

# **Controle Ótimo: Uma Introdução na Forma de Problemas e Soluções**



# Publicações Matemáticas

## **Controle Ótimo: Uma Introdução na Forma de Problemas e Soluções**

Alex L. de Castro  
PUC-RIO



29<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática

Copyright © 2013 by Alex L. de Castro

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Noni Geiger / Sérgio R. Vaz

## **29º Colóquio Brasileiro de Matemática**

- Análise em Fractais – Milton Jara
- Asymptotic Models for Surface and Internal Waves - Jean-Claude Saut
- Bilhares: Aspectos Físicos e Matemáticos - Alberto Saa e Renato de Sá Teles
- **Controle Ótimo: Uma Introdução na Forma de Problemas e Soluções - Alex L. de Castro**
- Eigenvalues on Riemannian Manifolds - Changyu Xia
- Equações Algébricas e a Teoria de Galois - Rodrigo Gondim, Maria Eulalia de Moraes Melo e Francesco Russo
- Ergodic Optimization, Zero Temperature Limits and the Max-Plus Algebra - Alexandre Baraviera, Renaud Leplaideur e Artur Lopes
- Expansive Measures - Carlos A. Morales e Víctor F. Sirvent
- Funções de Operador e o Estudo do Espectro - Augusto Armando de Castro Júnior
- Introdução à Geometria Finsler - Umberto L. Hryniewicz e Pedro A. S. Salomão
- Introdução aos Métodos de Crivos em Teoria dos Números - Júlio Andrade
- Otimização de Médias sobre Grafos Orientados - Eduardo Garibaldi e João Tiago Assunção Gomes

ISBN: 978-85-244-0353-8

**Distribuição:** IMPA  
Estrada Dona Castorina, 110  
22460-320 Rio de Janeiro, RJ  
E-mail: [ddic@impa.br](mailto:ddic@impa.br)  
<http://www.impa.br>

# Prefácio

Essas notas foram baseadas nos cursos de Introdução aos Métodos Matemáticos em Economia para o alunos da pós-graduação em Economia da PUC-Rio, e do curso de Introdução à Otimização e o Controle o Ótimo para os alunos da pós-graduação em matemática aplicada da PUC-Rio. Os alunos eram responsáveis por tarefas semanais consistindo de exercícios propostos durante as aulas, e problemas de aprofundamento. A maioria das soluções abaixo foram propostas pelos alunos quase na íntegra. Somente em algumas ocasiões, eu intervi na construção e na redação das soluções. Dentre os colaboradores, os mais diligentes e prolíficos foram Pedro Millet, Paulo Orenstein e André Zaccur. Murilo Ramos contribuiu ativamente nas questões de fundamentos de cálculo e álgebra linear. Com a sua curiosidade genuína ele me auxiliou bastante na reformulação e esclarecimento de vários pontos obscuros no texto.



# Agradecimentos

Gostaria de agradecer todos os meus alunos do curso de *Introdução à Otimização e Controle Ótimo*, e *Introdução aos Métodos Matemáticos em Economia* na PUC-Rio. Em particular, registro aqui meus agradecimentos especiais aos alunos Pedro Millet, André Zaccur, Paulo Orenstein e Murilo Ramos pelas listas diligentes e as notas de aulas que esclareceram muitos dos meus improvisos e surtos de inspiração em sala de aula.





# Objetivo dessas notas

Essas notas tem o propósito de servirem como panfleto turístico para o leitor interessado em visitar alguns marcos importantes da otimização clássica e moderna. Na bibliografia forneceremos indicações de guias de exploração mais detalhados, visando os visitantes mais aventureiros e curiosos.

Introduzimos alguns conceitos de análise moderna, otimização e algoritmos para cálculo aproximado de soluções ótimas na forma de problemas e soluções. A mensagem mais importante desse mini-curso é que a interpretação de um problema matemático como um problema de otimização pode ser muito frutífera, tanto para o problema quanto para quem o resolve.



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Algumas idéias centrais em otimização</b>	<b>11</b>
1.1	Quando é que o mínimo é único? . . . . .	11
1.2	Função de barreira logarítmica . . . . .	12
1.3	Diagonalização de matrizes simétricas. . . . .	12
<b>2</b>	<b>O volume maximal de um paralelepípedo?</b>	<b>14</b>
<b>3</b>	<b>Lagrange, KKT, e análise convexa</b>	<b>18</b>
3.1	A existência de um autovalor real para matrizes simétricas . . . . .	20
3.2	Fato 1: a interseção de figuras convexas é também convexa. . . . .	23
3.3	Fato 2: todo polígono convexo é interseção de um número	23
Fato 2:	todo polígono convexo é interseção de um número	
	finito de semi-planos . . . . .	23
3.3.1	Discussão sobre pontos (interiores) $P, Q$ de uma	
	figura convexa: quando temos $\overline{PQ} \subset \text{int}(C)$ ? . . . . .	25
3.4	Fato 3: toda reta passando por um ponto interior de	
	uma figura . . . . .	26
3.5	A recíproca da última afirmação é verdadeira? . . . . .	26
3.6	Para uma função convexa, mínimo local implica mínimo global. . . . .	27
3.7	Se $f$ é convexa e diferenciável, o teorema de Fermat é	
	condição suficiente. . . . .	27
3.8	Uma função convexa é coerciva . . . . .	28

3.9	Uma figura convexa é limitada se não houver nenhuma semi-reta contida na figura . . . . .	29
3.10	Extensão de Weierstrass para função descontínuas . . . . .	30
3.11	Convexidade e o epigrafo de uma função convexa. . . . .	31
3.12	Convexidade e diferenciabilidade . . . . .	31
3.13	Construindo funções de suporte compacto. . . . .	32
3.14	Usando as condições KKTJ para a demonstração . . . . .	33
3.15	O método de relaxamento para problemas de otimização . . . . .	36
3.16	Otimização com subgradientes . . . . .	43
3.17	O método do elipsóide. . . . .	48
<b>4</b>	<b>Cálculo Variacional</b>	<b>51</b>
4.1	Um problema sobre bolhas de sabão . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Condições de transversalidade para problemas variacionais.</b>	<b>55</b>
5.1	Um problema com tempo livre. . . . .	55
5.2	Um problema com extremidades móveis. . . . .	57
5.3	Um problema isoperimétrico: o problema da rainha Dido . . . . .	58
5.4	Um problema com vínculos dinâmico . . . . .	61
5.5	Um problema de controle ótimo (forma Lagrangiana): . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Apêndice: condições de transversalidade</b>	<b>68</b>
6.1	Funcionais mais comuns em cálculo de variações . . . . .	68
6.1.1	Funcionais integrais . . . . .	68
6.1.2	Funcionais terminais . . . . .	68
6.2	Restrições . . . . .	69
6.2.1	Restrições diferenciais ou dinâmicas . . . . .	69
6.2.2	Restrições terminais . . . . .	69
6.2.3	Restrições na forma de desigualdades . . . . .	69
6.3	Exemplos de problemas típicos do cálculo das variações . . . . .	69
6.3.1	O problema clássico mais simples: intervalo de tempo fixo, e condições de fronteira fixas . . . . .	69
6.3.2	O problema de Bolza . . . . .	70
6.3.3	O problema de Lagrange (otimização dinâmica) . . . . .	70
6.3.4	O problema de Meyer (otimização dinâmica) . . . . .	70
6.4	Métodos de resolução . . . . .	70
6.4.1	Problemas do tipo Bolza . . . . .	71

CONTEÚDO	9
6.4.2 Problema com extremidades móveis . . . . .	71
6.4.3 Problemas isoperimétricos . . . . .	72
6.4.4 O Problema de Lagrange . . . . .	73
<b>Bibliografia</b>	<b>75</b>



# Capítulo 1

## Algumas idéias centrais em otimização

### 1.1 Quando é que o mínimo é único?

**Problema 1.1.1.** *Seja  $f \in C^2([a, b])$ . Mostre que se  $f'(a) < 0$ ,  $f'(b) > 0$  e  $f''(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , então  $f$  tem um único mínimo global em  $[a, b]$ .*

**Solução.** Como  $f'$  é contínua (de fato, é  $C^1$ ), temos pelo Teorema do Valor Intermediário que existe  $\hat{x} \in (a, b)$  que satisfaz  $f'(\hat{x}) = 0$ . Afirmamos o seguinte:

*Afirmação.* Para todo  $x$ ,  $a \leq x < \hat{x} \Rightarrow f'(x) < 0$  e  $\hat{x} < x \leq b \Rightarrow f'(x) > 0$ .

Para ver a afirmação, note que

$$f'(x) - f'(\hat{x}) = f'(x) = \int_{\hat{x}}^x f''(x) dx,$$

e como  $f''(x) > 0$  para todo  $x$ , segue que essa integral é maior que zero se  $x > \hat{x}$ , e menor que zero caso contrário.

Agora suponha que existe  $\bar{x} \neq \hat{x}$  com  $f(\bar{x}) \leq f(\hat{x})$ . Então pelo Teorema do Valor Médio, existe  $x \in (\bar{x}, \hat{x})$  (podendo o intervalo ser

ao contrário) com

$$f'(x) = \frac{f(\bar{x}) - f(\hat{x})}{\bar{x} - \hat{x}} \begin{cases} \geq 0 & \text{se } \bar{x} < \hat{x} \\ \leq 0 & \text{se } \bar{x} > \hat{x} \end{cases}$$

Contradição.

## 1.2 Função de barreira logarítmica

**Problema 1.2.1.** A) Dado  $c > 0$ , calcule a solução  $\hat{x}_c$  do problema  $x - c \ln x \rightarrow \min$ ,  $A: x > 0$ , onde  $A$  é o conjunto de pontos admissíveis.

B) Verifique que  $\lim_{c \rightarrow 0^+} \hat{x}_c = 0$ .

**Solução.** Se  $f(x) = x - c \ln x$ , calculamos  $f'(x) = 1 - c/x$  e  $f''(x) = c/x^2$ .

Notamos que  $f''(x) > 0$  para todo  $x > 0$ . Além disso, tomando  $0 < \epsilon < 1/c$  e  $N > c$  temos, pelo exercício anterior, que existe um único mínimo global em  $[\epsilon, N]$ . Fazendo  $\epsilon \rightarrow 0^+$  e  $N \rightarrow \infty$ , temos que existe um único mínimo global  $\hat{x}_c$  maior que zero.

Observando a prova do exercício anterior (ou usando o Teorema de Fermat), vemos que este mínimo satisfaz  $f'(\hat{x}_c) = 0$ . Resolvendo,

$$1 - \frac{c}{\hat{x}_c} = 0 \Leftrightarrow \hat{x}_c = c,$$

o que completa a letra (A).

Para (B),

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \hat{x}_c = \lim_{c \rightarrow 0^+} c = 0$$

## 1.3 Diagonalização de matrizes simétricas.

Prelúdio para o método de Jacobi para a aproximação de autovalores de uma matriz simétrica.

**Problema 1.3.1.** Dada  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}$  matriz  $2 \times 2$ , encontre matriz de rotação  $P$  e o ângulo de rotação tais que  $PAP^T$  é diagonal.



**Solução.** Podemos supor  $a_2 \neq 0$  (caso contrário não há nada a ser feito). Se  $P = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$ , em que  $c = \cos(\theta)$  e  $s = \sin(\theta)$ , temos que

$$PAP^T = \begin{pmatrix} c^2 a_1 - 2csa_2 + s^2 a_3 & cs(a_1 - a_3) + a_2(c^2 - s^2) \\ cs(a_1 - a_3) + a_2(c^2 - s^2) & c^2 a_3 - 2csa_2 + s^2 a_1 \end{pmatrix},$$

que é diagonal se e somente se  $cs(a_1 - a_3) + a_2(c^2 - s^2) = 0$ , ou  $\sin(2\theta)(a_1 - a_3) + 2\cos(2\theta)a_2 = 0$ , que ocorre se e somente se

$$\tan(2\theta) = \frac{2a_2}{a_3 - a_1}, \text{ se } a_1 \neq a_3,$$

e se  $a_1 = a_3$ ,  $\cos(2\theta) = 0$ .

Assim,

$$\theta = \begin{cases} \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2a_2}{a_3 - a_1}\right) & \text{se } a_1 \neq a_3 \\ \frac{\pi}{4} & \text{se } a_1 = a_3 \end{cases}$$

em que  $\arctan(x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ , e

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

O método iterativo de Jacobi usa matrizes desse tipo para diagonalizar uma matrix simétrica, removendo um elemento fora da diagonal por vez. Mostra-se que, numa norma apropriada, a *norma da energia*, a energia mantém-se constante em cada iteração. A energia concentra-se na diagonal incrementalmente, o que garante que para um número grande de iterações a matrix é aproximadamente diagonal já que os elementos fora da diagonal contribuem com zero energia.

## Capítulo 2

# O volume maximal de um paralelepípedo?

**Problema 2.0.2.** Calcule  $df(X)$  e  $d^2f(X)$  da seguinte função:

$$f(X) = -\log \det(X),$$

onde  $X$  é uma matriz positiva definida. Mostre antes que o conjunto das matrizes positivas definidas é aberto no conjunto de todas as matrizes simétricas.

**Solução.** Seja  $X = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  matriz positiva definida. Para calcular o gradiente de  $f$  precisamos calcular  $\partial_{x_{ij}} f$ .

Seja  $D_{ij}(X)$  o determinante da matriz obtida removendo-se a  $i$ -ésima linha e a  $j$ -ésima coluna de  $X$ . Então, se calcularmos o determinante pela  $j$ -ésima coluna, temos:

$$\det(X) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} x_{ij} D_{ij}(X)$$

Uma vez que  $\partial_{x_{ik}} D_{ij}(X) = \partial_{x_{kj}} D_{ij}(X) = 0$  para todos  $i, j, k$ , temos que

$$\partial_{x_{kj}} f(X) = -\frac{(-1)^{i+j} D_{ij}(X)}{\det(X)}$$

e o gradiente  $df(X)$  pode ser visto como o vetor de  $n^2$  coordenadas que tem como entradas os valores acima.

Outra maneira de encarar o gradiente seria montar uma matriz  $A$  cuja entrada  $(i, j)$  seja  $\partial_{x_{ij}} f(X)$ . Nesse caso, nota-se que  $A = -\frac{1}{\det(X)} C(X)$ , em que  $C(X)$  é a matriz de cofatores de  $X$ . Como  $X^{-1} = \frac{1}{\det(X)} C(X)^T$  ( $X$  é inversível pois é positiva definida), temos que

$$df(X) = -(X^{-1})^T = -(X^{-1})$$

(assumindo que  $X$  é simétrica).

Para a segunda derivada de  $f$ , dada  $X$  simétrica, precisamos estimar o termo  $\Delta X$  da série

$$\begin{aligned} -(X + \Delta X)^{-1} &= -(X(I + X^{-1}\Delta X))^{-1} \\ &= -(I + X^{-1}\Delta X)^{-1} X^{-1} \\ &= -\left(\sum_k (-1)^k (X^{-1}\Delta X)^k\right) X^{-1} \end{aligned}$$

O termo  $\Delta X$  é o termo  $k = 1$ ,  $X^{-1}\Delta X X^{-1}$ , que é, portanto, a segunda derivada de  $f$  no espaço das matrizes simétricas positivas definidas (aqui usamos o fato de que este conjunto é aberto, provado a seguir).

Finalmente, para ver que o conjunto das matrizes positivas definidas é aberto no espaço das matrizes simétricas de ordem  $n$ , basta lembrar que, dada uma matriz  $X$  simétrica, ela é positiva definida se e somente se as submatrizes  $k \times k$   $X_k = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$  satisfazem  $\det(X_k) > 0$  para  $k = 1, 2, \dots, n$ . Como foi observado nas contas acima, o determinante é  $C^1$  com respeito às suas coordenadas; tome, então,  $\epsilon > 0$  e considere o fecho  $\bar{B}$  da bola de raio  $\epsilon$  ao redor de  $X$ . Essa bola é compacta, logo podemos tomar

$$M = \max_{Y \in \bar{B}} \{|dg(Y)|, |dg(Y_{n-1})|, \dots, |dg(Y_1)|\},$$

em que  $dg(Y_k)$  é o gradiente (com  $k$  coordenadas) da função  $g(Y_k) = \det(Y_k)$ .

