

# **Introdução à Análise Harmônica e Aplicações**



Publicações Matemáticas

**Introdução à Análise Harmônica  
e Aplicações**

Adán J. Corcho Fernández  
UFAL

Marcos Petrúcio de A. Cavalcante  
UFAL



27<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática

Copyright © 2009 by Adán J. Corcho Fernandez e Marcos P. de A. Cavalcante  
Direitos reservados, 2009 pela Associação Instituto  
Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA

Estrada Dona Castorina, 110  
22460-320 Rio de Janeiro, RJ

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Noni Geiger / Sérgio R. Vaz

## 27<sup>a</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática

- A Mathematical Introduction to Population Dynamics - Howard Weiss
- Algebraic Stacks and Moduli of Vector Bundles - Frank Neumann
- An Invitation to Web Geometry - Jorge Vitório Pereira e Luc Piro
- Bolhas Especulativas em Equilíbrio Geral - Rodrigo Novinski e Mário Rui Páscoa
- $C^*$ -algebras and Dynamical Systems - Jean Renault
- Compressive Sensing - Adriana Schulz, Eduardo A. B. da Silva e Luiz Velho
- Differential Equations of Classical Geometry, a Qualitative Theory - Ronaldo Garcia e Jorge Sotomayor
- Dynamics of Partial Actions - Alexander Arbieto e Carlos Morales
- Introduction to Evolution Equations in Geometry - Bianca Santoro
- Introduction to Intersection Homology and Perverse Sheaves - Jean-Paul Brasselet
- **Introdução à Análise Harmônica e Aplicações - Adán J. Corcho Fernandez e Marcos Petrúcio de A. Cavalcante**
- Introdução aos Métodos de Decomposição de Domínio - Juan Galvis
- Problema de Cauchy para Operadores Diferenciais Parciais - Marcelo Rempel Ebert e José Ruidival dos Santos Filho
- Simulação de Fluidos sem Malha: Uma Introdução ao Método SPH - Afonso Paiva, Fabiano Petronetto, Geovan Tavares e Thomas Lewiner
- Teoria Ergódica para Autômatos Celulares Algébricos - Marcelo Sobottka
- Uma Iniciação aos Sistemas Dinâmicos Estocásticos - Paulo Ruffino
- Uma Introdução à Geometria de Contato e Aplicações à Dinâmica Hamiltoniana - Umberto L. Hryniewicz e Pedro A. S. Salomão
- Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations - Diogo Gomes

ISBN: 978-85-244-0299-9

**Distribuição:** IMPA

Estrada Dona Castorina, 110  
22460-320 Rio de Janeiro, RJ

E-mail: [ddic@impa.br](mailto:ddic@impa.br)

<http://www.impa.br>

*Para Daniele*  
*A. J. C .F*

*Para Érika*  
*M. P. A. C.*



# Sumário

<b>Prefácio</b>	<b>7</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>9</b>
1.1 Funções Riemann integráveis . . . . .	9
1.2 Funções periódicas . . . . .	16
1.3 Aproximação por funções contínuas . . . . .	21
1.4 Identidades Aproximadas . . . . .	24
1.5 Um pouco sobre convoluções . . . . .	27
1.6 As notações de $O$ grande e $o$ pequeno . . . . .	29
1.7 Exercícios . . . . .	31
<b>2 Teoria Básica das Séries de Fourier</b>	<b>35</b>
2.1 A Série de Fourier . . . . .	35
2.1.1 Propriedades dos Coeficientes . . . . .	39
2.2 Convergência Pontual . . . . .	41
2.2.1 Núcleos de Dirichlet . . . . .	41
2.2.2 Critério de Dirichlet . . . . .	43
2.3 Convergência no Sentido de Cesàro . . . . .	47
2.3.1 Núcleos de Fejér . . . . .	48
2.3.2 O Teorema de Fejér . . . . .	50
2.4 A Transformada de Fourier Periódica . . . . .	51
2.5 Convergência Uniforme . . . . .	52
2.5.1 Propriedades de Decaimento . . . . .	53

2.5.2	Critérios de Convergência Uniforme . . . . .	54
2.6	Convergência em Média Quadrática . . . . .	56
2.6.1	Produto Interno no Toro Revisitado . . . . .	56
2.6.2	Melhor Aproximação . . . . .	57
2.6.3	Identidade de Parseval . . . . .	58
2.6.4	Retornando à Convergência Uniforme . . . . .	61
2.7	Exercícios . . . . .	63
<b>3</b>	<b>A Transformada de Fourier na Reta</b>	<b>67</b>
3.1	Da Série de Fourier à Transformada de Fourier . . . . .	68
3.2	Convergência Dominada . . . . .	69
3.3	Definição de Transformada de Fourier . . . . .	71
3.4	Propriedades da Transformada de Fourier . . . . .	75
3.5	Fórmula de Inversão . . . . .	77
3.6	A Transformada de Fourier no Espaço de Schwartz . . . . .	81
3.7	Teorema de Plancherel . . . . .	84
3.8	Fórmula de Soma de Poisson . . . . .	86
3.9	Exercícios . . . . .	88
<b>4</b>	<b>Aplicações</b>	<b>91</b>
4.1	Somando Séries Numéricas . . . . .	91
4.2	A Série Theta . . . . .	92
4.3	O Teorema da Amostragem de Shannon . . . . .	93
4.4	A Equação de Laplace no Semiplano . . . . .	95
4.5	A Desigualdade Isoperimétrica . . . . .	97
4.6	Função Contínua que não tem Derivada em Nenhum Ponto . . . . .	104
4.7	O Teorema de Weyl . . . . .	109
4.8	Exercícios . . . . .	114
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>117</b>



# Prefácio

O objetivo deste livro é apresentar os fundamentos teóricos das *Séries* e da *Integral de Fourier* no caso unidimensional. Estas teorias são pontos de partida de uma área muito ativa da Matemática, denominada *Análise Harmônica*.

Hoje em dia, encontramos uma vasta literatura no assunto, inclusive em português, voltada principalmente para as aplicações das Séries de Fourier e da Transformada de Fourier no contexto das Equações Diferenciais Parciais ( veja por exemplo [4] e [5]). Todavia, além das clássicas aplicações nas Equações Diferenciais que modelam problemas da Física-Matemática, a Análise Harmônica encontra aplicações em outros campos da Matemática e também em outras áreas do conhecimento.

O presente texto tem dois focos principais. *O primeiro* é desenvolver a teoria básica das Série de Fourier e da Transformada de Fourier de forma acessível para estudantes de cursos de graduação em Matemática e áreas afins, usando apenas elementos da Análise Real sem apelar para a Teoria da Medida.

*O segundo* foco é apresentar algumas aplicações em outras áreas da Matemática, tais como Geometria Diferencial, Sistemas Dinâmicos e Teoria dos Números, além da própria Análise.

Estas notas estão divididas em quatro capítulos, sendo os três

primeiros dedicados ao desenvolvimento teórico dos objetivos propostos e o último exclusivamente dedicado às aplicações.

Mais especificamente, no Capítulo 1, com o objetivo de deixar o texto mais auto-contido, apresentamos alguns conceitos da Análise Real, os quais serão utilizados como as principais ferramentas nos demais capítulos. Abordamos, inclusive, alguns tópicos que não são canônicos em cursos de nível de graduação.

O Capítulo 2 é dedicado à teoria básica das Séries de Fourier, fazendo uma descrição de maneira natural e em ordem crescente, de acordo com o grau de complexidade da teoria.

No Capítulo 3, fazemos um paralelo das Séries de Fourier no contexto da Transformada de Fourier. Isto é feito motivando o conceito de Transformada como um limite das Séries de Fourier. Finalizamos o capítulo conectando ambas as teorias mediante a Fórmula do Somatório de Poisson.

Finalmente, no Capítulo 4, utilizamos as teorias desenvolvidas das Séries de Fourier e da Transformada de Fourier para fazer algumas aplicações.

Ademais, no final de cada capítulo, o leitor encontrará exercícios propostos com o objetivo de fixar os conhecimentos adquiridos.

Gostaríamos de agradecer aos nossos colegas do Instituto de Matemática da UFAL, de modo especial a Dimas Martínez Morera, pelo suporte no uso do  $\LaTeX$ , a Hilário Alencar e Krerley Oliveira pelo apoio e incentivo durante a preparação deste trabalho, e aos nossos alunos Fábio Henrique de Carvalho, Isnaldo Isaac Barbosa e Abraão Mendes do Rêgo, que nos ajudaram no trabalho de revisão.

Também queremos agradecer à Comissão Organizadora do 27<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática pela oportunidade de tornar concreto o nosso desejo de escrever estas notas, e as agências de fomento CNPq, CAPES e FAPEAL pelo apoio financeiro.

Maceió, 18 de maio de 2009

Adán J. Corcho Fernández

Marcos Petrúcio de A. Cavalcante

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste primeiro capítulo apresentaremos as principais ferramentas que serão usadas em todo o texto.

Procuramos apresentar estes resultados de maneira auto-contida visando uma maior comodidade para o leitor, bem como unificar a notação.

### 1.1 Funções Riemann integráveis

A classe mais geral de funções com a qual trabalharemos é a classe das funções definidas num intervalo (finito ou infinito) da reta, que tomam valores complexos e que são integráveis no sentido de Riemann.

Assim, se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é dada por  $f(x) = u(x) + iv(x)$ , então dizemos que  $f$  é *Riemann integrável* se, e somente se, a parte real  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e a parte imaginária  $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são funções Riemann integráveis. Além disso, vale que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)dx + i \int_a^b v(x)dx.$$

Em particular, a integral de  $f$  é um número complexo.

Por simplicidade, vamos sempre supor que as funções são limitadas. Com esta hipótese evitamos tratar com integrais impróprias em intervalos limitados e muitas demonstrações ficam mais naturais. Contudo, repetimos a condição de limitação em alguns enunciados onde ela é fundamental.

Recordamos que quando  $f$  estiver definida em um intervalo ilimitado consideramos a *integral imprópria* de  $f$ . Se por exemplo  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(x) = u(x) + iv(x)$  e os limites

$$\int_a^{+\infty} u(x)dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M u(x)dx$$

e

$$\int_a^{+\infty} v(x)dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M v(x)dx,$$

existem, definimos a integral de  $f$  no intervalo  $[a, +\infty)$  pondo,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} u(x)dx + i \int_a^{+\infty} v(x)dx.$$

De maneira similar podemos definir a integral de  $f$  em intervalos da forma  $(-\infty, b]$  e  $(-\infty, +\infty)$ .

Daqui por diante as funções Riemann integráveis serão chamadas simplesmente de funções *integráveis*, e denotaremos por  $\int_I f(x)dx$  a integral da função  $f$  definida no intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , ou ainda por  $\int f$ , se o intervalo de integração estiver subentendido.

Recordamos que as funções integráveis, satisfazem as seguintes propriedades:

(R<sub>1</sub>) formam um espaço vetorial com as operações usuais de soma e produto por um escalar complexo;

(R<sub>2</sub>) se  $f$  é integrável, então  $\bar{f}$  também é integrável e vale que

$$\int_I \overline{f(x)}dx = \overline{\int_I f(x)dx};$$

(R<sub>3</sub>) se  $f$  e  $g$  são integráveis, então o produto  $fg$  também é integrável.

Deixamos a verificação dessas propriedades a cargo do leitor (veja exercício 3).

Vamos denotar por  $R(I)$  o espaço vetorial das funções integráveis no intervalo  $I$ .

Recordando a definição de integral de Riemann podemos encontrar funções integráveis que não são contínuas. Vejamos um exemplo simples.

**Exemplo 1.1.** Considere  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 1/2 \\ 0, & \text{se } x \neq 1/2. \end{cases}$$

Vemos claramente que  $f$  é integrável e sua integral é igual a zero. Para o leitor familiarizado, devemos dizer que basta tomarmos, na definição de integral, o limite sobre todas as partições que contem o ponto  $1/2$ .

