order algebraic differential equations. A differential algebraic approch*, Lectures Notes in math. 804, 1980.

INDEX DE NOTATIONS

A. anneau local — chap, I, §2, pag. 3
factoriel — chap. I, §2, pag. 5

C. champ analytique de droites tangentes — annexe, §1, pag. 75
classe de Fuchs — chap. I, §4, pag. 13
faible, — chap. I, §4, pag. 13
corps de fonctions méromorphes — chap. II, §3, pag. 37
courbe invariante par un feuilletage — annexe, §4, pag. 85
tangente à un champ de droites — annexe, §1, pag. 75
tangente à un feuilletage — annexe, §1, pag. 75

D. degré d'une extension de corps — chap. IV, §2, pag. 66
désingularisation — chap. II, §3, pag. 34
diviseur de tangence — annexe, §5, pag. 87
de zéros — chap. IV, § 2, pag. 65
de pôles — chap. IV, § 2, pag. 65
droite tangente à une feuille — annexe, §1, pag. 76

E. équation binomiale — chap. I, §4, pag. 19
de Pfaff — annexe, §3, pag. 82
de Riccati — chap. I, §4, pag. 19
équations équivalentes — chap. II, §1, pag. 30
espace analytique — conventions et notations, pag. vi
tangent — conventions et notations, pag. vi

F. feuille tangente à un champ de droites — annexe, §1, pag. 75
feuille d'un feuilletage — annexe, §1, pag.76
feuilletage analytique — chap. II, §3, pag. 37
à singularités isolées — annexe, §2, pag.80
définie par une équation de Pfaff — annexe, §3, pag. 82
régulier — annexe, §1, pag. 76
de Riccati relativement à une surface fibré — chap. II, §2, pag. 39
transverse par rapport à une fibration — annexe, §6, pag. 88
fibration localement triviale — annexe, §6, pag.87

fibre régulière, chap II, §3, pag. 34
fonction algébrique chap. I, §2, pag. 6
de Weierstrass chap. IV, §4, pag. 71

G. genre d'une courbe algébrique chap. II, §3, pag. 34
d'une équation différentielle chap. II, §3, pag. 36

H. holonomie annexe, §6, pag. 90

I. Image réciproque régulière chap. III, §2, pag. 50
d'une courbe III, §2, pag. 52
Intégrale première méromorphe annexe, §4, pag.86
rationnelle chap. I, §5, pag. 22

M. modèle lisse d'une courbe algébrique chap. II, §3, pag. 34

P. poids d'un germe de polynôme chap. I, §2, pag. 7
point de ramification de l'équation chap. I, §4, pag. 13

R. rapport anharmonique chap. III, §3, pag. 54

S. séparatrice locale annexe, §4, pag. 85
singularité essentielle chap. II, §4, pag. 48
solution algébrique chap. I, §5, pag. 26
holomorphe chap. II, §4, pag. 45
locale chap. I, §1, pag.2 et chap. II, §1, pag. 28
méromorphe chap. II, §4, pag. 45
ramifiée chap. I, §1, pag. 2
régulière chap. I, §1, pag. 2
uniforme chap. I, §1, pag. 2
solutions équivalentes chap. I, §1, par. 2
surface fibrée chap. II, §3, pag. 34
birationnellement triviale chap. III, §2, pag. 53

T. trivialisation birationnelle chap. III, §2, pag. 53

Impresso na Gráfica do

impa

pelo Sistema Xerox / 5390