Pelo teorema do valor médio, se tomarmos

$$m = \min \left( \epsilon, \frac{\det(X_1)}{2M}, \dots, \frac{\det(X_{n-1})}{2M}, \frac{\det(X)}{2M} \right),$$

temos que se  $\|Y - X\| \leq m$  (e conseqüentemente  $\|Y_k - X_k\| \leq \det(X_k)/2M$ ) temos que

$$|\det(Y_k) - \det(X_k)| \leq M\|Y_k - X_k\| \leq \frac{\det(X_k)}{2}$$

para todo  $k$ , donde

$$\det(Y_k) \geq \det(X_k) - \frac{\det(X_k)}{2} = \frac{\det(X_k)}{2} > 0,$$

Como isto vale para todo  $k$ , temos, pelo critério de Sylvester, que toda  $Y$  simétrica na bola de raio  $m$  é positiva definida. Assim, este conjunto é aberto.

**Problema 2.0.3.** *Demonstre a seguinte desigualdade de J. Hadamard:*

$$\det(A) \leq \|A_1\| \|A_2\| \cdots \|A_n\|,$$

onde  $A_i$  é a  $i$ -ésima coluna da matrix  $A$ . *Em outras palavras, fixados os tamanhos das arestas, o paralelepípedo de maior volume com essas arestas é o sólido com arestas mutuamente perpendiculares.*

**Solução.** Para provar essa desigualdade, é suficiente mostrar o valor ótimo do problema

$$f_0(X) = \det(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max,$$

com restrições

$$f_j(X) = \|x_j\|^2 - 1 = 0,$$

onde  $X$  é uma matriz  $n \times n$  e  $x_j$  a  $j$ -ésima coluna de  $X$ . A existência de uma solução global para esse problema é conseqüência do teorema de Weierstrass.

Considere agora a função Lagrangiana,

$$L = 2f_0(X) - \sum_j \lambda_j f_j(X).$$

O teorema de Lagrange vai afirmar que num ponto de máximo global  $\hat{X}$ ,  $L_X(\hat{X}) = 0$ . Como conseqüência da última equação, nós vamos concluir a partir da última equação que

$$X^T X = I.$$

Para ver isso, multiplicando a equação  $(i, j)$  por  $x_{ij}$  e somando sobre  $i$ , resolvendo o sistema linear para  $\lambda$  nós concluímos que

$$\lambda_j = - \sum_i \frac{\partial \det(X)}{\partial x_{ij}} x_{ij},$$

e o lado direito é igual a  $-\det(X)$  pela forma dos cofatores. Fica a cargo do leitor demonstrar que  $X^T X = I$  num ponto de máximo global. Isso pode ser feito com auxílio da fórmula de cofatores para a matriz inversa. Portanto, o valor máximo de  $\det(X)$  no ponto de máximo é  $\pm 1$ . Para concluir a desigualdade de Hadamard, use a multilinearidade do determinante com respeito a dilatações e contrações com respeito as colunas.

## Capítulo 3

# Lagrange, KKT, e análise convexa

**Problema 3.0.4.** *Sejam  $(e_i)$  os vetores da base canônica de  $\mathbb{R}^n$ . Determine o ponto  $x$  com a menor distância média dos vetores  $(e_i)$ .*

Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \|x\| + \|x - e_1\| + \|x - e_2\| + \dots + \|x - e_n\|.$$

Primeiro,  $f$  tem um mínimo, pois é coerciva: se  $\|x\| > K + 1$  temos que  $f(x) > K + 1 + nK = (n + 1)K + 1$ , o que mostra facilmente que  $f$  é coerciva. Além disso,

**Lema 3.0.5.** *O ponto de mínimo tem todas as coordenadas não-negativas.*

*Demonstração.* Se o ponto de mínimo satisfizesse  $\hat{x}_i < 0$ , tomando  $\hat{y} = \sum_{k \neq i} \hat{x}_k e_k$  (isto é, apenas zerando a  $i$ -ésima coordenada de  $x$ ), temos  $f(\hat{y}) < f(\hat{x})$ , o que é uma contradição.  $\square$

**Lema 3.0.6.** *O ponto de mínimo  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$  satisfaz  $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \dots = \hat{x}_n$ .*

*Demonstração.* Lembremos que a desigualdade triangular em  $\mathbb{R}^n$  afirma que  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , e que a igualdade só vale se  $x$  e  $y$  são paralelos (considerando que 0 é paralelo à qualquer vetor).

Assim, suponha, por absurdo, que o ponto de mínimo  $\hat{x}$  satisfaça  $\hat{x}_i \neq \hat{x}_j$ . Defina então

$$\hat{y} = \sum_{k \neq i, j} \hat{x}_k e_k + \hat{x}_i e_j + \hat{x}_j e_i,$$

isto é,  $\hat{y}$  é  $\hat{x}$  com as coordenadas  $i$  e  $j$  trocadas. Então claramente  $f(\hat{x}) = f(\hat{y})$  e  $f(t\hat{x} + (1-t)\hat{y}) =$

$$\begin{aligned} &= \|t\hat{x} + (1-t)\hat{y}\| + \sum_i \|t\hat{x} + (1-t)\hat{y} - e_i\| \\ &= \|t\hat{x} + (1-t)\hat{y}\| + \sum_i \|t(\hat{x} - e_i) + (1-t)(\hat{y} - e_i)\| \\ &\leq tf(\hat{x}) + (1-t)f(\hat{y}) = f(\hat{x}), \end{aligned}$$

a igualdade valendo somente se  $\hat{x}$  é paralelo a  $\hat{y}$  e, para cada  $i$ ,  $\hat{x} - e_i$  é paralelo a  $\hat{y} - e_i$ . É fácil ver que isso, aliado ao fato de que  $\hat{x} \geq 0$ , ocorre se e somente se  $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \dots = \hat{x}_n$ .  $\square$

O Lema acima mostra que basta tomarmos  $\gamma(t) = (t, t, \dots, t)$ ,  $g(t) = f(\gamma(t))$  e calcularmos  $\min_t g(t)$ . Calculando,

$$g(t) = t\sqrt{n} + n\sqrt{(t-1)^2 + (n-1)t^2} = t\sqrt{n} + n\sqrt{nt^2 - 2t + 1}$$

Derivando,

$$g'(t) = \sqrt{n} + n \frac{nt - 1}{\sqrt{nt^2 - 2t + 1}} = 0$$

$$1 - nt = \frac{\sqrt{nt^2 - 2t + 1}}{\sqrt{n}} \quad (3.1)$$

$$\Rightarrow 1 - 2nt + n^2 t^2 = \frac{nt^2 - 2t + 1}{n}$$

$$\Rightarrow (n^3 - n)t^2 + (2 - 2n^2)t + n - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (n-1)n(n+1)t^2 - 2(n-1)(n+1)t + n - 1 = 0$$

Dividindo a equação acima por  $n - 1$ , obtemos

$$\begin{aligned} n(n+1)t^2 - 2(n+1)t + 1 &= 0 \\ \Rightarrow t &= \frac{2(n+1) \pm \sqrt{4(n+1)^2 - 4n(n+1)}}{2n(n+1)} \\ &= \frac{n+1 \pm \sqrt{n+1}}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Para identificarmos o sinal certo, note que a equação 3.1 é satisfeita se  $1 - nt \geq 0$ , ou seja

$$0 \leq 1 - \frac{n+1 \pm \sqrt{n+1}}{n+1} = \frac{-1 \mp \sqrt{n+1}}{n+1},$$

ou seja, o sinal correto é menos. O mínimo é, portanto, obtido em  $t^* = \frac{n+1-\sqrt{n+1}}{n(n+1)}$ , e o valor mínimo é

$$g(t^*) = -\frac{-n-1 + \sqrt{n+1} - n^{5/2} \sqrt{\frac{n}{n+1}} - n^{3/2} \sqrt{\frac{n}{n+1}}}{\sqrt{n}(n+1)}$$

(Foi necessária uma forte ajuda computacional do Maple neste último cálculo.)

### 3.1 A existência de um autovalor real para matrizes simétricas

**Problema 3.1.1.** Use o teorema de Lagrange para determinar a solução do problema:

$$\langle Ax, x \rangle \rightarrow \max,$$

onde o conjunto de pontos admissíveis é a esfera unitária em  $\mathbb{R}^n$ . Como corolário demonstre que toda matriz simétrica pode ser diagonalizável numa base ortonormal.

Um pequeno lema vai ajudar:

**Lema 3.1.2.** Sejam  $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  funções  $C^1$  com derivadas (matrizes jacobianas)  $DF$  e  $DG$ , respectivamente. Seja  $h(x) = \langle F(x), G(x) \rangle$ . Então o gradiente

$$dh(x) = (DF(x))^T G(x) + (DG(x))^T F(x).$$



Em particular, se  $h(x) = \langle Ax, x \rangle$ , temos

$$dh(x) = (A^T + A)x$$

*Demonstração.* Podemos escrever  $h(x) = \sum_i F_i(x)G_i(x)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \partial_{x_j} h(x) &= \sum_i \partial_{x_j} F_i(x)G_i(x) + \sum_i F_i(x)\partial_{x_j} G_i(x) \\ &= (DF(x))_{ji}^T G_i(x) + (DG(x))_{ji}^T F_i(x). \end{aligned}$$

Escrevendo o resultado matricialmente, obtemos

$$dh(x) = (DF(x))^T G(x) + (DG(x))^T F(x),$$

como pedido. □

**Solução.** Seja  $A$  simétrica e considere o problema

$$\langle Ax, x \rangle \rightarrow \max, x : \|x\| = 1.$$

O Lagrangiano do problema acima é

$$L(x, \lambda) = \lambda_0 \langle Ax, x \rangle - \lambda_1 (\langle x, x \rangle - 1)$$

Pelo Lema,  $D_x L(x, \lambda) = 2\lambda_0 Ax - 2\lambda_1 x$ . Como uma função contínua num compacto tem máximo, temos que existe um ponto de máximo  $\hat{x}$ . Pelo Teorema de Lagrange, este máximo satisfaz  $2\lambda_0 A\hat{x} - 2\lambda_1 \hat{x} = 0$ .

Se  $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 0$ , o que não pode ocorrer (pelo menos um  $\lambda$  é não-nulo). Assim, podemos sem perda supor que  $\lambda_0 = 1$ , e a igualdade fica  $A\hat{x} - \lambda_1 \hat{x} = 0$ , ou seja,  $\lambda_1$  é autovalor de  $A$  com autovetor associado  $\hat{x}$ . Em particular,  $A$  tem autovalor.

Vamos usar este fato para provar:

**Teorema 1.** *Toda matriz simétrica  $A$  pode ser diagonalizada numa base ortonormal.*

*Demonstração.* Basta mostrar que existe uma matriz ortogonal  $P$  tal que  $PAP^T$  é diagonal.

É claro que toda matriz simétrica  $1 \times 1$ , um escalar, é diagonal. Suponha, por indução, que toda matriz simétrica  $(n-1) \times (n-1)$  é diagonalizável, e seja  $A$  simétrica  $n \times n$ . Pelo fato,  $A$  tem um autovalor

$\lambda$  associado a um autovetor  $v$ . Considere uma base  $v_1 = v, v_2, \dots, v_n$  de  $\mathbb{R}^n$  contendo  $v$ . Tomando a matriz ortogonal

$$Q^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

temos que

$$Q^T A Q = \left( \begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{array} \right),$$

onde os zeros na primeira linha são consequência do fato que  $Q^T A Q$  também é simétrica e que  $Q^T A Q e_1 = Q^T A v_1 = \lambda Q^T v_1 = \lambda e_1$ , em que  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T e Q^T = Q^{-1}$ . Além disso  $\tilde{A}$  é uma matriz simétrica  $(n-1) \times (n-1)$ .

Pela hipótese de indução, existe uma matriz ortogonal  $\tilde{R}$ ,  $(n-1) \times (n-1)$ , tal que  $\tilde{R} \tilde{A} \tilde{R}^T = \tilde{D}$  é diagonal. Assim, tomando a matriz também ortogonal

$$R = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{R} & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

temos que

$$R Q A Q^T R^T = \left( \begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{D} & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

É diagonal. Como  $RQ$  é ortogonal e  $Q^T R^T = (RQ)^T$ , temos o resultado.  $\square$

### 3.2 Fato 1: a interseção de figuras convexas é também convexa.

**Solução.** Seja  $(C_i)_{i \in I}$  uma família de conjuntos convexos. Queremos mostrar que  $C = \bigcap_{i \in I} C_i$  é convexo. Tome  $x, y \in C, t \in [0, 1]$ . Por hipótese,  $x, y \in C_i \forall i$ , logo  $tx + (1 - t)y \in C_i \forall i$ , e portanto  $tx + (1 - t)y \in C$ .

### 3.3 Fato 2: todo polígono convexo é interseção de um número finito de semiplanos.

Um polígono convexo é o fecho convexo de um conjunto finito de pontos, nem todos colineares. Provaremos primeiro o seguinte:

**Lema 3.3.1.** *Seja  $S$  um conjunto de  $n$  pontos no plano, nem todos colineares,  $V := \{p \in S, p \notin \text{conv}(S \setminus \{p\})\}$ , isto é,  $V$  é o conjunto de pontos que não está no fecho convexo dos outros (intuitivamente,  $V$  é o conjunto de vértices do polígono). Então  $V$  tem ao menos três pontos, e  $\text{conv}(V) = \text{conv}(S)$ .*

*Demonstração.* Provaremos isto por indução em  $n$ . Para  $n = 3$  o resultado é claro (trata-se de um triângulo, e nesse caso  $V = S$ ). Suponha que provamos o resultado para  $n - 1$  pontos no plano, e considere  $n \geq 4$  pontos.

Se  $V = S$ , acabou. Se  $V \neq S$ , existe  $a \in S, a \in \text{conv}(S \setminus \{a\})$ . Seja  $S' = S \setminus \{a\}$ , um conjunto de  $n - 1$  pontos no plano, e  $V' = \{p \in S', p \notin \text{conv}(S' \setminus \{p\})\}$ . Por indução,  $V'$  tem ao menos três pontos, e  $\text{conv}(V') = \text{conv}(S') \ni a$ . Assim,  $\text{conv}(V') \subset \text{conv}(S)$  e  $\text{conv}(V')$  é um conjunto convexo contendo  $S' \cup \{a\} = S$ , ou seja,  $\text{conv}(V') = \text{conv}(S)$ .

Falta apenas mostrar que  $V' = V$ . Claramente  $V \subseteq V'$ , pois  $a \notin V$  e para cada  $p \in V, \text{conv}(S' \setminus \{p\}) \subset \text{conv}(S \setminus \{p\}) \not\ni p$ . Para vermos que  $V' \subseteq V$ , temos que mostrar que para cada  $p \in S' \setminus V, p \in \text{conv}(S' \setminus \{p\})$ .

Para isso, note que se  $p \notin V, p \neq a, p = \sum_{x \in S \setminus \{p\}} \lambda_x x, \lambda_x \geq 0, \sum_x \lambda_x = 1$ . Mas sabemos que  $a = \sum_{y \in S'} \sigma_y y$  (note que  $\lambda_a < 1$  e

$\sigma_p < 1$  pois  $a \neq p$ . Assim,

$$\begin{aligned} p &= \sum_{x \neq a, p} \lambda_x x + \lambda_a \sum_{y \neq a} \sigma_y y \\ p(1 - \lambda_a \sigma_p) &= \sum_{x \neq a, p} (\lambda_x + \lambda_a \sigma_x) x \\ p &= \sum_{x \neq a, p} \frac{\lambda_x + \lambda_a \sigma_x}{1 - \lambda_a \sigma_p} x \end{aligned}$$

Claramente  $\frac{\lambda_x + \lambda_a \sigma_x}{1 - \lambda_a \sigma_p} \geq 0$  para cada  $x$ , e

$$\sum_{x \neq a, p} \frac{\lambda_x + \lambda_a \sigma_x}{1 - \lambda_a \sigma_p} = \frac{1 - \lambda_a + \lambda_a(1 - \sigma_p)}{1 - \lambda_a \sigma_p} = 1,$$

ou seja,  $p \in \text{conv}(S' \setminus \{p\}) \Rightarrow p \notin V'$ .