Modificando o exemplo acima podemos construir exemplos de funções integráveis que são descontínuas em qualquer subconjunto finito de um intervalo. Mais ainda, podemos construir exemplos de funções integráveis que são descontínuas numa infinidade (enumerável) de pontos. Vejamos isso no próximo exemplo.

**Exemplo 1.2.** Seja  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = \frac{1}{n}, n \geq 1 \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Neste caso temos  $\int_0^1 f(x)dx = 1$ .

Por outro lado, podemos verificar facilmente que funções contínuas e limitadas definidas em intervalos finitos são integráveis. Com efeito,

se  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  é contínua e limitada, então o mesmo ocorre para a sua parte real  $u$  e sua parte imaginária  $v$ . Daí, se  $-M \leq u(x) \leq M$  e  $-N \leq v(x) \leq N$ , para todo  $x \in (a, b)$ , então,

$$-M(b-a) \leq \int_a^b u(x)dx \leq M(b-a)$$

e

$$-N(b-a) \leq \int_a^b v(x)dx \leq N(b-a),$$

Vamos denotar por  $C^0(I)$  o *conjunto das funções contínuas* definidas no intervalo  $I$  que tomam valores complexos. Como antes, é fácil ver que  $C^0(I)$  é um espaço vetorial sobre o corpo dos números complexos.

Agora, se  $I$  for um *intervalo compacto* e  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  for uma função contínua, então  $f$  assume o seu máximo em  $I$  (em particular  $f$  é limitada) e portanto,  $f$  é integrável. Neste caso,  $C^0(I)$  é um subespaço vetorial de  $R(I)$ . Mais ainda, veremos que a integral de Riemann define em  $C^0(I)$  um produto interno (complexo).

Lembramos que um *produto interno*  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  em um espaço vetorial complexo  $E$  é uma aplicação

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$$

satisfazendo

(I<sub>1</sub>) para todo  $v \in E$  a aplicação  $\phi_v(u) = \langle u, v \rangle$  é um funcional linear definido em  $E$ ;

(I<sub>2</sub>)  $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ ;

(I<sub>3</sub>)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é estritamente definido positivo, isto é,  $\langle u, u \rangle \geq 0$  para todo  $u \in E$  e  $\langle u, u \rangle = 0$  se, e somente se,  $u = 0$ .

Também convém recordar que um produto interno em um espaço vetorial induz, de maneira natural, uma norma, a saber:  $\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$ .

Formalizamos a afirmação acima com o seguinte lema:

**Lema 1.3.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo compacto. Então, a aplicação  $\langle \cdot, \cdot \rangle : C^0(I) \times C^0(I) \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por*

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x) \overline{g(x)} dx \quad (1.1)$$

define um produto interno em  $C^0(I)$ .

*Demonstração.* A propriedade  $(I_1)$  decorre diretamente da linearidade de integral de Riemann. Para provarmos  $(I_2)$  utilizaremos a propriedade  $(R_2)$ :

$$\langle f, g \rangle = \int f \bar{g} = \int \overline{\bar{f} g} = \overline{\int \bar{f} g} = \overline{\langle g, f \rangle}.$$

Finalmente, para provarmos a propriedade  $(I_3)$  devemos verificar que

$$\langle f, f \rangle = \int_I |f(x)|^2 dx = 0$$

implica que  $f \equiv 0$ , ou seja,  $f(x) = 0$ , para todo  $x \in I$ . De fato, definindo  $g(x) = |f(x)|^2$  em  $I$ , temos que  $g$  é uma função contínua e não-negativa em  $I$ . Suponhamos que  $\|f\| = 0$  e que exista um ponto  $x_0$  no interior do intervalo  $I$  tal que  $a = |f(x_0)|^2 > 0$ . Então, pela continuidade de  $g(x) = |f(x)|^2$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $g(x) > a/2$  para todo  $x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Assim,

$$0 = \langle f, f \rangle = \int_0^1 g(x) dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} g(x) dx > \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{a}{2} dx = \delta a > 0,$$

o que é impossível.

De maneira análoga também encontramos uma contradição se  $x_0$  é um dos extremos de  $I$ .  $\square$

Como em todo espaço vetorial com produto interno, temos que em  $C^0(I)$  com o produto interno dado em (1.1) vale a *desigualdade de Cauchy-Schwarz*, que neste caso nos diz que

$$\left| \int_I f(x)\overline{g(x)}dx \right| \leq \left( \int_I f^2(x)dx \right)^{1/2} \left( \int_I g^2(x)dx \right)^{1/2}.$$

Assim, se  $f$  e  $g$  são contínuas e integráveis, então podemos verificar que o produto  $fg$  é integrável simplesmente aplicando a desigualdade acima às funções  $f$  e  $\bar{g}$ .

Para fins de aplicações futuras, apresentaremos uma demonstração da desigualdade de Cauchy-Schwarz no caso geral.

**Proposição 1.4** (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Seja  $E$  um espaço vetorial sobre o corpo dos números complexos com um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Então, para todos  $u, v \in E$  vale que*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|. \quad (1.2)$$

Além disso, vale a igualdade se, e somente se,  $u = \lambda v$  (ou  $v = \lambda u$ ), para algum  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

*Demonstração.* Inicialmente observamos que se  $\|v\| = 0$  então  $\langle u, v \rangle = 0$ , qualquer que seja  $u$ . Na verdade, mostraremos separadamente que a parte real e a parte imaginária de  $\langle u, v \rangle$  são nulas.

Com efeito, para todo número real  $t$  temos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \|u + tv\|^2 &= \langle u + tv, \overline{u + tv} \rangle \\ &= \|u\|^2 + t(\langle u, \bar{v} \rangle + \langle \bar{u}, v \rangle) \\ &= \|u\|^2 + t(\langle u, \bar{v} \rangle + \overline{\langle u, \bar{v} \rangle}) \\ &= \|u\|^2 + 2t \Re \langle u, v \rangle. \end{aligned}$$

Assim, se  $\Re \langle u, v \rangle \neq 0$  podemos escolher um  $t$  suficientemente grande (positivo ou negativo) tal que essa desigualdade não vale.



Analisando  $0 \leq \|u + itv\|^2$  de maneira inteiramente análoga podemos mostrar que  $\Im \langle u, v \rangle = 0$ . Portanto, se  $\|v\| = 0$  ambos os lados da desigualdade (1.2) são nulos e o resultado segue trivialmente.

Agora supondo que  $\|v\| \neq 0$  e definimos  $\lambda = \langle u, v \rangle / \|v\|^2$ . Então podemos verificar que  $\langle u - \lambda v, \lambda v \rangle = 0$ . Assim, escrevendo  $u = u - \lambda v + \lambda v$  temos

$$\|u\|^2 = \|u - \lambda v\|^2 + \|\lambda v\|^2 \geq |\lambda|^2 \|v\|^2.$$

Tomando a raiz quadrada de ambos os membros obtemos o resultado.

Observamos ainda que vale a igualdade se, e somente se,

$$\|u - \lambda v\| = 0,$$

ou seja  $u = \lambda v$ . □

**Observação 1.5.** O produto interno em  $C^0(I)$  definido em (1.1) pode ser estendido a  $R(I)$  como uma aplicação bilinear, porém ele não é estritamente definido positivo. No exemplo 1.1 encontramos uma função  $f \in R(I)$  tal que  $\langle f, f \rangle = 0$ , porém  $f$  não é identicamente nula.

Vejamos agora um exemplo que vai aparecer com muita freqüência em todo o livro:

**Exemplo 1.6.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , dada por  $f(x) = \cos x + i \operatorname{sen} x$ . Para o leitor familiarizado devemos dizer que esta é a função exponencial complexa restrita aos números imaginários puros. Assim convém utilizar a *notação* clássica

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x.$$

Como a função exponencial é contínua, temos que ela é integrável em cada intervalo limitado de  $\mathbb{R}$ . Por simplicidade vamos nos restringir ao intervalo  $[0, 1]$  e vamos considerar a seguinte família de funções do tipo acima:

$$e_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad e_k(x) = e^{2\pi i k x}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Utilizando o produto interno definido em (1.1), podemos verificar que,

$$\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l \rangle = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{se } k = l, \\ 0, & \text{se } k \neq l. \end{cases} \quad (1.3)$$

Em outras palavras as funções  $\mathbf{e}_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  formam um conjunto ortonormal de  $C^0([0, 1]) \subset R[0, 1]$ .

Assim, em analogia com o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , podemos pensar que as funções  $\mathbf{e}_k$  formam uma *base* no espaço vetorial das funções integráveis.

Observamos ainda que a identidade (1.3) é equivalente a seguinte:

$$\int_0^1 e^{2\pi i k x} = \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0, \\ 0, & \text{se } k \neq 0. \end{cases}$$

## 1.2 Funções periódicas

No estudo das funções de variável real freqüentemente encontramos funções definidas em toda a reta real  $\mathbb{R}$ , mas cujo os valores se repetem com uma mesma freqüência. Por este motivo estas funções são chamadas de *funções periódicas*. A seguir encontramos a definição precisa de função periódica.

**Definição 1.7.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é dita *periódica* de período  $L > 0$  se para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x + L) = f(x)$ .

Na prática, as funções periódicas podem ser consideradas como funções definidas num intervalo limitado da reta (e.g. o menor intervalo onde a função não se repete).

Por outro lado, dada uma função definida num intervalo limitado, podemos construir uma função periódica definida em toda reta. De fato, se por exemplo  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  então inicialmente definimos os intervalos  $I_n = [a + nL, b + nL)$ , onde  $L = b - a$  e  $n \in \mathbb{Z}$ , de forma que  $\mathbb{R} = \bigcup_n I_n$ . Agora, dado  $x \in \mathbb{R}$  temos que existe um único

número inteiro  $n$  tal que  $x \in I_n$ , neste caso definimos  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  pondo  $F(x) = f(x - nL)$ . Por construção temos que  $F$  é periódica de período  $L$ .

Da mesma maneira, se  $f$  está definida num intervalo compacto, digamos  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , podemos construir uma função periódica definida em toda a reta, desde que  $f(a) = f(b)$ .

Notemos que se  $f$  é periódica de período  $L$  então  $F(x) = f(Lx)$  é periódica de período 1. Isto nos permite, por simplicidade, considerar apenas funções de período 1, dado que  $f(x) = F(x/L)$ . As funções periódicas de período 1 serão chamadas daqui por diante simplesmente de *funções periódicas*.

**Exemplo 1.8.** São exemplo de funções periódicas:

- (a)  $f(x) = \text{sen}2\pi x$ ;
- (b)  $g(x) = \text{cos}2\pi x$ ;
- (c)  $h(x) = e^{2\pi ix} = \text{cos}2\pi x + i\text{sen}2\pi x$ ;
- (d)  $\langle x \rangle = x - [x]$ , onde  $[x]$  denota o maior inteiro não superior a  $x$ .

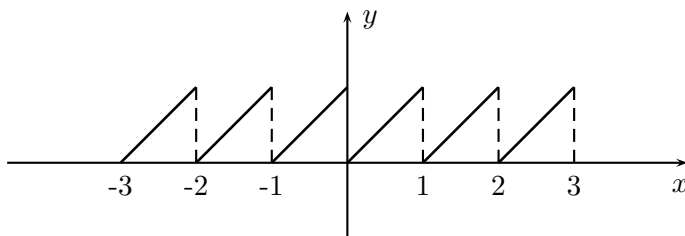


Figura 1.1: Gráfico da função  $\langle x \rangle = x - [x]$ .

Sem dúvida, as funções periódicas mais famosas são as funções trigonométricas circulares *seno* e *coseno*, as quais podem ser consideradas como funções definidas num círculo.

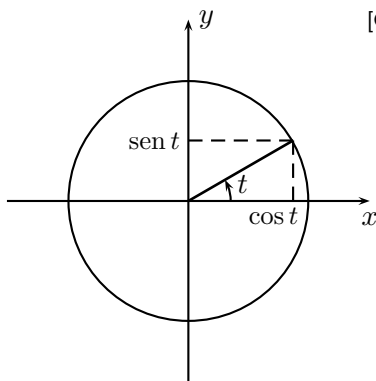


Figura 1.2: As funções seno e cosseno

Veremos agora que qualquer função periódica pode ser vista como uma função definida num círculo e *vice versa*. Para que isso fique mais natural tomemos  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função periódica de período  $2\pi$  e denotemos por  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$  o círculo centrado na origem e de raio 1 (e portanto de comprimento  $2\pi$ ).

Definimos  $\varphi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  pondo  $\varphi(p) = f(x)$ , onde  $x$  é o único elemento (ângulo) do intervalo  $[0, 2\pi)$  tal que  $(\cos x, \sin x) = p$ .

Reciprocamente, dada  $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  definimos  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  pondo  $g(x) = \gamma(\cos x, \sin x)$ . Por construção,  $g$  é periódica de período  $2\pi$ .

Mais ainda, se tomarmos  $\gamma = \varphi$  encontramos  $g = f$ . Dessa forma, temos uma correspondência biunívoca entre as funções periódicas (de período  $2\pi$ ) e as funções definidas no círculo  $\mathbb{S}^1$ .

Naturalmente o argumento acima vale para funções periódicas de qualquer período. Por exemplo, no caso de funções periódicas de período 1, devemos definir  $\varphi(p) = f(x)$ , onde  $x$  é o único elemento do intervalo  $[0, 1)$  tal que  $(\cos 2\pi x, \sin 2\pi x) = p$ . Neste caso diremos que  $f$  e  $\varphi$  são correspondentes.

**Observação 1.9.** O leitor familiarizado deve perceber que o que está por trás desse argumento é o fato que a aplicação

$$P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad P(x) = (\cos x, \sin x),$$

é uma aplicação de recobrimento. Portanto, *caminhos*, como é o caso da função  $f$ , podem ser *levantados* (e também projetados).

Mais geralmente, denotando por  $\mathbb{T}^n$  o toro  $n$ -dimensional  $\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ , temos que a aplicação  $\Pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ , dada por  $\Pi(x_1, \dots, x_n) = (e^{ix_1}, \dots, e^{ix_n})$  é um recobrimento de  $\mathbb{T}^n$  por  $\mathbb{R}^n$ , e neste sentido é possível definir funções periódicas de várias variáveis.

*Em referência a essa notação vamos denotar o círculo  $\mathbb{S}^1$  por  $\mathbb{T}$ , o toro unidimensional.*

O diagrama abaixo ilustra a nossa construção.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C} \\ P \downarrow & \nearrow f & \\ \mathbb{T} & & \end{array}$$

Pela nossa construção podemos verificar que as funções  $f$  e  $\varphi$  estão relacionadas no que diz respeito a regularidade e integrabilidade. Destacaremos isto na próxima proposição, cuja demonstração deixaremos como exercício.

**Proposição 1.10.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função periódica e seja  $\varphi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  a sua correspondente. Então vale que:*

- (a)  $\varphi$  é contínua em  $\mathbb{T}$  se, e somente se,  $f$  for contínua em  $\mathbb{R}$ ;
- (b)  $\varphi$  é integrável em  $\mathbb{T}$  se, e somente se,  $f$  for integrável no intervalo  $[0, 1]$ ;
- (c)  $\varphi$  é de classe  $C^k$  em  $\mathbb{T}$  se, e somente se,  $f$  for de classe  $C^k$  em  $\mathbb{R}$ .

Além disso, podemos verificar que se  $f$  e  $g$  são funções periódicas, então  $af + bg$ , com  $a, b \in \mathbb{C}$ , também é periódica. Mais ainda, o conjunto das funções periódicas é um espaço vetorial complexo, que denotaremos por  $F(\mathbb{T})$ .

Os seguintes subespaços vetoriais de  $F(\mathbb{T})$  serão considerados mais tarde:

- $C^0(\mathbb{T})$ : o espaço vetorial das funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  periódicas e contínuas;
- $C^k(\mathbb{T})$ : o espaço vetorial das funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  periódicas de classe  $C^k$ ;
- $C^\infty(\mathbb{T})$ : o espaço vetorial das funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  periódicas infinitamente diferenciáveis.

Estes espaços satisfazem a seguinte cadeia de inclusões

$$C^\infty(\mathbb{T}) \subset C^{\kappa+1}(\mathbb{T}) \subset C^\kappa(\mathbb{T}) \subset C^0(\mathbb{T}) \subset F(\mathbb{T}),$$

para todo  $\kappa \in \mathbb{Z}^+$ .

Naturalmente, estes espaços podem ser definidos de maneira análoga para funções definidas em intervalos compactos de  $\mathbb{R}$ . Como estamos supondo que as funções são limitadas vale a seguinte cadeia de inclusões.

$$C^\infty(I) \subset C^{\kappa+1}(I) \subset C^\kappa(I) \subset C^0(I) \subset R(I).$$

Denotaremos por  $R(\mathbb{T})$  o espaço vetorial das funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  periódicas e integráveis no intervalo  $[0, 1]$ .

Não é difícil de ver que o subespaço  $R(\mathbb{T}) \cap C(\mathbb{T})$  é um espaço vetorial munido de um produto interno como o que foi definido em (1.1). Por simplicidade usaremos a mesma notação:

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Aqui o detalhe está no fato que as funções estão definidas em toda a reta  $\mathbb{R}$  mas para o produto interno basta integrar no intervalo  $[0, 1]$ , ou qualquer outro intervalo de comprimento 1. Com efeito, vale o seguinte lema que será deixado como exercício.

**Lema 1.11.** *Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é periódica e integrável em  $[0, 1]$ , então  $f$  é integrável em qualquer intervalo finito e vale que*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x) dx,$$

para todos  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

Concluimos esta seção recordando que as funções  $e_k$  pertencem ao espaço  $R(\mathbb{T})$  e ainda satisfazem  $\langle e_k, e_l \rangle = \delta_{kl}$ ,  $k, l \in \mathbb{Z}$ .

### 1.3 Aproximação por funções contínuas

Esta seção é devotada a um importante resultado que será utilizado em muitas demonstrações deste livro. Veremos aqui que funções integráveis no toro podem ser aproximadas por funções contínuas, tanto quanto se queira.

Na demonstração faremos uso da definição de integral de Riemann de funções reais, a qual recordaremos a seguir.

Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo limitado, digamos  $I = (a, b)$ , e seja  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. Isto significa que, dado  $\varepsilon > 0$  existe uma partição do intervalo  $I$ , digamos,  $a = t_0 < \dots < t_n = b$  tal que

$$\sum_{i=1}^n \left[ \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i)} u(x) \right] (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n \left[ \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i)} u(x) \right] (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon. \quad (1.4)$$

Temos o seguinte teorema:

**Teorema 1.12** (Teorema da existência de uma aproximação contínua). *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função periódica e integrável. Se  $f$  é limitada, então para todo  $\varepsilon > 0$  existe uma função contínua e periódica  $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que*

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_0(x)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

e

$$\int_0^1 |f(x) - f_0(x)| dx < \varepsilon.$$

*Demonstração.* Seja  $f = u + iv$  e suponhamos que o resultado valha para  $u$  e para  $v$ , funções reais. Então existem  $u_0$  e  $v_0$  funções (reais) contínuas e periódicas tais que

$$\int_0^1 |u(x) - u_0(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \int_0^1 |v(x) - v_0(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daí, pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x) - f_0(x)| dx &= \int_0^1 |(u(x) - u_0(x)) + i(v(x) - v_0(x))| dx \\ &\leq \int_0^1 |u(x) - u_0(x)| dx + \int_0^1 |v(x) - v_0(x)| dx \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, basta provarmos o teorema para  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Dado  $\varepsilon > 0$  seja  $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$  uma partição de  $[0, 1]$  onde vale (1.4). Seja  $U : I \rightarrow \mathbb{R}$  a função escada definida a partir da partição da seguinte maneira

$$U(x) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} u(x), \quad \text{se } x \in [x_{i-1}, x_i],$$

para cada  $i = 1, \dots, n$ .

Em particular,  $U(x) \geq u(x)$  para todo  $x$ , e se  $u(x) \leq M$ , então também teremos  $U(x) \leq M$ .

Notemos também que, por (1.4),

$$\int_0^1 |U(x) - u(x)| dx = \int_0^1 (U(x) - u(x)) dx < \varepsilon.$$

Agora dado  $\delta > 0$  vamos construir a função contínua  $u_0$ .

Definimos  $u_0(x) = U(x)$ , se  $|x - x_i| \geq \delta$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Se  $x \in [x_i - \delta, x_i + \delta]$ ,  $i = 2, \dots, n - 1$ , definimos  $u_0(x)$  como sendo a função linear (segmento) cujo gráfico liga os pontos  $((x_i - \delta), U(x_i - \delta))$  e  $((x_i + \delta), U(x_i + \delta))$ . No intervalo  $[0, x_1]$  definimos  $u_0(x)$  como a função linear cujo o gráfico liga os pontos  $(0, u(0))$  e  $((x_1 + \delta), U(x_1 + \delta))$ , e finalmente, no intervalo  $[x_n - \delta, 1]$  definimos  $u_0(x)$  como a função linear cujo o gráfico liga os pontos  $((1 - \delta), U(1 - \delta))$ , e  $(1, u(1))$ . Por construção temos que  $u_0$  é uma função contínua e que  $u_0(0) = u_0(1)$ .



Agora verificaremos que  $u_0$  satisfaz a condição do teorema.

Inicialmente notemos que  $u_0$  também é limitada pela mesma constante  $M$ . Além disso,  $u_0$  é uma boa aproximação de  $U$ . De fato,  $u_0$  só difere de  $U$  nos intervalos de comprimento (no máximo)  $2\delta$  em torno dos pontos da partição. Em cada um desses intervalos, digamos  $I_i$  temos que  $\int_{I_i} |u_0(x) - U(x)| < 2\delta M$ . Como são  $n$  intervalos,

$$\int_0^1 |u_0 - U| dx < 2\delta Mn.$$

Escolhendo um  $\delta$  muito pequeno, como por exemplo  $\delta = \varepsilon/2Mn$ , teremos uma função contínua  $u_0$  tal que

$$\int_0^1 |u_0 - U| dx < \varepsilon.$$

Daí, aplicando a desigualdade triangular novamente, obtemos

$$\int_0^1 |u_0 - u| dx \leq \int_0^1 |u_0 - U| dx + \int_0^1 |u - U| dx < 2\varepsilon$$

Agora é só observar que poderíamos ter começado essa demonstração com  $\varepsilon/2$  no lugar de  $\varepsilon$ .  $\square$

A Figura 1.3 ilustra a construção da função  $u_0$ .

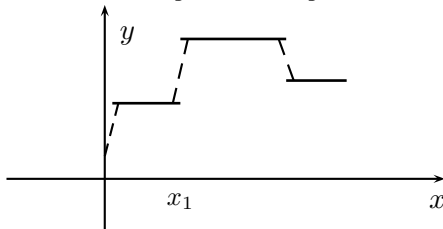


Figura 1.3: Construção de uma aproximação contínua

**Observação 1.13.** O leitor deve perceber que o teorema que acabamos de provar também vale para funções definidas em intervalos limitados de  $\mathbb{R}$

## 1.4 Identidades Aproximadas

Nesta seção provaremos um teorema que tem muita utilidade para recuperar os valores de uma função através certos tipos de operadores integrais.

Começamos definindo o que entendemos por Identidade Aproximada e no final da seção daremos uma justificativa para este nome.