Assim,  $V = V'$ ,  $V$  tem ao menos três pontos e  $\text{conv}(V) = \text{conv}(S)$ .  $\square$

Preciso apenas provar o seguinte Lema, geometricamente intuitivo e que deixamos como *exercício para o leitor*:

**Lema 3.3.2.** *Sejam  $S, V$  como acima,  $P = \text{conv}(S) = \text{conv}(V)$ . Existe então uma ordenação cíclica de  $V$ ,*

$$v_1, v_2, \dots, v_N, v_{N+1} = v_1,$$

tal que

$$\bigcup_{i=1}^N [v_i, v_{i+1}] = \partial P.$$

Para ver como o Lema implica o resultado, considere a reta  $r_i$  que contém  $[v_i, v_{i+1}]$ . Afirmamos que  $P$  está contido em um dos semiplanos definidos por ela. Para ver isto, suponha que  $a, b$  são pontos de  $P$  que estão em lados opostos de  $r_i$ . Tome  $c \in (v_i, v_{i+1})$  de modo que  $a, b, c$  não sejam pontos colineares. Claramente existe um ponto  $d$  de  $(v_i, v_{i+1})$  que é ponto interior do triângulo  $\Delta abc$ , que está contido em  $P$  por convexidade, logo  $d \notin \partial P$ , o que é uma contradição.

Assim,  $P$  está contido na interseção dos semi-planos  $x \cdot n_i \geq 0$ , em que  $n_i$  é a normal de  $r_i$  escolhida com o sinal correto (de acordo com a discussão acima). Por outro lado, os triângulos  $\Delta v_1 v_i v_{i+1}$  claramente estão contidos na interseção (por convexidade), e sua união é igual a esta interseção. Como também estão contidos em  $P$ , segue que  $P$  é igual a esta interseção.

### 3.3.1 Discussão sobre pontos (interiores) $P, Q$ de uma figura convexa: quando temos $\overline{PQ} \subset \text{int}(C)$ ?

Seja  $C$  uma figura convexa contida em  $\mathbb{R}^n$ . Temos que demonstrar três coisas:

1.  $P, Q \in \text{int}(C) \Rightarrow \overline{PQ} \subset \text{int}(C)$
2.  $P \in \text{int}(C), Q \in \partial C \Rightarrow \overline{PQ} \setminus Q \in \text{int}(C)$
3.  $P, Q \in \partial C \Rightarrow \overline{PQ} \subset \partial C$  ou  $\overline{PQ} \setminus \{P, Q\} \subset \text{int}(C)$

**Solução.** Note que basta provar o seguinte:

*Afirmção.* Dados  $P \in \text{int}(C), Q \in C$ , tome  $R \in (P, Q) = \overline{PQ} \setminus \{P, Q\}$ . Então  $R \in \text{int}(C)$ .

*Demonstração.* Como  $P \in \text{int}(C)$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B(P, \epsilon) \subset C$ . Considere então o conjunto

$$X = \bigcup_{Z \in B(P, \epsilon)} [Q, Z] \subset C.$$

Afirmamos que  $X$  é uma vizinhança de  $R$  (isto é, contém uma bola aberta centrada em  $R$ ).

Para ver isso, tome  $\delta = \frac{\text{dist}(R, Q)}{\text{dist}(P, Q)} \epsilon$ . Seja  $S$  ponto tal que  $\text{dist}(R, S) < \delta$ , e seja  $S'$  tal que  $S \in [Q, S']$  e os triângulos  $\Delta QRS$  e  $\Delta QPS'$  sejam semelhantes (ver figura em anexo). Por semelhança,

$$\text{dist}(P, S') = \frac{\text{dist}(P, Q) \text{dist}(R, S)}{\text{dist}(R, Q)} < \epsilon,$$

logo

$$S' \in B(P, \epsilon) \Rightarrow S \in X \Rightarrow B(R, \delta) \subset X \subset C,$$

ou seja,  $R \in \text{int}(C)$ . □

Claramente a Proposição 3.3.1 implica (1) e (2). Para ver que também implica (3), sejam  $P, Q \in \partial C$  e suponha que o segmento  $\overline{PQ}$  não está completamente contido na fronteira. Então existe  $R \in (P, Q)$ ,  $R \in \text{int}(C)$ . Agora use a Proposição 3.3.1 nos segmentos  $\overline{RP}$  e  $\overline{RQ}$  para mostrar que  $(R, P) \subset \text{int}(C)$  e  $(R, Q) \subset \text{int}(C) \Rightarrow (P, Q) \subset \text{int}(C)$ .

### 3.4 Fato 3: toda reta passando por um ponto interior de uma figura convexa corta a fronteira da figura em no máximo 2 pontos

**Solução.** Este fato é um corolário da Proposição 3.3.1. Considere uma reta passando por um ponto interior  $P$  da figura, e suponha que a reta corte ao menos três pontos distintos da fronteira,  $Q_1, Q_2$  e  $Q_3$ . Independentemente de como os quatro pontos  $Q_1, Q_2, Q_3, P$  estão ordenados na reta, necessariamente existem  $1 \leq i, j \leq 3, i \neq j$ , tais que  $Q_i \in (P, Q_j)$ . Porém, pela Proposição 3.3.1, segue que  $Q_i \in \text{int}(C)$ , o que é uma contradição.

Portanto, toda reta passando por um ponto interior de uma figura convexa corta a fronteira em no máximo dois pontos.

### 3.5 A recíproca da última afirmação é verdadeira?

**Falso.** Tome  $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \geq 1\}$  (o exterior do círculo unitário). Claramente  $X$  não é convexo, mas toda reta corta o círculo em no máximo dois pontos.

### 3.6 Para uma função convexa, mínimo local implica mínimo global.

**Solução.** Seja  $f$  função convexa definida em um aberto convexo  $U$ , e  $\hat{x}$  tal que existe uma bola  $B(x, \epsilon) \subset U$  tal que  $y \in B(x, \epsilon) \Rightarrow f(y) \geq f(x)$  (i.e.,  $x$  é mínimo local).

Tome  $z \in U, t \in (0, 1)$  suficientemente pequeno para que  $(1-t)\hat{x} + tz \in B(x, \epsilon)$ . Por convexidade de  $f$ ,

$$f((1-t)x + tz) \leq (1-t)f(x) + tf(z).$$

Como  $(1-t)x + tz \in B(x, \epsilon)$ , segue que  $f((1-t)x + tz) \geq f(x)$ , portanto

$$\begin{aligned} f(x) &\leq (1-t)f(x) + tf(z) \\ tf(x) &\leq tf(z) \end{aligned}$$

Como  $t > 0$ , segue que  $f(x) \leq f(z)$ , isto é,  $x$  é mínimo global.

### 3.7 Se $f$ é convexa e diferenciável, o teorema de Fermat é condição suficiente.

**Solução.** Vamos demonstrar o seguinte:

*Afirmção.* Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa e diferenciável, e  $c \in U$ . Então, para cada  $x \in U, f(x) \geq f(c) + Df(c) \cdot (x - c)$ .

*Demonstração.* Assuma  $x \neq c$ , e considere a reta  $(1-t)c + tx = c + t(x - c)$ . Por hipótese,

$$f(c + t(x - c)) \leq (1-t)f(c) + tf(x) = f(c) + t(f(x) - f(c)).$$

Assim,

$$t(f(x) - f(c)) \geq f(c + t(x - c)) - f(c), \forall t \in [0, 1] \quad (3.2)$$

Entretanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c + t(x - c)) - f(c)}{t\|x - c\|} = Df(c) \cdot \frac{(x - c)}{\|x - c\|}.$$

Substituindo na Equação 3.2, temos

$$\begin{aligned} f(x) - f(c) &\geq \frac{1}{t}(f(c + t(x - c)) - f(c)), \forall t \in (0, 1] \\ f(x) - f(c) &\geq \|x - c\| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c + t(x - c)) - f(c)}{t\|x - c\|} \\ f(x) - f(c) &\geq \|x - c\| Df(c) \cdot \frac{(x - c)}{\|x - c\|} = Df(c) \cdot (x - c), \end{aligned}$$

o que completa a prova.  $\square$

O resultado implica que Fermat é condição suficiente segue da proposição, fazendo  $Df(c) = 0$ .

### 3.8 Uma função convexa é coerciva se a restrição da função a qualquer semi-reta é coerciva.

**Solução.** Vamos aqui usar o resultado que provaremos na próxima seção: que todo convexo ilimitado contém uma semi-reta.

**Lema 3.8.1.** *Seja  $f$  uma função convexa cuja restrição a cada semi-reta é coerciva, e tome uma sequência  $x_n \rightarrow \infty$ . Então*

$$\limsup f(x_n) = \infty.$$

*Demonstração.* Considere o fecho convexo  $C$  dos pontos  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .  $C$  é ilimitado, logo contém uma semi-reta  $r$ . Por hipótese,  $f$  é coerciva nessa semi-reta, ou seja, dado  $M > 0$ , existe  $K$  tal que  $x \in r, \|x\| > K \Rightarrow f(x) > M$ .

Seja  $x \in r, \|x\| > K$ . Como  $x \in C$ ,  $x = \sum_{k=1}^N \lambda_k x_{n_k}, \lambda_k \geq 0$  e  $\sum_k \lambda_k = 1$ . Como  $f$  é convexa,

$$M < f(x) \leq \sum_k \lambda_k f(x_{n_k}) \leq \max_k f(x_{n_k}).$$

Assim, para todo  $M > 0$  existe  $x_n$  tal que  $f(x_n) > M$ . Isto implica claramente que  $\limsup f(x_n) = \infty$ .  $\square$



**Lema 3.8.2.** *Seja  $f$  uma função convexa cuja restrição a cada semi-reta é coerciva. Então  $f$  é coerciva.*

*Demonstração.* Seja  $x_n$  uma sequência,  $x_n \rightarrow \infty$ . Pelo Lema,  $\limsup f(x_n) = \infty$ . Suponha, por contradição, que  $\liminf f(x_n) < \infty$ . Nesse caso, existe uma subsequência  $y_n$  de  $x_n$  tal que  $f(\{y_n\})$  é um conjunto limitado. Aplicando o Lema para  $y_n$ , obtemos que  $\limsup y_n = \infty$ , o que é uma contradição.  $\square$

### 3.9 Uma figura convexa é limitada se não houver nenhuma semi-reta contida na figura

**Solução.** Vamos provar o resultado por indução em  $n$ . O resultado é claro para  $n = 1$ , e suponha, por indução, que provamos o resultado para convexos  $C \subset \mathbb{R}^{n-1}$ . Seja  $C$  convexo,  $C \subset \mathbb{R}^n$ , e suponha, por contradição que  $C$  é ilimitado e não contém nenhuma semi-reta. Consideremos dois casos:

**Caso 1:**  $C$  tem interior não vazio. Em outras palavras,  $C$  contém uma bola aberta.

Nesse caso, seja  $x_0 \in \text{int}(C)$  e seja  $\{x_i\}_{i=1}^n$  uma sequência não-nula cujo módulo tende ao infinito. A sequência  $(x_i - x_0)/\|x_i - x_0\|$  é uma sequência em um compacto (a esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$ ), portanto tem uma subsequência convergente. Seja  $y_i \rightarrow y$  esta sequência (podemos descartar os outros termos e considerar que a sequência original era  $x_i = \|x_i - x_0\|y_i + x_0$ ).

Como  $x_0 \in \text{int}(C)$ , seja  $\epsilon$  tal que a bola de raio  $\epsilon$  ao redor de  $x_0$  esteja contida em  $C$ . Além disso, seja  $t^*$  tal que  $x_0 + t^*y =: z^* \notin C$ . Note que este  $t^*$  existe, pois estamos assumindo que  $C$  não contém semi-reta alguma. Também, por convexidade temos que para cada  $t > t^*$  vale  $x_0 + ty \notin C$ .

Por outro lado, como  $\|x_i - x_0\| \rightarrow \infty$ , segue que existe  $N$  tal que  $i > N \Rightarrow x_0 + 2t^*y_i =: z_i \in C$ . Considere agora a semi-reta partindo de  $z_i$  que contém  $z^*$  (chamemos de  $L_{z_i}$ ). Como  $z_i \rightarrow x_0 + 2t^*y =: z$  e a semi-reta partindo de  $z$  que contém  $z^*$  contém também  $x_0$ , segue que existe  $\tilde{z}_i$  suficientemente próximo de  $z$  tal que a semi-reta  $L_{\tilde{z}_i}$  contém

algum ponto  $\tilde{x}$  de  $B(x_0, \epsilon) \subset C$ . Absurdo! Os pontos  $\tilde{z}_i, \tilde{x} \in C$ , mas  $[z_i, \tilde{x}] \ni z^* \notin C$ , contradizendo convexidade de  $C$ .

**Caso 2:**  $C$  tem interior vazio.

Neste caso, afirmo que  $C$  está contido em um hiperplano de dimensão  $n - 1$ . Se assim não fosse, haveria  $n + 1$  pontos que não estão contidos em nenhum hiperplano de dimensão  $n - 1$ , e o fecho convexo  $F$  destes  $n + 1$  pontos é, portanto, um  $n$ -simplexo, que tem interior não vazio em  $\mathbb{R}^n$ . Mas  $F \subset C$ , o que é uma contradição.

Assim,  $C \subset H \approx \mathbb{R}^{n-1}$  (mais precisamente, existe uma transformação ortogonal afim levando  $H$  em  $\mathbb{R}^{n-1}$ ), e, por indução,  $C$  contém uma semi-reta.

Assim, provamos que se  $C$  é ilimitado, tem que conter uma semi-reta, o que completa a prova.

### 3.10 Extensão de Weierstrass para função descontínuas

*Afirmção.* Seja  $f$  semi-contínua inferior,  $A$  compacto. Então  $f$  admite mínimo global.

*Demonstração.* Seja  $y_n = f(x_n)$  uma sequência em  $f(A)$  que converge para  $\inf f(A)$ , quer seja esse ínfimo  $-\infty$  ou não. Como  $A$  é compacto, existe uma subsequência convergente  $x_{n_k} \rightarrow x$ . Semicontinuidade inferior implica que  $\liminf f(x_{n_k}) \geq f(x)$ , mas por outro lado

$$f(x) \geq \inf f(A) = \lim f(x_{n_k}) = \liminf f(x_{n_k}) \geq f(x),$$

portanto temos  $f(x) = \inf f(A)$ , ou seja,  $x$  é ponto de mínimo global.  $\square$

Esboce o gráfico de uma função semi-contínua inferiormente (s.c.i.)! Será que uma função pode ser s.c.i. e convexa (resp. convexa) ao mesmo tempo?

### 3.11 Convexidade e o epigrafo de uma função convexa.

**Problema 3.11.1.** *Mostre que  $f$  é convexa se e somente se*

$$f(ax + (1 - a)y) \leq af(x) + (1 - a)f(y),$$

para todo  $x, y$  em  $\text{Dom}(f)$  e  $a \in [0, 1]$ .

**Solução.** Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  definida no aberto convexo  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Queremos mostrar que o conjunto  $\text{Epi}(f) = \{(\mathbf{a}, a') \in U \times \mathbb{R}; a' \geq f(\mathbf{a})\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é convexo se, e somente se,  $f$  é convexa (ie. para quaisquer  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$  e  $t \in [0, 1]$  vale  $f((1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}) \leq (1 - t)f(\mathbf{a}) + tf(\mathbf{b})$ ).