**Definição 1.14.** Uma seqüência  $\{\Psi_n\}_{n \geq 1}$  de funções, definidas num intervalo aberto  $I = (-a, a)$  (finito ou infinito) e tomando valores reais é chamada de *Identidade Aproximada no intervalo I* se satisfaz as seguintes condições:

(a)  $\Psi_n(x) \geq 0$  para todo  $x \in I$ ;

(b) 
$$\int_{-a}^a \Psi_n(x) dx = 1;$$

(c) Se  $\delta > 0$ , então 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta < |x| < a} \Psi_n(x) dx = 0.$$

Alguns exemplos de Identidades Aproximadas são os seguintes:

(e<sub>1</sub>)  $\Psi_n : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$ , definida por

$$\Psi_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } |x| < \frac{1}{2n}, \\ 0 & \text{se } \frac{1}{2n} < |x| < 1. \end{cases}$$

(e<sub>2</sub>)  $\Phi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$ , definida por  $\Phi_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}$ .

Mais geralmente vale o seguinte resultado, cuja prova deixamos como exercício.

**Proposição 1.15.** *Se  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função não negativa tal que  $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) dx = 1$ , então  $\Phi_n(x) = n\Phi(nx)$  é uma identidade aproximada.*

Identidades aproximadas nos permitem calcular o valor de funções contínuas mediante um processo de limite que explicamos a seguir.

**Teorema 1.16** (Concentração da Massa). *Sejam  $I = (-a, a)$  um intervalo (finito ou infinito) e  $\{\Psi_n\}_{n \geq 1}$  uma identidade aproximada definida em  $I$ . Então, para qualquer função  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  integrável, limitada e contínua no ponto  $x = 0$  tem-se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \Psi_n(x) f(x) dx = f(0).$$

*Demonstração.* Seja  $\epsilon$  um número positivo qualquer. A continuidade de  $f$  na origem nos garante a existência de  $\delta > 0$  de modo que

$$|f(x) - f(0)| < \epsilon/2, \quad \text{para todo } |x| < \delta. \quad (1.5)$$

Temos que provar a convergência para 0 da seqüência

$$J_n := \int_{-a}^a \Psi_n(x) f(x) dx - f(0).$$

Pela propriedade (b), temos que

$$J_n = \int_{-a}^a \Psi_n(x) [f(x) - f(0)] dx.$$

A função  $f$  é limitada, logo existe  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$ . Assim,

usando (1.5) obtemos

$$\begin{aligned}
 |J_n| &\leq \int_{-a}^a \Psi_n(x) |f(x) - f(0)| dx \\
 &= \int_{-\delta}^{\delta} \Psi_n(x) |f(x) - f(0)| dx + \int_{\delta < |x| < a} \Psi_n(x) |f(x) - f(0)| dx \\
 &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \Psi_n(x) dx + 2M \int_{\delta < |x| < a} \Psi_n(x) dx \\
 &\leq \frac{\epsilon}{2} + 2M \int_{\delta < |x| < a} \Psi_n(x) dx.
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Por outro lado, da propriedade (c) segue-se que para  $n \gg 1$  vale

$$\int_{\delta < |x| < a} \Psi_n(x) dx \leq \frac{\epsilon}{4M} \tag{1.7}$$

Combinado (1.6) e (1.7) temos que

$$|J_n| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad \text{para } n \gg 1,$$

donde segue o resultado desejado.  $\square$

**Observação 1.17.** O Teorema 1.16 nos diz que as médias ponderadas de  $f$ , com pesos  $\Psi_n$ , vão se concentrando sucessivamente em torno da origem. Além disso, no caso em que  $f$  é contínua em  $x = 0$  o limite deste processo é precisamente o valor de  $f$  nesse ponto. Naturalmente a origem pode ser substituída por qualquer outro ponto. Neste caso temos a seguinte identidade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \Psi_n(x - x_0) f(x) dx = f(x_0).$$

## 1.5 Um pouco sobre convoluções

A *convolução* é uma operação entre duas funções cujo resultado ainda é uma função e aparece de forma natural quando estamos trabalhando com funções integráveis.

Nesta breve seção veremos, além da definição precisa, algumas das principais propriedades desta operação. Por simplicidade vamos tratar apenas com funções no espaço  $\mathbb{R}(\mathbb{T})$ .

**Definição 1.18.** Sejam  $f$  e  $g$  funções periódicas e integráveis em  $\mathbb{R}$ . Definimos a *convolução* entre  $f$  e  $g$  como sendo a função  $f * g$  definida no intervalo  $[0, 1]$  dada por

$$(f * g)(x) = \int_0^1 f(y)g(x - y)dy.$$

Esta definição faz sentido pois o produto de duas funções integráveis é uma função integrável, como diz a propriedade  $(R_3)$  vista acima.

Na proposição abaixo encontramos as principais propriedades da convolução.

**Proposição 1.19.** *Sejam  $f, g, h \in \mathbb{R}(\mathbb{T})$ . Então:*

- (a)  $f * (g + h) = f * g + f * h$ ;
- (b)  $f * g = g * f$
- (c)  $(\lambda f) * g = \lambda(f * g)$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$ ;
- (d)  $f * (g * h) = f * (g * h)$ ;
- (e)  $f * g$  é contínua.

*Demonstração.* Provaremos aqui apenas a propriedade (e) e deixaremos as demais como um exercício para o leitor. Suponhamos inicialmente que  $f$  e  $g$  são funções contínuas. Então,

$$(f * g)(x_1) - f(f * g)(x_2) = \int_0^1 f(y)[g(x_1 - y) - g(x_2 - y)] dy.$$

Como  $g$  é contínua, temos que  $g$  é uniformemente contínua em qualquer intervalo fechado de  $\mathbb{R}$ , e como  $g$  é periódica temos que  $g$  é uniformemente contínua em toda reta. Desta forma, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon, \quad \text{sempre que } |x - y| < \delta.$$

Portanto, se  $|x_1 - x_2| < \delta$ , então  $|(x_1 - y) - (x_2 - y)| < \delta$ , para todo  $y$ . Daí,

$$\begin{aligned} |(f * g)(x_1) - f(f * g)(x_2)| &\leq \left| \int_0^1 f(y)[g(x_1 - y) - g(x_2 - y)] dy \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(y)| |g(x_1 - y) - g(x_2 - y)| dy \\ &\leq \varepsilon \int_0^1 |f(y)| dy \\ &\leq \varepsilon M, \end{aligned}$$

onde  $M > 0$  é tal que  $|f(x)| \leq M$ , para todo  $x$ . Isto mostra que  $(f * g)$  é uma função contínua.

Agora suponhamos que  $f$  e  $g$  sejam apenas integráveis. Neste caso, dado  $k \in \mathbb{N}$ , temos pelo Teorema 1.12 que existem  $f_k$  e  $g_k$  contínuas tais que  $\int_0^1 |f(x) - f_0(x)| dx < \frac{1}{k}$  e  $\int_0^1 |g(x) - g_0(x)| dx < \frac{1}{k}$ . Notemos que

$$f * g - f_k * g_k = (f - f_k) * g + f_k * (g - g_k).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |(f - f_k) * g(x)| &\leq \int_0^1 |f(x-y) - f_k(x-y)| |g(y)| dy \\ &\leq \int_0^1 M \int_0^1 |f(x) - f_k(x)| dy \\ &= \frac{M}{k}, \end{aligned}$$

qualquer que seja  $x$ . Isto significa que a sequência  $(f - f_k) * g$  converge uniformemente para zero, quando  $k \rightarrow \infty$ , e o mesmo vale para a sequência  $f_k * (g - g_k)$ .

Concluimos que  $f_k * g_k$  converge uniformemente para  $f * g$ . Como o limite uniforme de funções contínuas é uma função contínua, o item (e) está provado.  $\square$

**Observação 1.20.** Mais uma vez queremos enfatizar que as propriedades da convolução que acabamos de mostrar valem também no contexto de funções definidas em intervalos limitados de  $\mathbb{R}$ . Observamos ainda que usando a notação de convolução a última identidade da seção anterior se escreve como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n * f(x_0) = f(x_0).$$

## 1.6 As notações de $O$ grande e $o$ pequeno

Finalizamos este capítulo apresentando duas *notações* que acreditamos ser tão úteis que mereçam uma seção inteira. A notação de  $O$  grande, que veremos a seguir foi introduzida pela primeira vez por Paul Bachmann, em 1894, mas se popularizou com os trabalhos de Edmund Landau, especialmente com o livro [6]. Aqui apresentaremos estas notações no nosso contexto.

**Definição 1.21.** Sejam  $f$  e  $g$  funções definidas no intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  tomando valores em  $\mathbb{C}$  e seja  $x_0 \in I$  (ou  $x = \pm\infty$ ). Escrevemos

$$f = O(g) \quad \text{quando } x \rightarrow x_0$$

se existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

para todo  $x$  suficientemente próximo de  $x_0$ .

Isto significa que  $f$  é minorada por  $-C|g|$  e majorada por  $C|g|$ , numa vizinhança de  $x_0$ .

Em particular, fixado  $m \in \mathbb{R}$ , se  $f = O(|x|^m)$  quando  $x \rightarrow x_0$ , então existe  $C > 0$  e  $\delta > 0$  tais que  $|f(x)| \leq C|x|^m$ , para todo  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .

Vejamos um exemplo simples para fixar esse conceito.

**Exemplo 1.22.** Seja  $f(x) = 4x^5 - 20x^3 - \cos x$ . Então afirmamos que  $f = O(|x|^5)$  quando  $x \rightarrow \infty$ .

Com efeito, se  $x$  é suficientemente grande (em particular  $x > 1$ ), então

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |2x^5 - 7x^3 - \cos x| \\ &\leq 2x^5 + 7x^3 + 1 \\ &\leq 2x^5 + 7x^5 \\ &= 9|x|^5. \end{aligned}$$

Podemos verificar algumas propriedades básicas para a notação  $O$  grande.

**Proposição 1.23.** *Para a notação de  $O$  grande valem as seguintes propriedades:*

- (a) Se  $f_1 = O(g)$  e  $f_2 = O(g)$ , então  $f_1 + f_2 = O(g)$ ;
- (b) Se  $f = O(g)$ , então  $\lambda f = O(g)$  para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$ ;
- (c) Se  $f_1 = O(g_1)$  e  $f_2 = O(g_2)$ , então  $f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$ ;



(d) Se  $f = O(|x|^{m_1})$  e  $m_1 \geq m_2$ , então  $f = O(|x|^{m_2})$ .

Deixamos a prova desta proposição como exercício.

Num outro sentido temos a definição de *o pequeno*.

**Definição 1.24.** Sejam  $f$  e  $g$  funções definidas no intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  tomando valores em  $\mathbb{C}$  e seja  $x_0 \in I$  (ou  $x = \pm\infty$ ). Escrevemos

$$f = o(g) \quad \text{quando } x \rightarrow x_0$$

se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

Neste caso, esta notação significa que a função  $f$  é muito menor que a função  $g$ , numa vizinhança de  $x_0$ .

Exemplos simples são  $6x = o(x^2)$  e  $1/x = o(1)$ , quando  $x \rightarrow \infty$ , enquanto  $x^2 \neq O(x^2)$  quando  $x \rightarrow x_0$ , qualquer que seja  $x_0$ .

Observe que se  $f(x) = o(g(x))$  quando  $x \rightarrow x_0$ , então  $f(x) = O(g(x))$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

## 1.7 Exercícios

1. Mostre que  $\operatorname{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$  e que  $\operatorname{cos}(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ .
2. Mostre que  $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}x}{x} dx < \infty$ , mas  $\int_0^\infty \left| \frac{\operatorname{sen}x}{x} \right| dx$  diverge.
3. Prove as propriedades  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  das funções integráveis.
4. Prove que a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é racional;} \\ 0 & \text{se } x \text{ é irracional,} \end{cases}$$

admite qualquer número racional como período e não admite nenhum período irracional.