Suponha  $\text{Epi}(f)$  convexo, e tome  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$ ,  $t \in [0, 1]$ . Como  $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ ,  $(\mathbf{b}, f(\mathbf{b}))$  pertencem a  $\text{Epi}(f)$  e  $\text{Epi}(f)$  é convexo, vale  $((1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}, (1 - t)f(\mathbf{a}) + tf(\mathbf{b})) \in \text{Epi}(f)$ . Mas então pela definição de  $\text{Epi}(f)$  vem que  $f((1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}) \leq (1 - t)f(\mathbf{a}) + tf(\mathbf{b})$ , de modo que  $f$  é convexa.

Reciprocamente, suponha que  $f$  seja convexa e tome dois pontos arbitrários em  $\text{Epi}(f)$ ,  $(\mathbf{a}, a')$ ,  $(\mathbf{b}, b')$ . Então  $a' \geq f(\mathbf{a})$  e  $b' \geq f(\mathbf{b})$ , de maneira que, com  $t \in [0, 1]$ ,  $(1 - t)a' + tb' \geq (1 - t)f(\mathbf{a}) + tf(\mathbf{b}) \geq f((1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b})$ . Assim,  $((1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}, (1 - t)a' + tb') \in \text{Epi}(f)$  e  $\text{Epi}(f)$  é um conjunto convexo.

### 3.12 Convexidade e diferenciabilidade

**Problema 3.12.1.** *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ . Mostre que  $f$  é convexa se, e somente se, sua forma quadrática hessiana é não-negativa (i.e.  $f''(\mathbf{x}) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in U$ ).*

**Solução.** De fato, suponha  $f''(\mathbf{x}) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in U$ . Então usando o Teorema de Taylor (com fórmula de valor médio para o resto) temos que, para qualquer  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in [0, 1]$ , existem  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in \mathbb{R}^n$  tais que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}) &= f((1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}) + \nabla f((1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b})(t(\mathbf{a} - \mathbf{b})) \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle f''(\mathbf{c}_1)(t(\mathbf{a} - \mathbf{b})), t(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \rangle \end{aligned}$$

$$\geq f((1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}) + \nabla f((1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b})(t(\mathbf{a} - \mathbf{b}))$$

e, da mesma maneira,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{b}) &= f((1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}) + \nabla f((1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b})((1-t)(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle f''(\mathbf{c}_2)((1-t)(\mathbf{b} - \mathbf{a})), ((1-t)(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \rangle \\ &\geq f((1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}) + \nabla f((1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b})((1-t)(\mathbf{b} - \mathbf{a})). \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação por  $(1-t)$ , a segunda por  $t$  e somando as duas equações alcançamos a desigualdade desejada:

$$(1-t)f(\mathbf{a}) + tf(\mathbf{b}) \geq f((1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}).$$

Vamos provar a recíproca por absurdo. Note primeiramente que se  $f$  é convexa, então para todo  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U, t \in (0, 1]$ , vale

$$\begin{aligned} f(t\mathbf{b} + (1-t)\mathbf{a}) &\leq tf(\mathbf{b}) + (1-t)f(\mathbf{a}) \\ \Rightarrow \frac{f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})) - f(\mathbf{a})}{t} &\leq f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Daí fazendo  $t \rightarrow 0$  temos  $\nabla f(\mathbf{a})(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \leq f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$ .

Agora, suponha que a segunda derivada de  $f$  (ou “matriz Hessiana”) não seja positiva semi-definida em algum ponto  $\mathbf{a} \in U$ . Então, pela continuidade da segunda derivada, existe  $\mathbf{b} \in U$  tal que, para  $t \in [0, 1]$ ,

$$\langle f''(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}))(\mathbf{b} - \mathbf{a}), (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \rangle < 0.$$

Ora, mas então pela expansão em Taylor temos que  $f(\mathbf{b}) \leq f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a})(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \leq f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$ , absurdo. Logo, a matriz da segunda derivada de  $f$  precisa ser positiva semi-definida.

### 3.13 Construindo funções de suporte compacto.

**Problema 3.13.1.** *Seja  $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ ,  $c \in (t_0, t_1)$ . Tome  $\varepsilon$  tal que  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset (t_0, t_1)$  e defina*

$$\eta(t) = \begin{cases} [(c + \varepsilon) - t]^3 [t - (c - \varepsilon)]^3, & \text{se } t \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon], \\ 0, & \text{se } t \notin [c - \varepsilon, c + \varepsilon]. \end{cases}$$

Mostre que

$$(i) \quad \eta \in C^1,$$

$$(ii) \quad \eta(t_0) = \eta(t_1) = 0, \text{ e}$$

$$(iii) \quad \eta(t) > 0, \quad t \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon).$$

**Solução.** É fácil ver da definição acima que  $\eta(\cdot)$  é diferenciável em  $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  e em  $[t_0, t_1] \setminus [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ . Resta mostrar que a função é diferenciável nos pontos  $c - \varepsilon$  e  $c + \varepsilon$ . Como os dois casos são análogos, vamos considerar apenas o primeiro e mostrar que as derivadas laterais são iguais. Começemos pela derivada pela direita:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\eta(c - \varepsilon + h) - \eta(c - \varepsilon)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{[c + \varepsilon - c + \varepsilon - h]^3 [c - \varepsilon + h - (c - \varepsilon)]^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{[2\varepsilon - h]^3 h^3}{h} = 0, \end{aligned}$$

que é trivialmente igual à derivada lateral pela esquerda.

O segundo item segue diretamente da definição acima, já que, como  $t_0, t_1 \notin [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ , vale  $\eta(t_0) = 0 = \eta(t_1)$ .

O terceiro item também é consequência da definição de  $\eta(\cdot)$ , já que se  $t \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  então  $[(c + \varepsilon) - t]^3 > 0$  e  $[t - (c - \varepsilon)]^3$ , de modo que  $\eta(\cdot)$  é positiva.

### 3.14 Usando as condições KKTJ para a demonstração de um problema de análise

As condições de KKTJ (Karush-Kuhn-Tucker-John) são condições necessárias para a existência de soluções ótimas num problema de programação não-linear. O método de Lagrange, do curso de cálculo vetorial tratava de problemas de otimização sujeitos a restrições do tipo igualdade. KKTJ generalizam essas condições para lidar com restrições do tipo desigualdade e é amplamente aplicada em problemas de otimização convexos.

**Problema 3.14.1.** Usando as condições KKT determine

1.  $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \text{extr}, x_1^4 + x_2^4 \leq 1$  ;

2.  $x_1^4 + x_2^4 \rightarrow \text{extr}, x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ .

**Solução.** Esse problema vai ilustrar como várias desigualdades de análise podem ser re-formuladas como problemas de otimização. Isso nos leva ao conceito de *constantes finas*. Por exemplo, nós sabemos do curso de álgebra linear que quaisquer duas normas num espaço vetorial são equivalentes. Como comparar duas normas da maneira mais econômica possível? Queremos determinar as melhores constantes de comparação.

(a) Vamos primeiro considerar o problema de minimização. Escrevendo  $\mathcal{L} = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1^4 + x_2^4 - 1)$ , as condições de KKT passam a ser:

$$2x_1 + 4\lambda x_1^3 = 0 \quad (3.3)$$

$$2x_2 + 4\lambda x_2^3 = 0 \quad (3.4)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (3.5)$$

$$\lambda(x_1^4 + x_2^4 - 1) = 0. \quad (3.6)$$

Se  $\lambda = 0$ , então  $x_1^* = x_2^* = 0$  (para que as equações (3.3) e (3.4) sejam satisfeitas), e é fácil ver que este é o único ponto de mínimo. De fato, se  $\lambda > 0$  e  $x_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2$  vale  $\lambda = -\frac{1}{2x_i^2}$ , o que contradiz  $\lambda > 0$  (também não pode ocorrer  $\lambda > 0$  e  $x_1 = x_2 = 0$ , que contradiz (3.6)).

O problema de maximização é mais sutil. Temos

$$\mathcal{L} = -x_1^2 - x_2^2 + \lambda(x_1^4 + x_2^4 - 1),$$

com as condições:

$$-2x_1 + 4\lambda x_1^3 = 0$$

$$-2x_2 + 4\lambda x_2^3 = 0$$

$$\lambda \geq 0$$

$$\lambda(x_1^4 + x_2^4 - 1) = 0.$$

Como antes, se  $\lambda = 0$ , então  $x_1 = x_2 = 0$ . Contudo, se  $\lambda > 0$ , temos que

$$\lambda = \frac{1}{2x_1^2} = \frac{1}{2x_2^2}$$

donde  $x_1^2 = x_2^2$ . Daí

$$2x_1^4 = 1 \Rightarrow x_1^4 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}},$$

de modo que os pontos de máximo são, necessariamente:

$$x_1^* = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

$$x_2^* = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

(isto é, temos 4 pontos de máximo).

(b) Novamente, consideramos primeiro o problema de minimização. Escrevendo  $\mathcal{L} = x_1^4 + x_2^4 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1)$ , as condições de KKT passam a ser:

$$4x_1^3 + 2\lambda x_1 = 0 \quad (3.7)$$

$$4x_2^3 + 2\lambda x_2 = 0 \quad (3.8)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (3.9)$$

$$\lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0. \quad (3.10)$$

Se  $\lambda = 0$ , então  $x_1^* = x_2^* = 0$  (para que as equações (3.7) e (3.8) sejam satisfeitas), e este é o único ponto de mínimo. Com efeito, se  $\lambda > 0$  e  $x_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2$  vale  $\lambda = -2x_i^2$ , o que contradiz  $\lambda > 0$  (também não pode ocorrer  $\lambda > 0$  e  $x_1 = x_2 = 0$ , que contradiz (3.10)).

Para o problema de maximização, temos  $\mathcal{L} = -x_1^4 - x_2^4 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1)$ , com as condições:

$$-4x_1^3 + 2\lambda x_1 = 0$$

$$-4x_2^3 + 2\lambda x_2 = 0$$

$$\lambda \geq 0$$

$$\lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0.$$

Se  $\lambda = 0$ , então  $x_1 = x_2 = 0$ , que já não é ponto de ótimo. Se  $\lambda > 0$ , então

$$\lambda = 2x_1^2 = 2x_2^2,$$

donde  $x_1^2 = x_2^2$ . Usando (3.10), temos

$$2x_1^2 = 1 \Rightarrow x_1^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$$

de modo que os pontos de máximo são, necessariamente:

$$\begin{aligned} x_1^* &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_2^* &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

isto é, temos 4 pontos de máximo).

### 3.15 O método de relaxamento para problemas de otimização

*Relaxamento* em otimização matemática consiste em aproximar a solução de um problema difícil por um problema mais simples, cuja solução *relaxada* fornece informações sobre a solução do problema original.

**Problema 3.15.1.** *Seja  $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  e elíptica, i.e., existe  $\alpha > 0$  tal que*

$$f_0''(w)(v, v) \geq \alpha(v, v),$$

$\forall v, w \in \mathbb{R}^n$ .

(1) *Será que  $f_0$  sempre admite um mínimo global? Esse mínimo é único? Justifique a sua resposta.*

(2) *Seja  $\hat{x}$  uma solução do problema*

$$f_0(x) \rightarrow \min, x \in \mathbb{R}^n.$$

*Denote por  $(e_i)$  a base canônica de  $\mathbb{R}^n$ . Construa uma sequência de aproximações para  $\hat{x}$  usando o seguinte algoritmo (método do relaxamento):*



**Passo 1.** Seja  $x^{(0)}$  o chute inicial e considere a seguinte família de subproblemas,

$$f_0(x_{i-1} + te_i) \rightarrow \min, t \in \mathbb{R}; i = 1, 2, \dots, n \text{ (} P_i \text{)},$$

e  $x_1 = x^{(0)}$ . Chame a solução de  $(P_{i+1})$ ,  $x_{i+1}$ . A última dessas soluções (se ela existir) será  $x^{(1)}$  a nova aproximação do problema:  $x^{(1)} = x_n$ .

**Passo 2.** Repita o passo 1 até a precisão desejada:

$$|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \epsilon = 10^{-d},$$

onde  $d$  é um inteiro escolhido pelo usuário. Ele, o inteiro, nos diz aproximadamente quantos dígitos corretos da solução estão corretos.

(i) Mostre que para cada subproblema  $(P_{i+1})$ ,  $x_{i+1}$  existe e é único.

(ii) Mostre que  $\lim |x^{(k+1)} - x^{(k)}| = 0$ .

(iii) Mostre que  $\lim \{f_0(x^{(k)}) - f_0(x^{(k+1)})\} = 0$ .

(iv) Mostre que  $\lim |\hat{x} - x^{(k)}| = 0$ .

(v) Determine se o algoritmo acima funciona para a função

$$f_0(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1 + x_2) - |x_1 - x_2|.$$

O que pode dar errado?

Sugerimos o leitor que teste o algoritmo acima com a sua função usando a sua função favorita de duas variáveis. Considere uma forma quadrática positiva definida, e esboce os primeiros passos do algoritmo acima.

**Solução.** (1) Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in C^2$ , elíptica. Vamos primeiro mostrar que  $f$  é coerciva (para minimização), de modo a garantir a existência de um mínimo global. Como

$$\langle (f''(\mathbf{x}))\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq \alpha \|\mathbf{v}\|^2, \forall \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,$$

usando o Teorema de Taylor (com fórmula de valor médio para o resto), temos que, para qualquer  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , existe  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{y}) + \nabla f(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{1}{2} \langle f''(\mathbf{z})(\mathbf{x} - \mathbf{y}), (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rangle \\ &\geq f(\mathbf{y}) + \nabla f(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{1}{2} \alpha \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2. \end{aligned}$$

Tome  $\mathbf{y}$  fixo. É fácil ver que  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty \Rightarrow \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \rightarrow \infty$  (pois  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|$ ). Logo, se  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &\geq f(\mathbf{y}) + \nabla f(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \alpha \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \left( \frac{f(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} + \nabla f(\mathbf{y}) \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} + \alpha \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \right). \end{aligned}$$

Como a expressão  $\frac{f(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} + \nabla f(\mathbf{y}) \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}$  é limitada (basta usar Cauchy-Schwarz), segue que  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty \Rightarrow f(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ . Assim,  $f$  é coerciva (para a minimização) e, por conseguinte, possui um ponto de mínimo global.

Para mostrar a unicidade do ponto de mínimo, observe que como

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y}) + \nabla f(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{1}{2} \alpha \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2. \quad (3.11)$$

e

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \alpha \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2,$$

vale, para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{y}), (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rangle \geq \alpha \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2. \quad (3.12)$$

Daí segue de (3.12) que existe apenas um único  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  tal que  $f(\mathbf{x}^*)$  é mínimo global. De fato, como todo ponto no domínio de  $f$  é interior, se  $\mathbf{x}^*$  é ponto de extremo então  $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ . Daí, se  $\mathbf{y}^* \in \mathbb{R}^n$  também é tal que  $\nabla f(\mathbf{y}^*) = \mathbf{0}$ , então:

$$\mathbf{0} = \langle \nabla f(\mathbf{x}^*) - \nabla f(\mathbf{y}^*), (\mathbf{x}^* - \mathbf{y}^*) \rangle \geq \alpha \|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}^*\|^2,$$

ou seja,  $\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^*$ .

(2) (i) Em primeiro lugar, mostraremos que toda função  $C^2$ , elíptica, é estritamente convexa. Em segundo lugar, veremos que se  $f$  é estritamente convexa então qualquer restrição sua a uma reta é convexa. Daí, cada subproblema  $(P_{i+1})$  admite solução única (sabemos do item anterior que existe  $\mathbf{x}^*$  tal que  $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$ , logo em cada direção  $\mathbf{e}_i$  a derivada direcional se anula e para funções estritamente convexas qualquer ponto de extremo local é mínimo global e único).

Para estabelecer convexidade estrita, note que, usando (3.11) duas vezes, obtemos:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &> f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) + \nabla f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y})(t-1)(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \\ f(\mathbf{y}) &> f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) + \nabla f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y})(t)(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \end{aligned}$$

donde multiplicando a primeira equação acima por  $t$  e a segunda por  $1-t$  e somando, obtemos que

$$tf(\mathbf{x}) + (1-t)f(\mathbf{y}) > f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}).$$

Para mostrar que a restrição de  $f$  a uma reta também estritamente convexa, note que fazendo  $\varphi(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$  temos, para  $s, t, \alpha \in [0, 1]$ :

$$\begin{aligned} \varphi((1-\alpha)s + \alpha t) &= f(\mathbf{x} + ((1-\alpha)s + \alpha t)\mathbf{v}) \\ &= f((1-\alpha)(\mathbf{x} + s\mathbf{v}) + \alpha(\mathbf{x} + t\mathbf{v})) \\ &< (1-\alpha)f(\mathbf{x} + s\mathbf{v}) + \alpha f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) \\ &= (1-\alpha)\varphi(s) + \alpha\varphi(t). \end{aligned}$$

(ii) Seja  $\mathbf{x}_{(i-1)}^k = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  o  $(i-1)$ -ésimo passo da  $k$ -ésima iteração (que está fixada). Chamando a função objetivo por  $f$ , simplesmente, temos que o problema de otimização no  $i$ -ésimo passo é:

$$\min_{x_i} F_i(x_i) = \min_{x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad (3.13)$$

onde todas as entradas que não a  $i$ -ésima estão fixas (e a iteração está implícita na fórmula acima).

Seja  $x_i^* = \arg \min_{x_i} F_i(x_i)$ , i.e.  $x_i^*$  é a solução do problema (3.13) acima. Então, mais uma vez pelo Teorema de Lagrange, existe  $z$  tal que

$$F_i(x_i) - F_i(x_i^*) = F_i'(x_i^*)(x_i - x_i^*) + \frac{1}{2}F_i''(z)(x_i - x_i^*)^2.$$

Como  $x_i^*$  é ponto de máximo interior, necessariamente temos  $F'(x_i^*) = 0$ , e chamando  $\alpha = F_i''(z)$  obtemos

$$F_i(x_i) - F_i(x_i^*) \geq \frac{\alpha}{2}(x_i - x_i^*)^2,$$

isto é,

$$f(\mathbf{x}_{(i-1)}^k) - f(\mathbf{x}_i^k) \geq \frac{\alpha}{2}\|\mathbf{x}_{i-1}^k - \mathbf{x}_i^k\|^2.$$

Daí, usando a notação sugerida pelo enunciado, como  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}_n^k$ , temos que a diferença  $f(\mathbf{x}_{(i-1)}^k) - f(\mathbf{x}_i^k)$  é uma soma telescópica, de modo que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^{(k+1)}) &= f(\mathbf{x}_0^k) - f(\mathbf{x}_1^k) + f(\mathbf{x}_1^k) - f(\mathbf{x}_2^k) + \dots + f(\mathbf{x}_n^k) \\ &\geq \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^n \|\mathbf{x}_{i-1}^k - \mathbf{x}_i^k\|^2. \end{aligned}$$

Como  $\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{(k+1)}\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \|\mathbf{x}_{i-1}^k - \mathbf{x}_i^k\|^2$ , obtemos, finalmente, que

$$f(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^{(k+1)}) \geq \frac{\alpha}{2}\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{(k+1)}\|^2.$$

Logo, teremos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{(k+1)}\| = 0$  se mostrarmos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^{(k+1)}) = 0$ . Ora, mas isso é justamente o que pede o item seguinte. Vamos a ele.

(iii) Já vimos no item (b) que  $f$  admite mínimo global, de maneira que  $f(\mathbf{x}^k)$  é limitada inferiormente. Logo, teremos a convergência se provarmos que a sequência  $f(\mathbf{x}^k)$  é decrescente. De fato, pelo modo como definimos  $\mathbf{x}_i^k$ , vale que  $f(\mathbf{x}_i^k) \geq f(\mathbf{x}_{i+1}^k)$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ , pois

$$f(\mathbf{x}_i^k) = F_i(x_i^k) \geq \min_y F_i(y) = f(\mathbf{x}_{i+1}^k)$$

(se  $i = n$ , então o mesmo argumento continua valendo, já que  $f(\mathbf{x}_n^k) = f(\mathbf{x}_0^{(k+1)})$ ).

Como a sequência  $f(\mathbf{x}^k)$  é limitada e decrescente, ela é convergente e, assim, é uma sequência de Cauchy. Isso estabelece este item e o item anterior.

(iv) Ora, já provamos em (3.12) que

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{y}), (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rangle \geq \alpha \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2.$$

Aplicando Cauchy-Schwarz, vem que

$$\|\nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{y})\| \geq \alpha \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Considerando a sequência  $\{\mathbf{x}^k\}$  e o ótimo  $\hat{\mathbf{x}}$ , temos

$$\|\nabla f(\mathbf{x}^k)\| \geq \alpha \|\mathbf{x}^k - \hat{\mathbf{x}}\|, \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

Logo, basta provar que  $\nabla f(\mathbf{x}^k) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Ora, suponha por absurdo que isso não valha. Então existe ao menos uma coordenada  $j$  de  $\nabla f(\mathbf{x}^m)$  maior do que uma constante (tome, sem perda,  $c > 0$ ),  $\forall m = 1, 2, \dots$ . Mas então  $f(\mathbf{x}^k)$  não pode convergir. De fato, seria possível tomar um passo a tornar  $f$  estritamente menor: basta minimizar a  $j$ -ésima coordenada, igualando a derivada parcial a zero (como  $f$  é coerciva e estritamente convexa em cada direção, a derivada parcial na direção  $j$  pode ser tornada zero). Como  $c > 0$  está fixo, teríamos que  $|f(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^{(k+1)})| \rightarrow 0$ , o que contradiz a convergência do item (ii). Logo, é preciso que  $\nabla f(\mathbf{x}^k) \rightarrow 0$ .

(v) Com a função

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1 + x_2) - |x_1 - x_2|,$$

o método deixa de funcionar. As figuras 1 e 2 abaixo mostram a presença de dois pontos de mínimo, o que viola a convexidade estrita. Com efeito, é possível que o método oscile entre as duas bacias de atração indefinidamente e não convirja para nenhum dos pontos de mínimo.

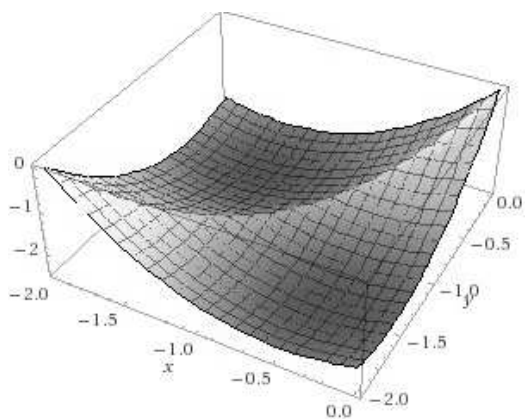


Figura 1

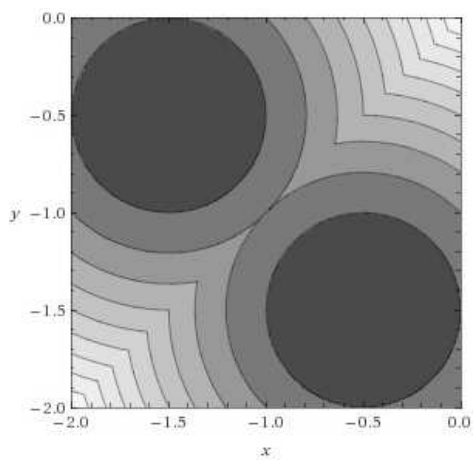


Figura 2

### 3.16 Otimização com subgradientes

Cálculo com subgradiente é uma ferramenta bastante útil no cálculo aproximado de soluções ótimas de problemas de otimização convexos que não são suaves.

**Problema 3.16.1.** *Seja  $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa, não necessariamente suave. Assuma que  $f$  é Lipschitz contínua.*

(1) *A projeção  $\pi_G(x)$  de um ponto  $x$  num conjunto  $G$  convexo em  $\mathbb{R}^n$  é definida como*

$$|x - y| \rightarrow \min, y \in G, (P_x).$$

*Mostre que o problema tem solução e é único.*

(2) *Seja  $x \in \mathbb{R}^n$  e seja  $G$  um conjunto fechado e convexo. Então,*

$$|\pi_G(x) - u|^2 \leq |x - u|^2 - |x - \pi_G(x)|^2.$$

(3) *Considere a seguinte sequência de pontos em  $G$ :*

$$x_{k+1} = \pi_G(x_k - \gamma_k s_k), k = 0, 1, 2, \dots$$

*onde  $x_0 \in G$ ,  $s_k \in \partial f(x_k)$  e  $\gamma_k > 0$  é o tamanho do passo. Quando  $S_{\min} = f(\hat{x})$  é conhecido, uma escolha típica de passo é  $\gamma_k = \Delta_k f / |s_k|$ ,  $\Delta_k = f(x_k) - S_{\min}$ .*

Hipóteses: seja  $\hat{X} \neq \emptyset$  o conjunto solução do problema de otimização convexo, e assuma que

$$f(x) - S_{\min} \geq \alpha |x - \pi_{\hat{X}}(x)|,$$

para alguma constante  $\alpha$  que só depende da norma e da dimensão  $n$ . Essa condição força que o gráfico da função seja pontudo, mas talvez com a ponta larga.

(4) *Mostre que*

$$|x_{k+1} - \hat{x}| \leq |x_k - \hat{x}| - \gamma_k^2.$$

(5) *Mostre que  $|s_k| \leq C, \forall k$ .*

(6) *Conclua que*

$$\text{dist}(x_k, \hat{X}) \leq q^k \text{dist}(x_0, \hat{X}), \forall k,$$

onde  $q = \sqrt{1 - \alpha^2/C^2}$ .

(7) Aplique o método do subgradiente ao seguinte problema,

$$f(x) = |Ax - b|_1 \rightarrow \min,$$

$x \in \mathbb{R}^2, b = (6, 0, 0), A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . E discuta a sua solução.

(8) Dados os pontos  $(-1/2, 0), (1/2, 0), (1, 0)$ , encontre o ponto que minimizam a soma das distâncias aos três pontos dados usando o método do subgradiente.

**Solução.** (1) Definimos primeiro a *distância do ponto*  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  ao conjunto  $G$  como  $d(\mathbf{x}, G) = \inf\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y} \in G\}$ . Pela própria definição como um ínfimo, é possível encontrar uma sequência  $\{\mathbf{y}_k\} \in G$  tal que  $d(\mathbf{x}, G) \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}_k| < d(\mathbf{x}, G) + \frac{1}{k}$ . Como  $\{\mathbf{y}_k\}$  é uma sequência limitada ( $\mathbf{y}_k \in B_{d(\mathbf{x}, G)+1}(\mathbf{x}), \forall k = 1, 2, \dots$ ), ela possui subsequência convergente, e denote por  $\mathbf{y}_\infty$  o limite da subsequência. Assim,  $d(\mathbf{x}, G) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}_\infty|$  e  $\mathbf{y}_\infty \in G$ , pois  $G$  é convexo fechado.

A unicidade é consequência da convexidade de  $G$ . Com efeito, sejam  $\mathbf{y}_1^*$  e  $\mathbf{y}_2^*$  tais que  $d(\mathbf{x}, G) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}_1^*| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}_2^*|$ . Chame esta distância de  $l$  e suponha que  $\mathbf{y}_1^* \neq \mathbf{y}_2^*$ . Então

$$\begin{aligned} 0 &< \|(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1^*) - (\mathbf{x} - \mathbf{y}_2^*)\|^2 \leq 2\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_1^*\|^2 + 2\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_2^*\|^2 \\ &= 4\left\|\frac{1}{2}[(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1^*)^2 + (\mathbf{x} - \mathbf{y}_2^*)^2]\right\|^2 \\ &= 2\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_1^*\|^2 + 2\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_2^*\|^2 - 4\left\|\frac{\mathbf{y}_1^* + \mathbf{y}_2^*}{2} - \mathbf{x}\right\|^2 \\ &= 2l^2 + 2l^2 - 4\left\|\frac{\mathbf{y}_1^* + \mathbf{y}_2^*}{2} - \mathbf{x}\right\|^2. \end{aligned}$$

Daí,

$$\left\|\frac{\mathbf{y}_1^* + \mathbf{y}_2^*}{2} - \mathbf{x}\right\| < l,$$

e como  $\frac{\mathbf{y}_1^* + \mathbf{y}_2^*}{2} \in G$ , isso contradiz a minimalidade de  $l$ , absurdo.



(2) Seja  $\mathbf{x} \in R^n$  fixado,  $\mathbf{u} \in G$  qualquer e  $\mathbf{p} = \pi_G(\mathbf{x})$  a projeção de  $\mathbf{x}$  em  $G$ .

Note que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p} - \mathbf{u}\|^2 &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^2 \\ \Leftrightarrow \langle \mathbf{p} - \mathbf{u}, \mathbf{p} - \mathbf{u} \rangle &\leq \langle \mathbf{x} - \mathbf{u}, \mathbf{x} - \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{x} - \mathbf{p} \rangle \\ \Leftrightarrow \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle - 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle &\leq -2\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{p} \rangle - \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle \\ \Leftrightarrow -\langle \mathbf{x}, \mathbf{p} - \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} - \mathbf{u} \rangle &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{u} - \mathbf{p} \rangle &\leq 0. \end{aligned}$$

Vamos provar esta última desigualdade. Para  $\alpha > 0$ , defina  $\mathbf{u}_\alpha = (1 - \alpha)\mathbf{p} + \alpha\mathbf{u}$ , de modo que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{u}_\alpha\|^2 &= \|(1 - \alpha)(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u})\|^2 \\ &= (1 - \alpha)^2\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^2 + \alpha^2\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|^2 + 2(1 - \alpha)\alpha \langle \mathbf{u} - \mathbf{p}, \mathbf{x} - \mathbf{p} \rangle. \end{aligned}$$

Considere a função  $g(\alpha) = \|\mathbf{x} - \mathbf{u}_\alpha\|^2$ , e da última desigualdade nós temos que  $\left. \frac{\partial g}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} =$

$$= -2\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^2 + 2\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{x} - \mathbf{u} \rangle = -2\langle \mathbf{u} - \mathbf{p}, \mathbf{x} - \mathbf{p} \rangle.$$

Suponha por absurdo que  $\langle \mathbf{u} - \mathbf{p}, \mathbf{x} - \mathbf{p} \rangle > 0$  para algum  $\mathbf{u} \in G$ , de maneira que

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} \{\|\mathbf{x} - \mathbf{u}_\alpha\|\}^2 \right|_{\alpha=0} < 0,$$

e para  $\alpha$  suficientemente pequeno vale  $\|\mathbf{x} - \mathbf{u}_\alpha\| < \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|$ . Obviamente isso contradiz o fato de  $\mathbf{p}$  ser a projeção de  $\mathbf{x}$  em  $G$ . Logo, devemos ter  $\langle \mathbf{u} - \mathbf{p}, \mathbf{x} - \mathbf{p} \rangle \leq 0, \forall \mathbf{u} \in G$ .

(3) Basta usar o item anterior para notar que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}\|^2 &\leq \|\mathbf{x}_k - \gamma_k \mathbf{s}_k - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \\ &= \|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}\|^2 - 2\gamma_k \mathbf{s}_k \langle \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{s}_k \rangle + \gamma_k^2 \|\mathbf{s}_k\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}\|^2 - 2\gamma_k (f(\mathbf{x}_k) - f(\hat{\mathbf{x}})) + \gamma_k^2 \|\mathbf{s}_k\|^2 \\ &= \|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}\|^2 - \gamma_k^2 \|\mathbf{s}_k\|^2. \end{aligned}$$

(4) Vamos usar o fato de que  $f(\mathbf{x}) - f(\hat{\mathbf{x}}) \geq \alpha \|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}\|$ . Daí,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}\|^2 &\leq \|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}\|^2 - \frac{(f(\mathbf{x}_k) - f(\hat{\mathbf{x}}))^2}{\|\mathbf{s}_k\|^2} \\ &\leq \|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{\|\mathbf{s}_k\|^2}\right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Seja  $C$  a constante de Lipschitz de  $f$ . Então temos

$$\mathbf{s}_k((\mathbf{s}_k + \mathbf{x}_k) - \mathbf{x}_k) \leq f(\mathbf{x}_k + \mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_k) \leq C\|\mathbf{s}_k + \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k\|,$$

ou seja,

$$\|\mathbf{s}_k\|^2 \leq C\|\mathbf{s}_k\|,$$

e fica estabelecido que

$$\|\mathbf{s}_k\| \leq C. \quad (3.15)$$

(5) Usando (3.14) e (3.15), vem que

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \leq \|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{C^2}\right), \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

Logo, vale para todo  $k$  que

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}_k, \hat{X}) &= \|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}\| \leq \|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}\| \left(1 - \frac{\alpha^2}{C^2}\right)^{\frac{k}{2}} \\ &= d(\mathbf{x}_0, \hat{X}) \left(1 - \frac{\alpha^2}{C^2}\right)^{\frac{k}{2}} = q^k d(\mathbf{x}_0, \hat{X}), \end{aligned}$$

onde  $q = \sqrt{1 - \alpha^2/C^2}$ .