5. Mostre que  $\operatorname{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ .
6. Mostre que  $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}x}{x} dx < \infty$ , mas  $\int_0^\infty \left| \frac{\operatorname{sen}x}{x} \right| dx$  diverge.
7. Prove que o conjunto dos períodos de uma função contínua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é um conjunto fechado.
8. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  periódica de período  $L$  e diferenciável. Prove que  $f'$  também é periódica, de período  $L$ .
9. Suponha  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é periódica de período  $L$  e integrável em qualquer intervalo finito da reta. Prove que se  $a, b \in \mathbb{R}$ , então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+L}^{b+L} f(x)dx = \int_{a-L}^{b-L} f(x)dx.$$

Além disso, prove que

$$\int_{-L/2}^{L/2} f(x+a)dx = \int_{-L/2}^{L/2} f(x)dx = \int_{a-L/2}^{a+L/2} f(x)dx.$$

10. Mostre as propriedades (a), (b), (c) e (d) da Proposição 1.19 .
11. Mostre que  $\int_0^1 (f * g)(x)dx = \left[ \int_0^1 f(x)dx \right] \cdot \left[ \int_0^1 g(x)dx \right]$ .
12. Mostre se  $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$  são funções diferenciáveis, então

$$\frac{d}{dx}(f * g) = \frac{df}{dx} * g = f * \frac{dg}{dx}.$$

13. Se  $f$  é uma função contínua e  $g$  uma função monótona em  $[a, b]$ , então existe  $c$ ,  $a < c < b$ , tal que

$$\int_a^b gf = g(b^-) \int_c^b f + g(a^+) \int_a^c f,$$

onde  $g(b^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} g(b-h)$  e  $g(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} g(a+h)$ .

14. Mostre que  $e^x - 1 - x - x^2 = O(x^3)$  quando  $x \rightarrow 0$ .

15. Prove a Proposição 1.23



## Capítulo 2

# Teoria Básica das Séries de Fourier

Neste capítulo vamos apresentar alguns dos principais fundamentos da Análise Harmônica.

Como o próprio título já diz, escolhemos apresentar o estudo das séries de Fourier, especialmente no que diz respeito a sua convergência. Como veremos nas próximas páginas, esta convergência se dá de várias maneiras, dependendo essencialmente da regularidade da função de partida.

Além disso, veremos mais adiante que estes teoremas não são apenas ricos de importância teórica, mas também o são no que toca às aplicações, dentro e fora da matemática.

Procuramos introduzir os conceitos de forma natural, utilizando as ferramentas que foram apresentadas no capítulo anterior.

### 2.1 A Série de Fourier

No capítulo anterior vimos que o espaço vetorial  $C^0(\mathbb{T})$ , das funções periódicas que são contínuas, e portanto integráveis, possui um produto interno bem definido. Com este produto interno mostramos que

as funções  $e_k(x) = e^{2\pi i k x}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  formam um conjunto ortonormal. Mais ainda, o produto interno de  $C^0(\mathbb{T})$  pode ser aplicado a qualquer função periódica e integrável. Assim, a seguinte pergunta faz sentido neste momento:

*Dada  $f \in R(\mathbb{T})$  é possível escrever  $f$  como uma combinação linear das funções  $e_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ?*

A resposta desta pergunta está no cerne da teoria que foi proposta por Joseph Fourier no século XVIII.

Para introduzimos os fundamentos dessa teoria tomamos uma função  $f \in R(\mathbb{T})$  e suponhamos inicialmente que  $f$  admite a seguinte representação

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i n x}. \quad (2.1)$$

Suponhamos ainda que podemos integrar a série termo-a-termo e que a integral comuta com o sinal do somatório. Então, multiplicando (2.1) por  $e^{-2\pi i m x}$  e integrando no intervalo  $[0, 1]$  obtemos

$$\int_0^1 f(x) e^{-2\pi i m x} dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \int_0^1 e^{2\pi i (n-m)x} dx = a_m, \quad (2.2)$$

visto que

$$\int_0^1 e^{2\pi i \kappa x} dx = \begin{cases} 1 & \text{se } \kappa = 0, \\ 0 & \text{se } \kappa \neq 0. \end{cases}$$

Motivados por estes cálculos informais apresentamos duas definições.

**Definição 2.1.** Seja  $f \in R(\mathbb{T})$ . Os números

$$\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.3)$$

são chamados de *coeficientes de Fourier* da função  $f$ . A série

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e_n(x), \quad (2.4)$$

é chamada de *série de Fourier* da função  $f$ .

Vejam os um exemplo.

**Exemplo 2.2.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  a função dada por  $f(x) = |x|$  no intervalo  $[-1/2, 1/2]$  e nos demais reais definida como sendo periódica. Assim  $f(x) = f(x + 1)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$  (veja figura (2.1)).

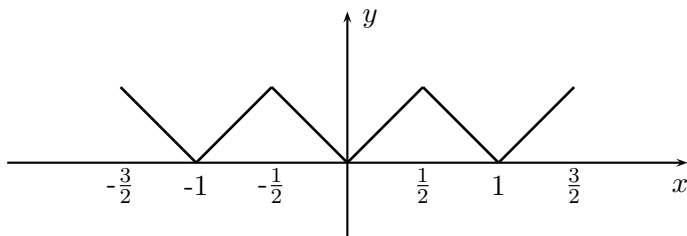


Figura 2.1: Gráfico da função  $f(x) = |x|$ ,  $f(x) = f(x + 1)$ .

Vejam os quem são os coeficientes de Fourier de  $f$  e qual a sua série de Fourier.

Inicialmente temos que

$$\hat{f}(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |x| dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} x dx = \frac{1}{4}.$$

Agora seja  $n$  é um inteiro diferente de zero. Inicialmente escrevemos,

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |x| e^{-2\pi i n x} dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^0 (-x) e^{-2\pi i n x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x e^{-2\pi i n x} dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes temos,

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^0 (-x)e^{-2\pi inx} dx &= \int_0^{-\frac{1}{2}} xe^{-2\pi inx} dx \\ &= \left( \frac{i}{2\pi n}x + \frac{1}{4\pi^2 n^2} \right) e^{-2\pi inx} \Bigg|_{x=0}^{x=-\frac{1}{2}} \\ &= \left( -\frac{i}{4\pi n} + \frac{1}{4\pi^2 n^2} \right) e^{\pi in} - \frac{1}{4\pi^2 n^2}. \end{aligned}$$

De maneira análoga,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{-2\pi inx} dx = \left( \frac{i}{4\pi n} + \frac{1}{4\pi^2 n^2} \right) e^{\pi in} - \frac{1}{4\pi^2 n^2}.$$

Assim,

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi^2 n^2} [e^{\pi in} - 1] = \frac{1}{2\pi^2 n^2} [(-1)^n - 1],$$

ou seja,

$$\hat{f}(n) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi^2 n^2} & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ 1/4, & \text{se } n = 0, \\ 0 & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Portanto a série de Fourier da função  $f$  é

$$\frac{1}{4} - \sum_{|n| \geq 1} \frac{1}{\pi^2 (2n+1)^2} e^{2\pi(2n+1)ix}.$$

Isto finaliza o nosso exemplo.

Como já mencionamos o objetivo principal deste capítulo é dar condições de convergência para a série de Fourier e entender em que sentido as somas parciais

$$S_N f(x) = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) e_n(x) \quad (2.5)$$



convergem para  $f(x)$ . Em outras palavras, queremos descobrir quando e em que sentido podemos garantir a igualdade

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = f(x).$$

### 2.1.1 Propriedades dos Coeficientes

Antes de prosseguir vamos apresentar alguns resultados sobre os coeficientes da Série de Fourier que utilizaremos com muita frequência.

Começamos com uma fórmula alternativa para calcular os coeficientes de Fourier de  $f$ , a saber:

**Lema 2.3.** *Se  $\hat{f}(n)$  é o  $n$ -ésimo coeficiente de  $f \in R(\mathbb{T})$ , então,*

$$\hat{f}(n) = - \int_0^1 f\left(x + \frac{1}{2n}\right) e^{-2\pi i n x} dx.$$

*Demonstração.* Fazendo a mudança de variáveis  $u = x - \frac{1}{2n}$  na integral (2.3) e usando o Lema 1.11, temos

$$\hat{f}(n) = \int_{\frac{1}{2n}}^{1+\frac{1}{2n}} f\left(u + \frac{1}{2n}\right) e^{-2\pi i n u} e^{\pi i} du = - \int_0^1 f\left(u + \frac{1}{2n}\right) e^{-\pi i n u} du.$$

□

Na próxima proposição encontramos dois resultados importantes e bem úteis.

**Proposição 2.4.** *Seja  $f$  absolutamente Riemann integrável no toro, isto é,  $f$  e  $|f| \in R(\mathbb{T})$ . Então*

$$(a) \quad |\hat{f}(n)| \leq \int_0^1 |f(x)| dx;$$

$$(b) \quad \lim_{|n| \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = 0 \quad (\text{Lema de Riemann-Lebesgue}).$$

*Demonstração.* Da definição de  $\hat{f}(n)$  e fazendo-se uso da desigualdade triangular temos

$$|\hat{f}(n)| = \left| \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx} dx \right| \leq \int_0^1 |f(x)| dx,$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

A propriedade (b) é conhecida na literatura como *Lema de Riemann-Lebesgue*. Para provarmos essa propriedade combinamos a definição inicial de  $\hat{f}(n)$  com a fórmula dada no Lemma 2.3:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2} \int_0^1 (f(x) - f(x + \frac{1}{2n}))e^{-2\pi inx} dx. \quad (2.6)$$

Agora separamos a demonstração em dois casos.

*Caso 1:*  $f \in C^0(\mathbb{T})$ . Neste caso  $f$  é uniformemente contínua em  $[0, 1]$ ; logo, dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$|f(y) - f(x)| < \epsilon \text{ para todo } |y - x| < \delta.$$

Assim, para todo  $|n| > \frac{1}{2\delta}$  temos que

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |f(x) - f(x + \frac{1}{2n})| dx < \frac{\epsilon}{2},$$

o que implica que  $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = 0$ .

*Caso 2:*  $f \in R(\mathbb{T})$ . Se  $f$  é apenas integrável, sabemos do Teorema 1.12 que dado  $\epsilon > 0$  existe  $g \in C^0(\mathbb{T})$  tal que

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por outro lado, pelo Caso 1, tomando  $|n|$  suficientemente grande temos que

$$|\hat{g}(n)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Então, fazendo uso da propriedade (a) concluímos que

$$\begin{aligned} |\hat{f}(n)| &\leq |(f - g)\hat{\ }(n)| + |\hat{g}(n)| \\ &\leq \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx + |\hat{g}(n)| < \epsilon, \end{aligned}$$

para  $|n| \gg 1$ , obtendo-se assim o resultado.  $\square$

## 2.2 Convergência Pontual

Nesta seção apresentaremos alguns critérios suficientes que garantem a convergência pontual da série de Fourier. Destacamos o Teorema de Dirichlet, que foi o primeiro resultado sobre a convergência pontual da série de Fourier. Essencialmente, para cada  $x$  fixado, veremos que sob certas condições a sequência  $S_N f(x)$  converge para  $f(x)$  ou, de um modo mais geral, para o valor  $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ , onde

$$f(x^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x + h) \quad \text{e} \quad f(x^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x - h)$$

são limites laterais, direito e esquerdo, de  $f$  em  $x$ , respectivamente.

### 2.2.1 Núcleos de Dirichlet

Para obtermos alguns critérios de convergência pontual é conveniente expressar  $S_N f(x)$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \sum_{|n| \leq N} e^{2\pi i n x} \int_0^1 f(y) e^{-2\pi i n y} dy \\ &= \int_0^1 f(y) \sum_{|n| \leq N} e^{2\pi i (x-y)} dy \\ &= \int_0^1 f(y) D_N(x - y) dy = f * D_N(x) \\ &= \int_0^1 f(x - y) D_N(y) dy, \end{aligned}$$

onde  $D_N(x) = \sum_{|n| \leq N} e^{2\pi i n x}$  é chamado de *Núcleo de Dirichlet*.

**Lema 2.5.** *Dado  $N \in \mathbb{N}$ , temos que*

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}[(2N+1)\pi x]}{\text{sen}(\pi x)} & \text{se } x \in [-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}], \\ 2N+1 & \text{se } x = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

*Demonstração.* Pondo  $w = e^{2\pi i x}$  escrevemos

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{-1} w^n + \sum_{n=0}^N w^n = \sum_{n=1}^N (1/w)^n + \sum_{n=0}^N w^n.$$

Efetuada as somas geométricas obtemos

$$D_N(x) = \frac{w^{-N} - 1}{1 - w} + \frac{w^{N+1} - 1}{w - 1} = \frac{w^{-N} - w^{N+1}}{1 - w}.$$

Agora, multiplicando numerador e denominador por  $\frac{w^{-1/2}}{2i}$ , concluímos que

$$D_N(x) = \frac{(w^{-(N+1/2)} - w^{N+1/2})/2i}{(w^{-1/2} - w^{1/2})/2i} = \frac{\text{sen}[(2N+1)\pi x]}{\text{sen}(\pi x)},$$

para todo  $x \in [-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}]$ .

Por último, observamos que  $D_N(0) = \sum_{|n| \leq N} 1 = 2N+1$ , logo, o resultado está provado.  $\square$

Os núcleos de Dirichlet são contínuos e, além disso, satisfazem

$$\int_0^1 D_N(x) dx = 1 \quad \text{para todo } N \in \mathbb{N}, \quad (2.8)$$

que é facilmente verificado quando escrevemos  $D_N(x) = \sum_{|n| \leq N} e^{2\pi i n x}$  e lembramos das identidades em (1.3).

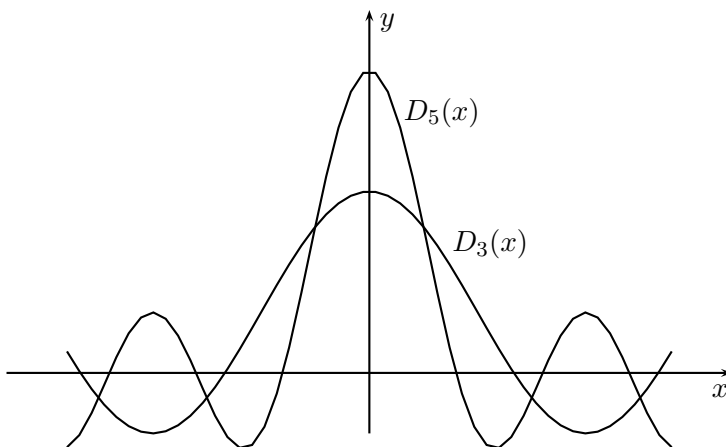


Figura 2.2: Núcleos de Dirichlet

No entanto, eles **não** satisfazem as propriedades de uma *identidade aproximada*, pois é possível mostrar que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 |D_N(x)| dx = +\infty.$$

Ver detalhes no Exercício 6 no final do capítulo.

**Observação 2.6.** O fato de  $\{D_N f(x)\}_{N \geq 1}$  não ser uma *identidade aproximada* não nos permite usar o Teorema 1.16 para garantir a convergência pontual de  $S_N f(x)$  para  $f(x)$  para funções contínuas periódicas. Assim, devemos procurar outros critérios de convergência pontual para a série de Fourier.

## 2.2.2 Critério de Dirichlet

O primeiro resultado positivo de convergência pontual deve-se a Johann Dirichlet, que provou o seguinte critério.

**Teorema 2.7** (Critério de Dirichlet). *Seja  $f \in F(\mathbb{T})$  limitada, contínua*

por partes e com um número finito de máximos e mínimos. Então,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)].$$

Em particular, temos que  $S_N f(x)$  converge pontualmente para  $f(x)$  nos pontos onde  $f$  é contínua.

*Demonstração.* Vamos tomar um ponto  $x_0 \in [0, 1]$ . Notemos que como  $f$  tem um número finito de máximos e mínimos então  $f$  é monótona por partes. Em particular, existem os limites laterais.

Usando que o núcleo de Dirichlet é uma função par podemos escrever

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x_0 - y) D_N(y) dy + \int_0^{\frac{1}{2}} f(x_0 - y) D_N(y) dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} f(x_0 + y) D_N(y) dy + \int_0^{\frac{1}{2}} f(x_0 - y) D_N(y) dy. \end{aligned}$$

Assim, é suficiente mostrar que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{2}} f(x_0 + y) D_N(y) dy = \frac{f(x_0^+)}{2}$$

e

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{2}} f(x_0 - y) D_N(y) dy = \frac{f(x_0^-)}{2}.$$

Vamos analisar o primeiro limite. Escolhendo um  $\delta \in (0, 1/2)$ , e lembrando que  $\int_0^{\frac{1}{2}} D_N(y) dy = \frac{1}{2}$ , temos

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} f(x_0 + y) D_N(y) dy - f(x_0^+) &= \int_0^{\frac{1}{2}} [f(x_0 + y) - f(x_0^+)] D_N(y) dy \\ &= \int_0^{\delta} [f(x_0 + y) - f(x_0^+)] D_N(y) dy \\ &\quad + \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} [f(x_0 + y) - f(x_0^+)] D_N(y) dy. \end{aligned}$$

Agora analisemos as duas últimas integrais separadamente.

Sem perda de generalidade podemos supor que  $f$  é crescente a direita de  $x_0$ . Daí, dado  $\varepsilon > 0$ , escolhemos  $\delta > 0$  tal que  $f(x) - f(x_0^+) < \varepsilon$ , se  $x_0 < x < \delta$ .

Assim, utilizando o teorema do valor médio para integrais (veja exercício 13 no capítulo 1),

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\delta [f(x_0 + y) - f(x_0^+)] D_N(y) dy \right| &= \left| [f(x_0^+) - f(x_0^+)] \int_0^\eta D_N(y) dy \right. \\ &\quad \left. + [f(x_0 + \delta^-) - f(x_0^+)] \int_\eta^\delta D_N(y) dy \right| \\ &= \left| [f(x_0 + \delta^-) - f(x_0^+)] \int_\eta^\delta D_N(y) dy \right| \\ &\leq \varepsilon \left| \int_\eta^\delta D_N(y) dy \right|, \end{aligned}$$

onde  $\eta \in (0, \delta)$ .

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\eta}^{\delta} D_N(y) dy \right| &= \left| \int_{\eta}^{\delta} \frac{\text{sen}[(2N+1)\pi y]}{\text{sen}(\pi y)} dy \right| \\
&\leq \left| \int_{\eta}^{\delta} \frac{\text{sen}[(2N+1)\pi y]}{\pi y} dy \right| \\
&\quad + \left| \int_{\eta}^{\delta} \text{sen}[(2N+1)\pi y] \left[ \frac{1}{\text{sen}(\pi y)} - \frac{1}{\pi y} \right] dy \right| \\
&\leq \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{sen}(\pi y)}{\pi y} dy \right| + \int_{\eta}^{\delta} \left| \frac{1}{\text{sen}(\pi y)} - \frac{1}{\pi y} \right| dy \\
&\leq C + \int_{\eta}^{\delta} \left| \frac{\pi y - \text{sen}(\pi y)}{\pi y \text{sen} \pi y} \right| dy \\
&= C + \int_{\eta}^{\delta} \left| \frac{o(\pi y^2)}{\pi y \text{sen} \pi y} \right| dy \\
&\leq C + \int_{\eta}^{\delta} \left| \frac{\pi y}{\text{sen} \pi y} \right| dy \\
&\leq C + \frac{\pi \delta}{\text{sen} \pi \delta} (\delta - \eta) \leq C + 1,
\end{aligned}$$

ou seja, a integral  $\left| \int_0^{\delta} [f(x_0 + y) - f(x_0^+)] D_N(y) dy \right|$  converge a zero quando  $N \rightarrow \infty$ .

Finalmente vamos estimar a integral

$$\int_{\delta}^{\frac{1}{2}} [f(x_0 + y) - f(x_0^+)] D_N(y) dy.$$

Por simplicidade escrevemos  $g(y) = f(x_0 + y) - f(x_0^+)$ ,  $y \in (\delta, 1/2)$ . Como  $g$  é apenas uma translação de  $f$  temos que  $g$  também é integrável. Também observamos que a função  $\frac{1}{\text{sen} \pi x}$  atinge o máximo



em  $x = \delta$  no intervalo  $(\delta, 1/2)$ . Com esses fatos temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} [f(x_0 + y) - f(x_0^+)] D_N(y) dy \right| &= \left| \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} g(y) \frac{\text{sen}[(2N + 1)\pi x]}{\text{sen}(\pi x)} dy \right| \\ &\leq \frac{1}{\text{sen}(\pi \delta)} \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} g(y) \text{sen}(\pi x) dy \\ &\leq C \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} g(y) e^{(2N+1)\pi i x} dy \\ &\quad - C \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} g(y) e^{-(2N+1)\pi i x} dy \\ &= C[\hat{g}(-(2N + 1)) - \hat{g}(2N + 1)]. \end{aligned}$$

Assim, aplicando o Lema de Riemann Lebesgue obtemos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} [f(x_0 + y) - f(x_0^+)] D_N(y) dy \right| = 0.$$

Isso conclui a prova do teorema. □

## 2.3 Convergência no Sentido de Cesàro

Com o objetivo de recuperar uma função periódica  $f$  através de seus coeficientes de Fourier é conveniente dar outro sentido para a convergência das somas parciais  $S_N f$ . A seguir explicaremos a convergência no sentido de Cesàro, a qual é diferente da convergência no sentido usual.

**Definição 2.8.** Uma sequência  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  de números complexos é dita *convergente no sentido de Cesàro* para o número  $a$  se a sequência das médias aritméticas

$$c_n = \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n}$$

converge para  $a$  no sentido usual, ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ .

Não é difícil provar que se uma sequência  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  converge para  $a$  no sentido usual também converge no sentido de Cesàro para o mesmo valor  $a$ .

O contrário não é verdade. De fato, a sequência  $\{1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\}$  obviamente não converge, porém as médias aritméticas de seus termos convergem para  $1/2$ .

No exercício 8 o leitor encontrará mais informações sobre a soma de Cesàro, além de algumas generalizações.

### 2.3.1 Núcleos de Fejér

Estudaremos a seguir a convergência no sentido de Cesàro de  $S_N f(x)$ , portanto devemos considerar as médias

$$\sigma_N f(x) = \frac{S_0 f(x) + \dots + S_{N-1} f(x)}{N}.$$

Usando que  $S_n f(x) = f * D_n(x)$ , temos que

$$\begin{aligned} \sigma_N f(x) &= \frac{1}{N} \left( f * D_0(x) + \dots + f * D_{N-1}(x) \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^1 f(y) D_n(x-y) dy \\ &= \int_0^1 f(y) \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x-y) dy = f * F_N(x), \end{aligned} \tag{2.9}$$

onde  $F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x)$  é chamado de *Núcleo de Fejér*.

O próximo lema nos dá uma fórmula para  $F_N$  que será de muita utilidade.