(6) Queremos minimizar a função

$$f(x, y) = |x - 6| + |x + y| + |x + 2y|.$$

Na figura abaixo, é possível estimar que  $z = (x, y) = (6, -3)$  é ponto de mínimo, e que  $f(6, -3) = 3$ . O leitor atento vai verificar essa afirmação pessoalmente. Ainda assim, o método do subgradiente é pouco eficiente neste caso, já que as curvas de níveis são por demais

alongadas, o que gera um comportamento em zigue-zague no processo iterativo (veja figura 4 abaixo). Note que isto é consequência não só da estrutura da função como do ponto inicial – de fato, este comportamento é significativamente alterado se escolhermos outro ponto inicial (por exemplo,  $(8, -5)$ ).

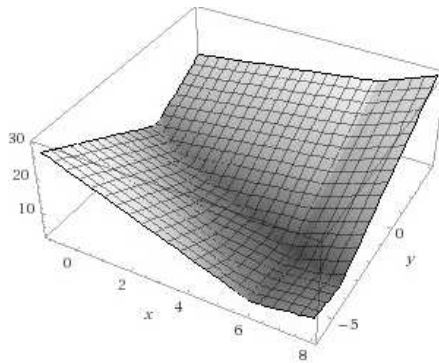


Figura 3

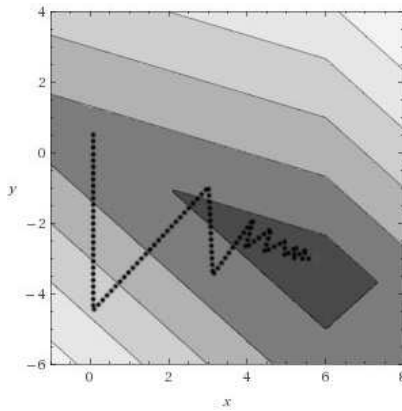


Figura 4

(7) Queremos minimizar a função

$$g(x, y) = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2} + \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}.$$

Começemos pela origem:  $x_0 = (0, 0)$ . Como a menor distância entre os pontos é dada por  $3/2$ , temos

$$\gamma_0 = \frac{g(0, 0) - \frac{3}{2}}{\|s_0\|^2}.$$

Para encontrar  $s_0$  olhamos para o gradiente de  $g$ . Fazendo  $a = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2}$ ,  $b = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2}$  e  $c = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$ , obtemos

$$\nabla g(x, y) = \left( \frac{x + \frac{1}{2}}{a} + \frac{x - \frac{1}{2}}{b} + \frac{x - 1}{c}, \frac{y}{a} + \frac{y}{b} + \frac{y}{c} \right),$$

donde  $s_0 = (-1, 0)$  e  $\|s_0\|^2 = 1$ .

Com isso,  $\gamma_0 = \frac{1}{2}$  e

$$x_1 = x_0 - \gamma_0 s_0 = (0, 1) - \frac{1}{2}(-1, 0) = \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Daí  $\gamma_1 = \nabla g\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 0$  e encontramos ponto crítico. Logo,  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  é o ponto que minimiza a soma das distâncias aos três pontos dados.

### 3.17 O método do elipsóide.

Em otimização matemática, o *método elipsóide* é um método iterativo para minimizar funções convexas. Em problemas de programação linear, com dados racionais, o método também é conhecido como *algoritmo do elipsóide*, que encontra uma solução ótima num número finito de passos.

O método do elipsóide gera uma sequência de elipsóides cujo volume diminui a uma taxa uniforme em todas as etapas, e convergindo para o minimizador da função objetivo.

(1) Prove que se  $G$  é um conjunto convexo e compacto, então existe um elipsóide contendo  $G$  e dentre esses elipsóides existem um elipsóide de volume minimal.

(2) Prove que se  $G$  é um conjunto convexo e compacto, então existe um elipsóide contido  $G$  e dentre esses elipsóides existem um elipsóide de volume maximal.

**Solução.** (a) Seja  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  e  $c \in (-\frac{1}{2}, 0)$ . Considere a seguinte família de elipsóides, indexada por  $c$ :

$$(c+1)^{-2} \left( (x_1 - c)^2 + (2c+1) \sum_{i=2}^n x_i^2 \right) \leq 1.$$

Queremos mostrar que o disco unitário está contido na família acima. Para tanto, tome  $x \in D = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1, x_1 > 0\}$ . Então:

$$\begin{aligned} & (c+1)^{-2} \left( (x_1 - c)^2 + (2c+1) \sum_{i=2}^n x_i^2 \right) = \\ &= (c+1)^{-2} \left( x_1^2 + 2cx_1 + c^2 + (2c+1) \sum_{i=2}^n x_i^2 \right) \\ &= (c+1)^{-2} \left( 2cx_1 + c^2 + 2c \sum_{i=2}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \\ &\leq (c+1)^{-2} (\|\mathbf{x}\|_1^2 + c^2 + 2c\|\mathbf{x}\|_1^2) \\ &= (c+1)^{-2} (\|\mathbf{x}\|_1^2(2c+1) + c^2) \\ &\leq (c+1)^{-2}(c+1)^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

(b) Para calcular o volume do elipsóide, note que  $A$  é uma matriz diagonal positiva dada por

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{(c+1)^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(c+1)^2(2c+1)^{-1}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(c+1)^2(2c+1)^{-1}} \end{bmatrix}$$

e obtemos o volume da elipse calculando

$$\begin{aligned} \int_{A^{-1}(B_1(0))} dx &= \int_{B_1(0)} |\det A^{-1}| dx \\ &= \det A^{-1} \int_{B_1(0)} dx = \text{Vol}(B_1(0)) \det A^{-1}. \end{aligned}$$

(c) Note que

$$\begin{aligned} \text{Vol}(c) &= \frac{(c+1)^{2n}}{(2c+1)^{n-1}} \cdot K \\ &\Rightarrow \text{Vol}'(c) = \\ &= \frac{2n(c+1)^{2n-1}(2c+1)^{n-1} - (n-1)(c+1)^{2n}(2c+1)^{n-2}}{(2c+1)^{2n-2}} \cdot K \end{aligned}$$

para alguma constante  $K$ .

O ponto crítico que buscamos deve satisfazer  $\text{Vol}'(c) = 0$ , isto é:

$$\begin{aligned} 2n(c+1)^{2n-1}(2c+1)^{n-1} &= (n-1)(c+1)^{2n}(2c+1)^{n-2} \\ \Leftrightarrow \frac{2n}{n-1}(2c+1) &= c+1 \\ \Leftrightarrow c \frac{4n}{n-1} &= 1 - \frac{2n}{n-1} \\ \Leftrightarrow c &= -\frac{1+n}{4n}. \end{aligned}$$

Para ver que  $c \in (-\frac{1}{2}, 0)$ , note que  $\frac{1}{4n} \in (0, \frac{1}{4})$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . Então  $\frac{1}{4n} + \frac{1}{4} \in (0, \frac{1}{2})$  e daí

$$-\frac{1+n}{4n} = -\left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{4}\right) \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right).$$

# Capítulo 4

## Cálculo Variacional

### 4.1 Um problema sobre bolhas de sabão

Que forma toma uma película de sabão (superfície minimal) que se apoia em dois arames circulares paralelos?

**Problema 4.1.1.** *Seja  $a > 0$  e  $\Omega = \{f \in C^2[0, 1], f > 0 : f(0) = f(1) = a\}$ .*

(1) *Para  $f \in \Omega$  seja  $E(f)$  a área da superfície de revolução gerada pela função  $f$ , i.e. girando o gráfico de  $f$  em torno do eixo  $x$ .*

(2) *Mostre que para toda função  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2[0, 1]$  e tal que  $\phi(0) = \phi(1) = 0$ , a função  $F : t \mapsto E(f + t\phi)$  é diferenciável numa vizinhança de  $t = 0$ . Encontre uma expressão para  $F'(0)$  que não envolva as derivadas de  $\phi$ .*

(3) *Suponha que  $E(f) = \min_{g \in \Omega} E(g)$ . Determine  $f$ .*

**Solução.** (1) Pela descrição do enunciado, temos que o funcional  $E$  toma a forma

$$E[f] = 2\pi \int_0^1 f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

de modo que

$$F(t) = 2\pi \int_0^1 (f(x) + t\phi(x)) \sqrt{1 + (f'(x) + t\phi'(x))^2} dx.$$

Para provar a diferenciabilidade de  $F$  numa vizinhança de  $t = 0$ , vamos invocar o Teorema de Derivação Dominada:

**Teorema 2** (Teorema de Derivação Dominada). *Seja  $J$  um intervalo em  $\mathbb{R}$  e seja  $g : \Omega \times J \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:*

(i) *para todo  $t \in J$ , fixada a função  $x \mapsto g(x, t)$ , definida em  $\Omega$ , é integrável;*

(ii) *em todo ponto de  $\Omega \times J$  existe a derivada parcial  $\frac{\partial g}{\partial t}(x, t)$ ;*

(iii) *existe uma função integrável  $h : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  tal que  $h(x) \geq \left| \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) \right|$ ,  $\forall x \in \Omega$ ,  $\forall t \in J$ . Então a função*

$$t \mapsto \int_{\Omega} g(x, t) dx$$

*é diferenciável em  $J$ .*

A única condição acima que não é imediata é a condição (iii). Mas considerando um intervalo da forma  $J = [-c, c]$ , onde  $c > 0$ , basta tomar o máximo de  $F$  no intervalo  $J$  (que existe, pois  $F$  é função contínua de  $t$ ). Fazendo  $h(x) = \max_{t \in [-c, c]} F(x)$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ , é fácil ver que a condição (iii) passa a ser satisfeita, e a função  $F$  é diferenciável em  $[-c, c]$ .

Vamos agora encontrar uma expressão para  $F'(0)$ . Temos:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\pi \int_0^1 (f(x) + h\varphi(x)) \sqrt{1 + (f'(x) + \varphi'(x))^2} dx - 2\pi \int_0^1 f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{h} &= \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \left( 2\pi \int_0^1 f(x) \left( \frac{\sqrt{1 + (f'(x) + \varphi'(x))^2} - \sqrt{1 + (f'(x))^2}}{h} \right) \right. & \\ \left. + 2\pi \int_0^1 \varphi(x) \sqrt{1 + (f'(x) + h\varphi'(x))^2} dx \right) &= \\ = 2\pi \int_0^1 f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{1 + (f'(x) + \varphi'(x))^2} - \sqrt{1 + (f'(x))^2}}{h} \right) dx & \\ + 2\pi \int_0^1 \varphi(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. & \end{aligned}$$



Mas:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{1 + (f'(x) + \varphi'(x))^2} - \sqrt{1 + (f'(x))^2}}{h} \right) &= \\ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \sqrt{1 + (f'(x) + t\varphi'(x))^2} &= \\ = \frac{1}{2} \frac{2(f'(x) + t\varphi'(x))}{\sqrt{1 + (f'(x) + t\varphi'(x))^2}} \varphi'(x) \Big|_{t=0} &= \frac{f'(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}. \end{aligned}$$

Logo,  $F'(0) =$

$$= 2\pi \int_0^1 f(x)f'(x) \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} dx + 2\pi \int_0^1 \varphi(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Como queremos uma expressão para  $F'(0)$  que não contenha derivadas de  $\varphi(\cdot)$ , faremos uma integração por partes,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \varphi'(x) dx &= \\ \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \varphi(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \left( \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right)' \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

donde, finalmente,

$$F'(0) = 2\pi \int_0^1 \varphi(x) \left( \sqrt{1 + (f'(x))^2} - \left( \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right)' \right) dx.$$

(2) O funcional que queremos minimizar é

$$E[f] = 2\pi \underbrace{\int_0^1 f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}_L.$$

Por Euler-Lagrange, temos como condição necessária para minimização que

$$\hat{L}_f(x) - \frac{d}{dt} \hat{L}_j(x) = 0,$$

onde  $\hat{L}_f(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$  e  $\hat{L}_{\dot{f}}(x) = \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}$ . Daí, temos que

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} - \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right) = 0,$$

isto é,

$$\frac{1 + (f')^2 - ff''}{(1 + (f')^2)^{3/2}} = 0.$$

Multiplicando por  $f'$ ,

$$f' \left( \frac{1 + (f')^2 - ff''}{(1 + (f')^2)^{3/2}} \right) = \frac{d}{dx} \frac{f}{\sqrt{1 + (f')^2}} = 0,$$

donde

$$\frac{f}{\sqrt{1 + (f')^2}} = c \Leftrightarrow f' = \frac{\sqrt{f^2 - c^2}}{c} \Leftrightarrow \int \frac{c}{\sqrt{f^2 - c^2}} df = \int dx.$$

Portanto,

$$c \ln \left( \frac{f + \sqrt{f^2 - c^2}}{c} \right) = x + d \Rightarrow f = c \cosh \left( \frac{x + d}{c} \right).$$

As condições de fronteira  $f(0) = f(1) = a$  permitem determinar as constantes  $c$  e  $d$ .

## Capítulo 5

# Condições de transversalidade para problemas variacionais.

### 5.1 Um problema com tempo livre.

**Problema 5.1.1.**

$$\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x^2) dt + \alpha(x(T_0))^2 \rightarrow \text{extr.}$$

**Solução.** Por Euler-Lagrange, escrevendo  $L(t, x, \dot{x}) = (\dot{x}^2 + x^2)$ , temos

$$L_x - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}} = 0 \Leftrightarrow x = \ddot{x},$$

logo o ótimo deve ser da forma  $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$ . Condições de transversalidade:

$$\hat{L}_{\dot{x}}(0) = 2\dot{x}(0) = 0 \tag{5.1}$$

$$\hat{L}_{\dot{x}}(T_0) = 2\dot{x}(T_0) = -2\alpha x(T_0) \tag{5.2}$$

Da primeira linha tiramos que  $C_1 = C_2 = C$ , e da segunda obtemos

$$C(e^{T_0} - e^{-T_0}) = -\alpha C(e^{T_0} + e^{-T_0}),$$

ou seja,  $x : [0, T_0] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \equiv 0$  é candidato para cada  $T_0$ . Além disso, se  $C \neq 0$  temos

$$-\alpha = \frac{e^{T_0} - e^{-T_0}}{e^{T_0} + e^{-T_0}}$$

Assumindo  $T_0 > 0$ , a equação acima tem solução para  $-1 < \alpha < 0$  (de fato, se  $\alpha \geq 0$  claramente as funções  $x \equiv 0$  são os mínimos do funcional). Neste caso, avaliando o funcional temos

$$\begin{aligned} & C^2 \int_0^{T_0} [(e^t - e^{-t})^2 + (e^t + e^{-t})^2] dt + \alpha C^2 (e^{T_0} + e^{-T_0})^2 \\ & C^2 \int_0^{T_0} 2(e^{2t} + e^{-2t}) dt - \frac{e^{T_0} - e^{-T_0}}{e^{T_0} + e^{-T_0}} C^2 (e^{T_0} + e^{-T_0})^2 \\ & C^2 (e^{2T_0} - e^{-2T_0}) - C^2 (e^{2T_0} - e^{-2T_0}) = 0 \end{aligned}$$

Assim, se  $-1 < \alpha < 0$  candidatos são  $C(e^t - e^{-t})$ ,  $C \neq 0$ ,  $T_0$  tal que

$$-\alpha = \frac{e^{T_0} - e^{-T_0}}{e^{T_0} + e^{-T_0}},$$

ou  $x \equiv 0$ . Vamos agora analisar os resultados. Primeiramente vamos avaliar os funcionais em algumas funções. Por exemplo, se  $x \equiv M$  (constante) temos,

$$\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x^2) dt + \alpha (x(T_0))^2 = M^2 T_0 + \alpha M^2 = M^2 (\alpha + T_0)$$

Também vale a pena calcular o valor em  $x(t) = M \cos(t)$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x^2) dt + \alpha (x(T_0))^2 = \\ & = M^2 \int_0^{T_0} (\sin(t)^2 + \cos(t)^2) dt + \alpha M^2 (\cos(T_0))^2 \\ & = M^2 (T_0 + \alpha \cos(T_0)) \end{aligned}$$

Assim, se  $\alpha \geq 0$  claramente o valor do funcional é  $\geq \int_0^{T_0} x^2 dt$ , portanto igual a zero se e somente se  $x \equiv 0$ . Logo, funções identicamente zero são os únicos pontos de mínimos do funcional acima. Por outro lado, pelas avaliações acima, fica claro que o funcional pode ser

tão grande quanto se queira. Se  $\alpha < 0$ , as avaliações citadas acima mostram que o funcional pode ser tão negativo ou positivo quanto se queira (por exemplo, quando  $x(t) = M \cos(t)$ ,  $\cos(T_0) = 0$ ,  $M \rightarrow \infty$  o funcional tende a  $+\infty$ ; no caso  $x \equiv M \rightarrow \infty$ ,  $T_0 > -\alpha$  o funcional tende a  $-\infty$ ). Assim, nesse caso o problema não está bem-posto.