**Lema 2.9.** *Dado  $N \in \mathbb{N}$  temos que*

$$F_N(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^2(N\pi x)}{N \operatorname{sen}^2(\pi x)} & \text{se } x \in [-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}], \\ N, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

*Demonstração.* Sabemos que  $D_n(x) = \frac{w^{-n} - w^{n+1}}{1 - w}$ , onde  $w = e^{2\pi i x}$ . Assim,

$$\begin{aligned} NF_N(x) &= \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) = \frac{1}{1-w} \sum_{n=0}^{N-1} (w^{-n} - w^{n+1}) \\ &= \frac{1}{1-w} \left( \frac{w^{-N} - 1}{w^{-1} - 1} - \frac{w^{N+1} - w}{w - 1} \right) \\ &= \frac{w^{-N} - 2 + w^N}{(w^{-1/2} - w^{1/2})^2} \\ &= \frac{(w^{-N/2} - w^{N/2})^2}{(w^{-1/2} - w^{1/2})^2} = \frac{\text{sen}^2(N\pi x)}{\text{sen}^2(\pi x)}, \end{aligned}$$

se  $x \in [-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}]$ . Para finalizar, notemos que

$$F_N(0) = \frac{1 + 3 + \dots + (2N - 1)}{N} = \frac{N^2}{N} = N.$$

□

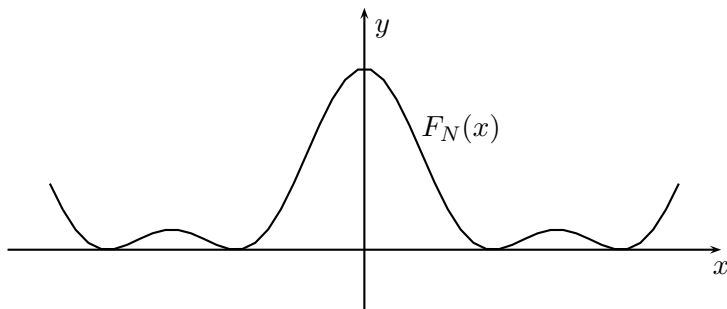


Figura 2.3: Núcleo de Fejér

Veremos agora que os Núcleos de Fejér formam uma identidade aproximada.

**Lema 2.10.** *A sequência  $\{F_N\}_{N \geq 0}$ , dos núcleos de Fejér, é uma identidade aproximada.*

*Demonstração.* Primeiro observamos que  $F_N \geq 0$  para todo  $N \geq 0$ . Além disso, por 2.8 obtemos que

$$\int_{-1/2}^{1/2} F_N(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{-1/2}^{1/2} D_n(x) dx = 1.$$

Por último, se  $0 < \delta < 1/2$  então para todo  $\delta \leq |x| \leq 1/2$  temos

$$0 < \int_{\delta \leq |x| \leq 1/2} F_N(x) dx \leq \int_{\delta \leq |x| \leq 1/2} \frac{dx}{N \operatorname{sen}^2(\pi \delta)} = \frac{1 - 2\delta}{N \operatorname{sen}^2(\pi \delta)} \longrightarrow 0,$$

quando  $N \rightarrow \infty$ , verificando-se assim as propriedades de identidade aproximada.  $\square$

### 2.3.2 O Teorema de Fejér

Usando o bom comportamento dos núcleos de Fejér obtemos o seguinte resultado importante.

**Teorema 2.11** (Teorema de Fejér). *Seja  $f \in R(\mathbb{T})$ , então*

- (a)  $S_N f(x_0)$  converge pontualmente, no sentido de Cesàro, para  $f(x_0)$  em todo ponto  $x_0$  de continuidade de  $f$ ;
- (b) se  $f \in C^0(\mathbb{T})$ , então  $S_N f(x)$  converge uniformemente, no sentido de Cesàro, para  $f(x)$ .

*Demonstração.* Como já vimos as médias de Cesàro de  $\{S_n f(x)\}_{n \geq 0}$  são dadas por  $\sigma_N f(x) = f * F_N(x)$ . Os resultados seguem combinando o Teorema 1.16 do Capítulo 1 com o fato de  $\{F_N\}_{N \geq 0}$  ser uma identidade aproximada.  $\square$

Como conseqüência do Teorema de Fejér temos a unicidade da série de Fourier.

**Corolário 2.12** (Unicidade da Série de Fourier). *Seja  $f \in R(\mathbb{T})$  tal que  $\hat{f}(n) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , então  $f(x) = 0$  em todo ponto  $x$  onde  $f$  é contínua. Em particular, se  $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , então  $f(x) = g(x)$  nos pontos  $x$  onde  $(f - g)$  é contínua.*

Uma outra consequência importante é dada no seguinte corolário.

**Corolário 2.13** (Aproximação de Weierstrass). *Se  $f \in C^0(\mathbb{T})$ , então  $f$  pode ser aproximada uniformemente por um polinômio trigonométrico. Isto é, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $p_N(x) = \sum_{|n| \leq N} a_n e^{2\pi i n x}$ ,  $a_n \in \mathbb{C}$ , tal que*

$$|f(x) - p_N(x)| \leq \epsilon \quad \text{para todo } x \in [-1/2, 1/2].$$

*Demonstração.* O resultado segue diretamente do item (b) do Teorema 2.11, uma vez que notemos que

$$\sigma_N f(x) = \frac{S_0 f(x) + \cdots + S_{N-1} f(x)}{N}$$

é um polinômio trigonométrico. □

**Observação 2.14.** O Corolário 2.13 é o análogo, no caso periódico, ao Teorema de aproximação de Weierstrass por polinômios para funções contínuas definidas em intervalos fechados.

## 2.4 A Transformada de Fourier Periódica

Consideremos o espaço vetorial

$$\ell_\infty(\mathbb{Z}) = \left\{ \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}; a_n \in \mathbb{C} \text{ e } \lim_{|n| \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \right\}.$$

**Definição 2.15.** A *Transformada de Fourier Periódica* é a aplicação  $F_p : R(\mathbb{T}) \longrightarrow \ell_\infty(\mathbb{Z})$ , definida por  $F_p(f) = \{\hat{f}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .

$F_p$  está bem definida devido à Proposição 2.4 e, além disso, é uma transformação linear (veja o exercício 1). Saber se  $F_p$  é um isomorfismo linear é muito importante, pois isto nos permitiria identificar o espaço vetorial  $R(\mathbb{T})$  com o espaço vetorial  $\ell_\infty(\mathbb{Z})$ . Porém, duas funções integráveis diferentes podem ter a mesma série de Fourier associada (veja o exercício 3), conseqüentemente  $F_p$  não é injetiva.

Por outro lado a restrição de  $F_p$  ao subespaço  $C^0(\mathbb{T})$  de  $R(\mathbb{T})$  é injetiva. Com efeito, suponhamos que  $F_p(f) = F_p(g)$  para  $f, g \in C^0(\mathbb{T})$ , isto significa que  $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ; como  $f$  e  $g$  são contínuas, temos pelo Teorema 2.11-(b) que  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in \mathbb{T}$ . No entanto, a imagem de  $C^0(\mathbb{T})$  por  $F_p$  não é  $\ell_\infty(\mathbb{Z})$ . De fato, no final do capítulo teremos condições de exibir exemplos de seqüências em  $\ell_\infty(\mathbb{Z})$  que não possuem pre-imagem em  $C^0(\mathbb{T})$  pela aplicação  $F_p$ .

## 2.5 Convergência Uniforme

A unicidade da série de Fourier (Corolário 2.12) nos rende um primeiro resultado sobre a convergência uniforme de  $S_N f(x)$ . O preço será assumir a convergência absoluta da série dos coeficientes, precisamente:

**Teorema 2.16.** *Seja  $f \in C^0(\mathbb{T})$  tal que a série  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)$  converge absolutamente. Então, a série de Fourier converge uniformemente para  $f$ .*

*Em outras palavras, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que*

$$|f(x) - S_N f(x)| < \varepsilon,$$

*para todo  $N \geq N_\varepsilon$  e todo  $x \in [0, 1]$ .*

*Demonstração.* Usando a igualdade  $|\hat{f}(n)e^{2\pi inx}| = |\hat{f}(n)|$  e a convergência da série  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|$  temos, pelo teste M de Weierstrass,

que

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

converge uniformemente para alguma função, a qual chamamos de  $g(x)$ , ou seja

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} = g(x). \quad (2.10)$$

Além disso,  $g$  é contínua visto que  $S_N f(x)$  é contínua para todo  $N$ . Resta provar que  $g$  é igual a  $f$ . Com efeito, integrando termo-a-termo a série em (2.10) concluímos que

$$\hat{g}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) \int_0^1 e^{2\pi i n x} e^{-2\pi i m x} dx = \hat{f}(m),$$

para todo  $m \in \mathbb{Z}$ . Assim, o resultado desejado decorre diretamente do Corolário 2.12.  $\square$

A Proposição 2.16 nos garante convergência uniforme da série

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}, \quad (2.11)$$

sempre que a série  $\sum |\hat{f}(n)|$  convergir. Portanto, é natural investigar o comportamento da sequência  $\{\hat{f}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  no infinito.

Nos próximos resultados utilizaremos mais uma vez as notações de  $O$  grande e  $o$  peneno vistas na seção 1.6

### 2.5.1 Propriedades de Decaimento

Como já vimos anteriormente, pela Proposição 2.4, se  $f$  for integrável, então  $\hat{f}(n) = o(1)$  no infinito. Nos perguntamos se a regularidade de  $f$  tem alguma influência no decaimento de seus coeficientes de

Fourier no infinito. Por exemplo, se supomos que  $f \in C^1(\mathbb{T})$ , usando integração por partes temos

$$\begin{aligned}\widehat{f}'(n) &= \int_0^1 f'(x)e^{-2\pi inx} dx \\ &= f(x)e^{-2\pi inx} \Big|_0^1 + 2\pi in \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx} dx \\ &= 2\pi in \widehat{f}(n).\end{aligned}\tag{2.12}$$

De forma indutiva, podemos provar uma propriedade mais geral relacionando os coeficientes de Fourier de  $f$  e  $f^{(\kappa)}$  para uma função  $f \in C^\kappa(\mathbb{T})$ , com  $\kappa \geq 1$ , a saber:

$$(2\pi in)^k \widehat{f}(n) = \widehat{f^{(k)}}(n).\tag{2.13}$$

Pelo Lema de Riemann-Lebesgue,  $\widehat{f^{(k)}}(n) \rightarrow 0$  quando  $|n| \rightarrow \infty$ , assim de (2.13) concluímos que

$$|\widehat{f}(n)| \leq o(1/|n|^k), \quad n \rightarrow \infty.\tag{2.14}$$

## 2.5.2 Critérios de Convergência Uniforme

O resultado a seguir resume algumas relações mais precisas entre a regularidade da função e o decaimento no infinito dos seus coeficientes de Fourier.

Aqui precisamos lembrar dois conceitos clássicos sobre regularidade.

**Definição 2.17.** Seja  $f \in F(\mathbb{T})$  uma função periódica qualquer.

- (a) Dizemos que  $f$  é *Lipschitz* (ou *Lipschitziana*) se existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|, \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{T};$$



- (b) Dizemos que  $f$  é de Hölder com expoente  $\alpha$  se existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{T}.$$

**Teorema 2.18.** *Seja  $f \in R(\mathbb{T})$ . As seguintes afirmações valem:*

- (a) *Se  $f \in C^\kappa(\mathbb{T})$  com  $\kappa \geq 1$ , então  $\hat{f}(n) = o(1/|n|^\kappa)$ ;*  
 (b) *Se  $f$  é Lipschitz, então  $\hat{f}(n) = O(1/|n|)$ ;*  
 (c) *Se  $f$  satisfaz a condição de Hölder com expoente  $\alpha \in (0, 1]$ , então  $\hat{f}(n) = O(1/|n|^\alpha)$ .*

*Demonstração.* A propriedade (a) já foi obtida em (2.14) e a propriedade (b) é consequência da propriedade (c) tomando  $\alpha = 1$ . Para provar (c) usamos a fórmula

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2} \int_0^1 (f(x) - f(x + \frac{1}{2n})) e^{-2\pi i n x} dx \quad (2.15)$$

que, combinada com a condição de Hölder para  $f$  nos dá

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |f(x) - f(x + \frac{1}{2n})| dx \leq \frac{1}{2^{\alpha+1} n^\alpha},$$

concluindo-se assim a prova do teorema. □

**Corolário 2.19.** *Se  $f \in C^\kappa(\mathbb{T})$ ,  $\kappa \geq 2$ , então*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} = f(x)$$

*e a convergência é uniforme.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.18 temos  $\sum_{n \neq 0} |\hat{f}(n)| \leq c \sum_{n \neq 0} 1/|n|^\kappa$ , sendo esta série convergente para  $\kappa \geq 2$ . Portanto, o resultado é consequência imediata do Teorema 2.16. □

## 2.6 Convergência em Média Quadrática

Nesta seção descreveremos o papel da sequência  $S_N f$  na geometria do espaço  $C^0(\mathbb{T})$  com o produto interno dado em (1.1).