## 5.2 Um problema com extremidades móveis.

**Problema 5.2.1.**

$$\int_0^T \sqrt{x+h} \sqrt{1+\dot{x}} \rightarrow \inf$$

$$x(0) = 0, x(T) = \xi$$

**Solução.** Tratamos como um problema com extremidades móveis. Calculamos primeiramente

$$L_x = \frac{\sqrt{1+\dot{x}}}{2\sqrt{x+h}}$$

e

$$L_{\dot{x}} = \frac{\sqrt{x+h}}{2\sqrt{1+\dot{x}}}$$

Note que  $L_x L_{\dot{x}} = \frac{1}{4}$ , logo por Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \hat{L}_{\dot{x}} \cdot \hat{L}_{\dot{x}} = \frac{1}{4}$$

Fazendo  $f(t) = \hat{L}_{\dot{x}}$ ,

$$f f' = \frac{1}{4}$$

$$\int f f' dt = \frac{t}{4} + C$$

$$f^2 = \frac{t}{2} + C_1$$

$$f(t) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2t + C_2}$$

Rebatizando  $C_2 = C$ , temos

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+h}}{2\sqrt{1+\dot{x}}} &= \pm \frac{1}{2}\sqrt{2t+C} \\ \frac{x+h}{1+\dot{x}} &= 2t+C \\ \dot{x}(2t+C) &= x+h-2t-C\end{aligned}$$

Resolvendo a equação homogênea associada,  $\dot{x}(2t+C) = x$ , temos que

$$\begin{aligned}\frac{\dot{x}}{x} &= \frac{1}{2t+C} \\ \ln(x) &= \frac{1}{2}\ln(2t+C) + D \\ x &= \tilde{D}\sqrt{2t+C}\end{aligned}$$

Conjecturamos que existe uma solução particular da forma  $x(t) = At + B$ . De fato,

$$\begin{aligned}A(2t+C) &= At + B + h - 2t - C \\ 2At + AC &= At - 2t + B + h - C \\ 2A &= A - 2 \text{ e } AC = B + h - C \\ A &= -2, B = -h - C\end{aligned}$$

Assim, a solução geral da equação é  $x(t) = -2t - h - C + D\sqrt{2t+C}$ .  $x(0) = 0$  implica que  $h - C + D\sqrt{C} = 0$ , e  $x(T) = \xi$  implica que  $-2T - h - C + D\sqrt{2T+C} = \xi$ .

### 5.3 Um problema isoperimétrico: o problema da rainha Dido

Apócrifa ou não, a lenda de Dido é a seguinte. A guerreira Dido chegou na costa da Tunísia em 814 A.C. e lá ela pediu um pedaço de terra ao monarca local. Seu pedido foi satisfeito, porém o pedaço de terra concedido deveria ser limitado pelo couro de um único boi. Com uma notável intuição matemática, ela cortou couro do boi em

uma longa tira fina (ou várias tiras finas que foram costuradas) e usou esse laço de couro de boi para cercar o terreno. Esta terra tornou-se Cartago, e Dido e tornou-se sua rainha. Dido percebeu que a curva que captaria a maior quantidade de terra seria um arco de círculo. Por quê?

**Problema 5.3.1.**

$$\int_{-T_0}^{T_0} x dt \rightarrow \text{extr},$$

$$\int_{-T_0}^{T_0} \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt = l, x(-T_0) = x(T_0) = 0.$$

**Solução.** Trata-se de um problema isoperimétrico. Formamos então a Lagrangiana:

$$L(t, x, \dot{x}, \lambda) = \lambda_0 x + \lambda_1 \sqrt{1 + \dot{x}^2}$$

Observamos que  $L_x = \lambda_0$ , e  $L_{\dot{x}} = \lambda_1 \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}$  Euler-Lagrange implica que

$$\frac{d}{dt} \hat{L}_{\dot{x}} = \hat{L}_x = \lambda_0,$$

ou

$$L_{\dot{x}} = \lambda_0 t + C_1$$

$$\lambda_1 \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = \lambda_0 t + C_1$$

$$\lambda_1^2 \dot{x}^2 = (1 + \dot{x}^2)(\lambda_0 t + C_1)^2$$

$$\dot{x}^2(\lambda_1^2 - (\lambda_0 t + C_1)^2) = (\lambda_0 t + C_1)^2$$

$$\dot{x} = \pm \frac{\lambda_0 t + C_1}{\sqrt{\lambda_1^2 - (\lambda_0 t + C_1)^2}},$$

Note que se  $\lambda_0 = 0$ , isto significaria que  $\dot{x} = C$ , logo  $x$  seria linear. Como  $x(-T_0) = x(T_0) = 0$ , segue que  $x \equiv 0$ , que claramente não é máximo nem mínimo do problema. Assim, considerando  $\lambda_0 \neq 0$ ,

$$x(t) = \pm \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{\lambda_1^2 - (\lambda_0 t + C_1)^2} + C_2$$

Substituindo,  $x(\pm T_0) = 0$ ,

$$\frac{1}{\lambda_0} \sqrt{\lambda_1^2 - (\lambda_0 T_0 - C_1)^2} \pm C_2 = 0 = \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{\lambda_1^2 - (\lambda_0 T_0 + C_1)^2} \pm C_2$$

Em particular,

$$(\lambda_0 T_0 - C_1)^2 = (\lambda_0 T_0 + C_1)^2 \Rightarrow 4\lambda_0 T_0 C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

e

$$\begin{aligned}\lambda_1^2 - \lambda_0^2 T_0^2 &= C_2^2 \lambda_0^2 \\ C_2^2 &= \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0^2} - T_0^2,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}x(t) &= \pm \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{\lambda_1^2 - \lambda_0^2 t^2} \pm \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{\lambda_0^2} - T_0^2} \\ x(t) &= \pm \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{\lambda_0^2} - t^2} \pm \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{\lambda_0^2} - T_0^2}\end{aligned}$$

Mais uma vez usando o fato de que  $x(T_0) = 0$ , aprendemos que os sinais dos termos acima devem ser opostos, isto é,

$$x(t) = \pm \left( \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{\lambda_0^2} - t^2} - \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{\lambda_0^2} - T_0^2} \right)$$

que é essencialmente uma família de semi-círculos de raio  $r = \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right|$  centrados em  $\left( 0, \pm \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{\lambda_0^2} - T_0^2} \right)$ . Geometricamente (como mostra a figura em anexo), é claro que o comprimento do arco ligando  $(-T_0, 0)$  a  $(T_0, 0)$  com o centro citado acima é  $2r \arcsin\left(\frac{T_0}{r}\right)$ , de modo que

$$T_0 = r \sin\left(\frac{l}{2r}\right).$$

Assim, mantendo a notação  $r = \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right|$ , temos que  $\int_{-T_0}^{T_0} x dt =$

$$= \pm \int_{-T_0}^{T_0} \left( \sqrt{r^2 - t^2} - \sqrt{r^2 - T_0^2} \right) dt.$$



A integral acima pode ser resolvida fazendo a substituição  $t = r \sin u$ . No entanto, acho interessante mais uma vez pensar geometricamente (ver figura em anexo) e notar que isto é (no caso positivo) a área acima do eixo- $x$ . Em outras palavras, estamos lidando com a área de uma seção circular menos a área de um triângulo isósceles. A área da seção circular cujo arco tem comprimento  $l$  é  $\frac{lr}{2}$ , e a área do triângulo isósceles é  $\frac{1}{2}(2T_0)\sqrt{r^2 - T_0^2}$ , de modo que o valor da integral acima deve ser

$$\begin{aligned} \int_{-T_0}^{T_0} x dt &= \pm \left( \frac{lr}{2} - T_0 \sqrt{r^2 - T_0^2} \right) \\ &= \pm \left[ \frac{lr}{2} - r \sin \left( \frac{l}{2r} \right) \sqrt{r^2 \left( 1 - \sin^2 \left( \frac{l}{2r} \right) \right)} \right] \\ &= \pm \left[ \frac{lr}{2} - r^2 \sin \left( \frac{l}{2r} \right) \cos \left( \frac{l}{2r} \right) \right] \\ &= \pm \frac{1}{2} \left[ lr - r^2 \sin \left( \frac{l}{r} \right) \right] = f_{\pm}(r) \end{aligned}$$

Note que se  $\alpha = l/r$ , podemos escrever

$$f_+(r) = g(\alpha) = \frac{l^2}{2\alpha} \left( 1 - \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \right),$$

em que  $0 < \alpha \leq \pi$ . A função  $g$  atinge seu máximo em  $\alpha = \pi$ , portanto  $f_+(r)$  atinge seu máximo quando  $r = l/\pi = T_0$ , ou seja, um semi-círculo centrado na origem (o mesmo se pode dizer sobre o mínimo de  $f_-(r)$ ). O fato de que esses candidatos encontrados são de fato o máximo e o mínimo é consequência da desigualdade isoperimétrica.

## 5.4 Um problema com vínculos dinâmico

### Problema 5.4.1.

$$\int_0^1 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \rightarrow \text{extr}$$

$$\dot{x}y - \dot{y}x = 1, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = \sin(1), \quad y(0) = 1, \quad y(1) = \cos(1).$$

Vamos passar a coordenadas polares  $r, \theta$ . Fazendo  $x = r \sin(\theta)$  e  $y = r \cos(\theta)$  temos que  $\dot{x} = \dot{r} \sin(\theta) + r\dot{\theta} \cos(\theta)$  e  $\dot{y} = \dot{r} \cos(\theta) - r\dot{\theta} \sin(\theta)$ . Assim, a equação diferencial se torna

$$\begin{aligned} (\dot{r} \sin(\theta) + r\dot{\theta} \cos(\theta))r \cos(\theta) - (\dot{r} \cos(\theta) - r\dot{\theta} \sin(\theta))r \sin(\theta) &= 1 \\ \dot{r}r \sin(\theta) \cos(\theta) + r^2\dot{\theta} \cos^2(\theta) - \dot{r}r \sin(\theta) \cos(\theta) + r^2\dot{\theta} \sin^2(\theta) &= 1 \\ r^2\dot{\theta} &= 1, \end{aligned}$$

e o integrando do funcional se torna (na primeira igualdade abaixo, os termos do meio cortam)

$$\begin{aligned} (\dot{r} \sin(\theta) + r\dot{\theta} \cos(\theta))^2 + (\dot{r} \cos(\theta) - r\dot{\theta} \sin(\theta))^2 &= \\ = \dot{r}^2 \sin^2(\theta) + r^2\dot{\theta}^2 \cos^2(\theta) + \dot{r}^2 \cos^2(\theta) + r^2\dot{\theta}^2 \sin^2(\theta) &= \\ = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 &= \\ = \dot{r}^2 + (r^2\dot{\theta})\dot{\theta} = \dot{r}^2 + \dot{\theta} & \end{aligned}$$

Euler-Lagrange em  $\theta$  não dá nenhuma informação nova ( $0 = 0$ ), mas Euler-Lagrange em  $r$  diz que,  $\frac{d}{dt}L_{\dot{r}} = L_r$ , ou seja,

$$2\ddot{r} = 0 \Rightarrow \dot{r}(t) = At + B$$

Do fato de que  $\dot{r}(0) = \dot{r}(1) = 1$ , temos que  $\dot{r} \equiv 1$ . Como  $\dot{r}^2\dot{\theta} = 1$ ,  $\dot{\theta}(t) = t + C$ . Do fato de que  $\hat{\theta}(0) = 0$ , temos que  $\hat{\theta}(t) = t$ , e este é o único candidato a extremo. Vamos mostrar que é mínimo.

Seja  $r(t) = 1 + \eta(t)$ ,  $\theta(t) = t + \gamma(t)$ . Como as condições iniciais devem ser respeitadas,  $\eta(0) = \eta(1) = \gamma(0) = \gamma(1) = 0$ . Assim,

avaliando o funcional em  $(r, \theta)$  temos

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 dt = \\
 & = \int_0^1 \dot{\eta}^2 + 1 + \dot{\gamma} dt \\
 & = 1 + \int_0^1 \dot{\gamma} dt + \int_0^1 \dot{\eta}^2 dt \\
 & = 1 + \gamma(1) - \gamma(0) + \int_0^1 \dot{\eta}^2 dt \\
 & = 1 + \int_0^1 \dot{\eta}^2 dt \geq 1,
 \end{aligned}$$

que é o valor do funcional em  $\hat{r}, \hat{\theta}$ .

Assim, o valor mínimo do funcional é 1, sendo realizado por  $x = \sin(t), y = \cos(t)$ . Não há candidatos a máximo.

## 5.5 Um problema de controle ótimo (forma Lagrangiana): o problema de I. Newton para o projétil com resistência mínima.

Newton estudou o problema de um corpo movendo-se através de um fluido invíscido e incompressível. Seu objetivo era determinar um design que oferecesse a menor resistência possível enquanto o corpo move-se pelo fluido. O modelo de resistência de Newton supoe que em qualquer ponto do corpo, a resistência imposta pelo meio é proporcional ao quadrado do módulo da componente normal da velocidade. Qual a forma desse sólido?

Apesar de bastante simplificado, o modelo funciona bem se o fluido for um gás rarefeito e o sólido move-se em baixas velocidades, ou para aviões/projéteis movendo-se com número de Mach alto. Ver o livro do V. Tikhomirov, *Stories about Maxima and Minima*, também mencionado na bibliografia.

**Problema 5.5.1.**

$$\int_0^{T_0} \frac{t}{1 + \dot{x}^2} dt \rightarrow \inf$$

$$\dot{x} \geq 0, x(0) = 0, x(T_0) = \xi$$

Transformamos o problema acima num problema de controle escrevendo  $u = \dot{x}$ , e o lagrangiano

$$\mathcal{L} = \int_0^T L(t, x, u) dt + \mu_0 x(0) + \mu_1 (x(T) - \xi),$$

em que  $L(t, x, u) = \frac{\lambda_0 t}{1+u^2} + p(\dot{x} - u)$ . Vamos agora fazer Euler-Lagrange:  $L_x = 0, L_{\dot{x}} = p$ , logo  $\frac{d}{dt}p = 0 \Rightarrow p(t) \equiv P_0$ , constante.

Condições de transversalidade: montamos primeiro a função terminal  $l = \mu_0 x(0) + \mu_1 (x(T) - \xi)$ . Assim,

$$\hat{L}_{\dot{x}}(0) = l_{x(0)} \Leftrightarrow P_0 = \mu_0$$

$$\hat{L}_{\dot{x}}(T) = -l_{x(T)} \Leftrightarrow P_0 = -\mu_1$$

Condição de minimalidade:

$$\frac{\hat{\lambda}_0 t}{1 + u^2} - P_0 u \geq \frac{\hat{\lambda}_0 t}{1 + \hat{u}(t)^2} - P_0 \hat{u}(t)$$

Se  $P_0 > 0$ , escrevendo a equação como

$$P_0(\hat{u}(t) - u) \geq \hat{\lambda}_0 t \left( \frac{1}{1 + \hat{u}(t)^2} - \frac{1}{1 + u^2} \right),$$

fica claro que o lado esquerdo tende a  $-\infty$  se  $u \rightarrow \infty$ , mas o lado direito é  $\geq \hat{\lambda}_0 t \left( \frac{1}{1 + \hat{u}(t)^2} - 1 \right)$ . Se  $P_0 = 0$ , o lado esquerdo da mesma desigualdade é zero independente do valor de  $u$ , mas o lado direito vale  $\hat{\lambda}_0 t \left( \frac{1}{1 + \hat{u}(t)^2} - 1 \right)$  quando  $u = 0$  e tende a  $\hat{\lambda}_0 t \left( \frac{1}{1 + \hat{u}(t)^2} \right)$  quando  $u \rightarrow \infty$ , e as duas expressões têm sinais opostos se  $\hat{u}(t) > 0$ . Assim, se  $P_0 = 0$ , forçosamente temos  $\hat{u} \equiv 0$ , que não é mínimo do funcional (de fato, é máximo).

O caso que nos interessa é  $P_0 < 0$ . Agora  $\hat{\lambda}_0 = 0$  implicaria que  $\hat{u} \equiv 0$ , portanto podemos escalonar  $\lambda_0 = 1$  (de fato,  $\lambda_0 \geq 0$  pelo princípio do mínimo). Vamos agora precisar de um Lema:

**Lema 5.5.2.** Para todo  $t \in [0, T], t \neq -2P_0$ ,

$$\hat{u}(t) = 0 \Leftrightarrow 0 \leq t < -2P_0$$

*Observação 5.5.3.* Isto implica que  $\hat{u}|_{[0, -2P_0)} \equiv 0$ , e que  $\hat{u}$  não se anula em  $(-2P_0, T]$ .

Note que o valor em  $-2P_0$  não está determinado. Como  $\hat{u}$  é contínua por partes, ela é contínua ou à direita ou à esquerda em  $-2P_0$ , mas não os dois. Este último comentário pode ser obtido examinando a demonstração abaixo: um escólio é que se  $\hat{u}(t) > 0$ , então  $\hat{u}(t) \geq \frac{-P_0}{t}$  (ou seja,  $\lim_{t \rightarrow -2P_0^+} \hat{u}(t) \geq 1/2 > 0$ ). Isto é claro, não faz diferença, pois o valor da função neste único ponto não altera o valor do funcional.

*Demonstração.* Considere a desigualdade original,

$$\frac{t}{1+u^2} - P_0 u \geq \frac{t}{1+\hat{u}(t)^2} - P_0 \hat{u}(t)$$

Primeiramente, considere a desigualdade fazendo  $u = 0$ :

$$\begin{aligned} t &\geq \frac{t}{1+\hat{u}(t)^2} - P_0 \hat{u}(t) \\ t \left( 1 - \frac{1}{1+\hat{u}(t)^2} \right) &\geq -P_0 \hat{u}(t) \\ t \left( \frac{\hat{u}(t)^2}{1+\hat{u}(t)^2} \right) &\geq -P_0 \hat{u}(t) \end{aligned}$$

Note que desigualdade acima, em particular, implica que  $\hat{u}(0) = 0$  (senão  $-P_0 \leq 0$ , absurdo). Seja então  $t > 0$ , e suponha que  $\hat{u}(t) > 0$ . Nesse caso,

$$t \left( \frac{\hat{u}(t)}{1+\hat{u}(t)^2} \right) \geq -P_0$$

Como  $0 < \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$  para todo  $x > 0$  (o máximo da função é atingido em  $x = 1$ ), segue que

$$\frac{t}{2} \geq -P_0 \Leftrightarrow t \geq -2P_0$$

Em outras palavras, mostramos aqui que  $\hat{u}(t) > 0 \Rightarrow t \geq -2P_0$ .

Vamos agora olhar para a desigualdade original fazendo  $u = 1$ :

$$\frac{t}{2} - P_0 \geq \frac{t}{1 + \hat{u}(t)^2} - P_0 \hat{u}(t)$$

Seja  $t \in [0, T]$ , e suponha que  $\hat{u}(t) = 0$ . Então

$$\frac{t}{2} - P_0 \geq t \Rightarrow t \leq -2P_0.$$

Resumindo, provamos que  $\hat{u}(t) > 0 \Rightarrow t \geq -2P_0$  e  $\hat{u}(t) = 0 \Rightarrow t \leq -2P_0$ . Isto prova o Lema.  $\square$

A condição de estacionaridade com respeito a  $u$  implica que para  $t \geq -2P_0$ ,  $\hat{L}_u = 0$ , ou seja (já substituindo  $\hat{\lambda}_0 = 1$ ),

$$\frac{-2t\hat{u}}{(1 + \hat{u}^2)^2} - P_0 = 0 \Leftrightarrow -P_0 = \frac{2t\hat{u}}{(1 + \hat{u}^2)^2}$$

Para  $t \geq -2P_0$ ,

$$\begin{aligned} 2t\hat{u} &= -P_0(1 + 2\hat{u}^2 + \hat{u}^4) \\ t &= \frac{-P_0}{2} \left( -\frac{1}{\hat{u}} + 2\hat{u} + \hat{u}^3 \right) \\ \frac{dx}{du} &= \frac{dx}{dt} \frac{dt}{du} = \dot{x} \frac{-P_0}{2} \left( \frac{1}{\hat{u}^2} + 2 + 3\hat{u}^2 \right) \end{aligned}$$

Mas  $\dot{x} = u$ , logo

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= \frac{-P_0}{2} \left( \frac{1}{\hat{u}} + 2\hat{u} + 3\hat{u}^3 \right) \\ \hat{x}(t) &= \frac{-P_0}{2} \left( \ln(\hat{u}) + \hat{u}^2 + \frac{3}{4}\hat{u}^2 \right) + C, t \geq -2P_0 \end{aligned}$$

Vale a pena também observar que, como

$$\frac{dt}{du} = \frac{-P_0}{2} \left( \frac{1}{\hat{u}^2} + 2 + 3\hat{u}^2 \right) > 0,$$

temos que  $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \frac{1}{dt/du} > 0$ , ou seja,  $\hat{x}$  é uma função convexa.

Vamos agora argumentar a minimalidade. Seja  $x(\bullet)$  qualquer função admissível. A condição de minimalidade de  $\hat{x}$  implica que

$$\frac{t}{1 + \dot{x}(t)^2} - P_0 \dot{x}(t) \geq \frac{t}{1 + \dot{\hat{x}}(t)^2} - P_0 \dot{\hat{x}}(t).$$

Integrando,

$$\int_0^T \frac{t}{1 + \dot{x}(t)^2} dt - P_0 \xi \geq \int_0^T \frac{t}{1 + \dot{\hat{x}}(t)^2} dt - P_0 \xi,$$

o que completa a prova. Restaria agora determinar o valor de  $-P_0$ ,

# Capítulo 6

## Apêndice: condições de transversalidade

### 6.1 Funcionais mais comuns em cálculo de variações

Assuma que o intervalo de integração  $\Delta = [t_0, t_1]$  é fixo.

#### 6.1.1 Funcionais integrais

$$J[x(\bullet)] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$$

#### 6.1.2 Funcionais terminais

$$T[x(\bullet)] = l(x(t_0), x(t_1))$$

#### Funcionais mistos

$$B[x(\bullet)] = J[x(\bullet)] + T[x(\bullet)]$$



Os últimos funcionais são chamados de funcionais de *Bolza* (ou Boltz).

## 6.2 Restrições

### 6.2.1 Restrições diferenciais ou dinâmicas

$$M(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0;$$

Por exemplo,  $\dot{x}(t) = \phi(x(t), t)$ , i.e. a restrição diferencial é uma equação diferencial ordinária.

### 6.2.2 Restrições terminais

### 6.2.3 Restrições na forma de desigualdades

$$\psi(x(t_0), x(t_1)) \leq 0$$

**Restrições na forma de igualdades**

$$\psi(x(t_0), x(t_1)) = 0$$

As funções  $\psi(\bullet)$  podem ser campos vetoriais.

## 6.3 Exemplos de problemas típicos do cálculo das variações

Vou assumir por enquanto que o intervalo de tempo é fixo, e que as condições de fronteira são fixas também.

### 6.3.1 O problema clássico mais simples: intervalo de tempo fixo, e condições de fronteira fixas

$$J[x(\bullet)] = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \min,$$

$$x(t_0) = x_0,$$

$$x(t_1) = x_1$$

### 6.3.2 O problema de Bolza

$$B[x(\bullet)] = J[x(\bullet)] + T[x(\bullet)]$$

No problema de Bolza as condições de fronteira para as variáveis de estado não são fixas.

### 6.3.3 O problema de Lagrange (otimização dinâmica)

$$J[x(\bullet)] \rightarrow \inf,$$

$$M(t, x, \dot{x}) = 0,$$

$$\psi(x(t_0), x(t_1)) = 0$$

### 6.3.4 O problema de Meyer (otimização dinâmica)

$$B[x(\bullet)] \rightarrow \inf,$$

$$M(t, x, \dot{x}),$$

$$\psi(x(t_0), x(t_1)) = 0$$

## 6.4 Métodos de resolução

Daqui em diante nós podemos assumir que um intervalo de tempo  $\Delta = [\alpha, \beta]$  suficientemente longo foi fixado *a priori* e que a solução o intervalo de tempo ótimo  $[\hat{t}_0, \hat{t}_1]$ , quando esta existir, está contido em  $\Delta$ .

### 6.4.1 Problemas do tipo Bolza

1. Escrever a função de Bolza do problema (veja  $B[x(\bullet)]$  acima).
2. Escrever as condições necessárias:
  - (a) Equação de Euler:

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0$$

- (b) Condições de transversalidade:

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(t_k) = (-1)^k l_{x_0}(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)), k = 0, 1$$

3. Obter os extremais admissíveis.
4. Mostrar que pelo menos um dos extremais admissíveis fornecem uma solução do problema, ou argumente porque o problema não admite solução.

### 6.4.2 Problema com extremidades móveis

$$J[x(\bullet), t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \psi_0(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \rightarrow \text{extr};$$

$$\psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0, i = 1, \dots, m.$$

1. Formar a função de Lagrange:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x(\bullet), t_0, t_1, \lambda] &= \lambda_0 \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \\ &+ \sum_{i=0}^m \lambda_i \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)), \end{aligned}$$

$\lambda \in \mathbb{R}^{m+1}$  são multiplicadores de Lagrange.

2. Escrever as condições necessárias:

(a) Equações de Euler-Lagrange:

$$\lambda_0 \left( -\frac{d}{dt} \widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) \right) = 0$$

(b) Condições de transversalidade com respeito á  $x$ :

$$\lambda_0 \widehat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_k) = (-1)^k \hat{l}_{x_1},$$

$$l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = \sum_{i=0}^m \lambda_i \psi_i(t_0, x_0, t_1, x_1)$$

3. Condições de estacionaridade com respeito á  $t_k, k = 0, 1$ :

$$\lambda_0 \widehat{L}(t_k) = (-1)^k \sum_{i=0}^m \lambda_i (\widehat{\psi}_{i,t_0} + \widehat{\psi}_{i,x_0} \widehat{\dot{x}}(\hat{t}_0)), k = 0, 1$$

4. Obter os extremais admissíveis.

5. Mostrar que pelo menos um dos extremais admissíveis fornecem uma solução do problema, ou argumente porque o problema não admite solução.

### 6.4.3 Problemas isoperimétricos

$$J_0[x(\bullet)] = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \text{extr};$$

$$J_i[x(\bullet)] = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), \dot{x}(t)) dt = \alpha_i, i = 1, \dots, m;$$

$$x(t_0) = x_0,$$

$$x(t_1) = x_1$$

1. Formar a Lagrangiana,

$$L = L(t, x, \dot{x}, \lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(t, x, \dot{x}),$$

$$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$$

2. Escrever as condições necessárias:  
Equações de Euler-Lagrange:

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0$$

3. Obter os extremais admissíveis.
4. Mostrar que pelo menos um dos extremais admissíveis fornecem uma solução do problema, ou argumente porque o problema não admite solução.

#### 6.4.4 O Problema de Lagrange

$$B_0[x(\bullet), u(\bullet), t_0, t_1] \rightarrow \inf;$$

$$\Phi[x(\bullet), u(\bullet), t_0, t_1] = \dot{x}(t) - \phi(t, x(t), u(t)) = 0,$$

$$B_i[x(\bullet), u(\bullet), t_0, t_1] \leq 0, i = 1, \dots, m'$$

$$B_i[x(\bullet), u(\bullet), t_0, t_1] = 0, i = m' + 1, \dots, m,$$

onde

$$B_i[x(\bullet), u(\bullet), t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x, u) dt + \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)), i = 0, 1, \dots, m.$$

1. Formar a função de Lagrange:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x(\bullet), u(\bullet), t_0, t_1; p(\bullet), \lambda] &= \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(t, x, u) + p(t)(\dot{x} - \phi(t, x, u)) \right) dt \\ &\quad + \sum_{i=0}^m \lambda_i \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)), \end{aligned}$$

$$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m), p(\bullet) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^*).$$

2. Escrever as condições necessárias:

(a) Equação de Euler:

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0,$$

$$L[x(\bullet), u(\bullet), t_0, t_1; p(\bullet), \lambda] =$$

$$= \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(t, x, u) + p(t)(\dot{x} - \phi(t, x, u)).$$

(b) Condições de transversalidade com respeito à  $x$ :

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_k) = (-1)^k \hat{l}_{x_1}, k = 0, 1$$

com função terminal  $l = \sum_{i=0}^m \lambda_i \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$ ;

(c) Condições de estacionaridade com respeito à  $u$ :

$$\widehat{L}_u(t) = 0$$

(d) Condição de estacionaridade com respeito a  $t_k, k = 0, 1$ :

$$(-1)^k \sum_{i=0}^m \lambda_i \hat{f}_i(\hat{t}_k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (\hat{\psi}_{i, t_k} + \hat{\psi}_{i, x(t_k)} \widehat{x}(\hat{t}_k)), k = 0, 1$$

(e) Condição de folga complementares:

$$\lambda_i B_i(\hat{\xi}) = 0, i = 1, 2, \dots, m';$$

$$\hat{\xi} = (\hat{x}(\bullet), \hat{u}(\bullet), \hat{t}_0, \hat{t}_1).$$

(f) Condições de não negatividade:

$$\lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m'.$$

3. Obter os extremais admissíveis.

4. Mostrar que pelo menos um dos extremais admissíveis fornecem uma solução do problema, ou argumente porque o problema não admite solução.

## Bibliografia

- [1] V. Tikhomirov, *Stories about Maxima and Minima*; Mathematical World, volume 1, American Mathematical Society; Providence RI, 1990.
- [2] J. Brinkhuis, V. Tikhomirov, *Optimization: Insights and Applications*; Princeton NJ, 2005.
- [3] I. Yaglom, G. Boltyanskii, *Convex Figures*, Holt, Rinehart and Winston, New York NY, 1961.
- [4] S. Abbott, *Understanding Analysis*, Springer-Verlag, New York NY, 2001.
- [5] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, Wellesley-Cambridge Press; Wellesley-Cambridge MA, 2009.