### 2.6.1 Produto Interno no Toro Revisitado

Já vimos que a aplicação  $\langle \cdot, \cdot \rangle : C^0(\mathbb{T}) \times C^0(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{C}$ , definida em (1.1) por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

define um produto interno em  $C^0(\mathbb{T})$ .

Também já observamos que o produto interno em  $C^0(\mathbb{T})$  definido por (1.1) pode ser estendido às funções de  $R(\mathbb{T})$ , porém ele não é estritamente definido positivo. No entanto, isto não é um problema grave pois o conjunto das descontinuidades de tais funções tem medida nula (veja [13] pg. 287).

Agora, dada  $f \in C^0(\mathbb{T})$  definimos

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left( \int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

a qual chamamos de *norma quadrática* do espaço  $C^0(\mathbb{T})$ . Como já vimos no Capítulo 1, a norma quadrática possui as seguintes propriedades:

- é multiplicativa:  $\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2$  para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,
- é definida positiva:  $\|f\|_2 \geq 0$  e  $\|f\|_2 = 0 \Leftrightarrow f = 0$ ,
- satisfaz a desigualdade triangular:  $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$ .

Introduzimos a seguir a noção de convergência quadrática em  $R(\mathbb{T})$ .

**Definição 2.20.** Sejam  $f \in \mathbf{R}(\mathbb{T})$  e  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  uma sequência em  $\mathbf{R}(\mathbb{T})$ . Dizemos que  $f_n$  converge em *média quadrática* para  $f$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = 0.$$

O nosso objetivo nesta seção é mostrar que a convergência em média quadrática é a convergência adequada para

$$S_N f(x) = \sum_{|n| \leq N} \widehat{f}(n) \mathbf{e}_n(x).$$

Notemos que  $S_N f$  pertence ao espaço vetorial gerado pelas funções  $\{\mathbf{e}_{-N}, \dots, \mathbf{e}_{-1}, 1, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N\}$ , o qual denotaremos por  $\mathcal{V}_N$  e cuja dimensão é  $2N + 1$ .

### 2.6.2 Melhor Aproximação

Agora entenderemos melhor o papel das funções  $\mathbf{e}_k$ ,  $k \geq 1$  no espaço  $\mathbf{R}(\mathbb{T})$ .

**Lema 2.21.** *Sejam  $f \in \mathbf{R}(\mathbb{T})$  e  $N \in \mathbb{N}$ . Então, para todo  $v = \sum_{|n| \leq N} b_n \mathbf{e}_n \in \mathcal{V}_N$ , valem:*

$$(a) \langle f - S_N f, v \rangle = 0;$$

$$(b) \|f - v\|_2^2 = \|f - S_N f\|_2^2 + \sum_{|n| \leq N} |\widehat{f}(n) - b_n|^2.$$

*Demonstração.* Seja  $|m| \leq N$ , então

$$\begin{aligned} \langle f - S_N f, \mathbf{e}_m \rangle &= \langle f, \mathbf{e}_m \rangle - \sum_{|n| \leq N} \widehat{f}(n) \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle \\ &= \langle f, \mathbf{e}_m \rangle - \widehat{f}(m) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, se  $v = \sum_{|n| \leq N} b_n \mathbf{e}_n \in \mathcal{V}_N$  então

$$\langle f - S_N f, v \rangle = \sum_{|n| \leq N} \bar{b}_n \langle f - S_N f, \mathbf{e}_n \rangle = 0,$$

o que prova a validade de (a).

Fazendo uso (a) temos que  $\langle f - S_N f, S_N f - v \rangle = 0$ , logo

$$\begin{aligned} \|f - v\|_2^2 &= \|(f - S_N f) + (S_N f - v)\|_2^2 \\ &= \|f - S_N f\|_2^2 + \|S_N f - v\|_2^2 \\ &= \|f - S_N f\|_2^2 + \left\| \sum_{|n| \leq N} (\hat{f}(n) - b_n) \mathbf{e}_n \right\|_2^2 \\ &= \|f - S_N f\|_2^2 + \sum_{|n| \leq N} |\hat{f}(n) - b_n|^2. \end{aligned}$$

□

**Corolário 2.22** (Melhor Aproximação). *Sejam  $f \in R(\mathbb{T})$ ,  $N \in \mathbb{N}$  e  $v = \sum_{|n| \leq N} b_n \mathbf{e}_n \in \mathcal{V}_N$ . Então,*

$$\|f - S_N f\|_{L^2} \leq \|f - v\|_{L^2}. \quad (2.16)$$

*Demonstração.* A desigualdade (2.16) é consequência imediata do item (b) do Lemma 2.21, visto que  $\sum_{|n| \leq N} |\hat{f}(n) - b_n|^2 \geq 0$ . □

### 2.6.3 Identidade de Parseval

Provaremos a seguir a convergência em média quadrática da série de Fourier.

**Teorema 2.23.** *Se  $f \in R(\mathbb{T})$ , então  $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N f\|_2 = 0$ .*

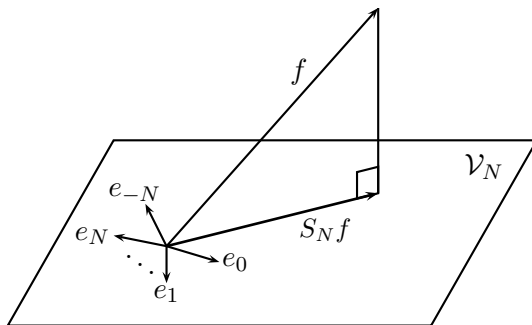


Figura 2.4:  $S_N f$  é a melhor aproximação de  $f$  no espaço  $\mathcal{V}_N$

*Demonstração.* Mais uma vez, utilizando o Teorema 1.12, faremos a prova em dois passos, o primeiro quando  $f$  é contínua e o segundo quando  $f$  é apenas integrável.

*Caso 1:*  $f \in C^0(\mathbb{T})$ . Neste caso, pelo Corolário 2.13 dado  $\varepsilon$  positivo existe um polinômio trigonométrico  $p_m(x)$ , de grau  $m$ , tal que

$$|f(x) - p_m(x)| < \varepsilon/2, \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (2.17)$$

Assim, de (2.17) temos

$$\begin{aligned} \|f - p_m\|_2 &= \left( \int_0^1 |f(x) - p_m(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \int_0^1 \frac{\varepsilon^2}{4} dx \right)^{1/2} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Usando agora o Corolário 2.22 obtemos

$$\|f - S_N f\|_2 \leq \|f - p_m\|_2 < \varepsilon/2, \quad \forall N \geq m, \quad (2.19)$$

o que prova o teorema quando  $f$  é contínua.

*Caso 2:*  $f \in R(\mathbb{T})$ . No Capítulo 1 provamos que dado  $\varepsilon$  positivo existe uma função  $g \in C^0(\mathbb{T})$  tal que

$$\sup_{x \in [0,1]} |g(x)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = A$$

e

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx < \frac{\varepsilon^2}{8A}.$$

Assim, tem-se

$$\begin{aligned} \|f - g\|_2 &= \left( \int_0^1 |f(x) - g(x)| |f(x) - g(x)| dx \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{2A} \left( \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Por outro lado, de (2.18) concluímos que existe um polinômio trigonométrico  $p_m(x)$ , de grau  $m$ , tal que

$$\|g - p_m\|_2 < \varepsilon/2. \tag{2.21}$$

Da desigualdade triangular obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \|f - p_m\|_{L^2} &\leq \|f - g\|_{L^2} + \|g - p_m\|_{L^2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Novamente fazendo uso do Corolário 2.22, temos que

$$\|f - S_N f\|_{L^2} \leq \|f - p_m\|_{L^2} \leq \varepsilon, \quad \forall N \geq m.$$

□

A convergência em média quadrática que acabamos de provar nos permite obter uma identidade muito útil.

**Teorema 2.24** (Identidade de Parseval). *Seja  $f \in R(\mathbb{T})$  uma função periódica e integrável. Então*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(n)|^2 = \|f\|_2^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 dx.$$

*Demonstração.* Do Lema 2.21-(b), tomando  $v = 0$ , temos que

$$\|f\|_2^2 = \|f - S_N f\|_2^2 + \sum_{n=-N}^N |\widehat{f}(n)|^2.$$

Passando ao limite, quando  $N \rightarrow \infty$ , obtemos o resultado desejado.  $\square$

Como consequência deste teorema temos uma identidade equivalente e que será usada em algumas aplicações.

**Corolário 2.25** (Identidade de Parseval Polarizada). *Seja  $f \in R(\mathbb{T})$  uma função periódica e integrável. Então*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{g}(n)} = \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx.$$

*Demonstração.* Basta utilizar a *identidade de polarização* para vetores que diz

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \left[ \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i \|u + iv\|^2 - i \|u - iv\|^2 \right].$$

$\square$

## 2.6.4 Retornando à Convergência Uniforme

Finalizamos este capítulo usando a convergência quadrática da série de Fourier para provar que podemos pedir menos regularidade da função  $f$ , que a assumida no Corolário 2.19, para garantir a convergência uniforme de sua série de Fourier.

**Teorema 2.26.** *Seja  $f \in C^1(\mathbb{T})$ , ou seja  $f$  é uma função periódica diferenciável e sua derivada é uma função contínua. Então, a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente.*

*Demonstração.* Basta provar que  $\sum_{|n| \geq 1} |\hat{f}(n)|$  converge absolutamente.

Inicialmente, pela propriedade 2.13,  $\hat{f}'(n) = 2\pi in\hat{f}(n)$ . donde

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi in} \hat{f}'(n), \quad n \neq 0.$$

Aplicando a desigualdade triangular e a desigualdade de Cauchy-Schartz para séries temos,

$$\begin{aligned} \sum_{|n| \geq 1} |\hat{f}(n)| &\leq \sum_{|n| \geq 1} \frac{1}{|2\pi in|} |\hat{f}'(n)| \\ &\leq \sqrt{\sum_{|n| \geq 1} \frac{1}{4\pi^2 n^2}} \sqrt{\sum_{|n| \geq 1} |\hat{f}'(n)|^2} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{\sum_{|n| \geq 1} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\int_0^1 |f'(x)|^2 dx}. \end{aligned}$$

O resultado segue do fato que a série é  $\sum_{|n| \geq 1} \frac{1}{n^2}$  e a integral  $\int_0^1 |f'(x)|^2 dx$  são convergentes.

□

**Observação 2.27.** É possível mostrar que se  $f$  é apenas derivável, então a sua Série de Fourier converge pontualmente. Veja [13]

**Observação 2.28.** Aproveitamos para finalizar lembrando a imagem da transformada de Fourier periódica, como anunciado anteriormente, não é  $\ell_\infty(\mathbb{Z})$ . De fato, tomando a sequência  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{|n|+1}} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$  não pode existir função contínua tal que  $\hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{|n|+1}}$ , pois pela identidade de Parseval teríamos

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|n|+1} = +\infty,$$

o que é uma contradição.



## 2.7 Exercícios

1. Mostre que se  $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$  então

$$(a) \widehat{(f+g)}(n) = \hat{f}(n) + \hat{g}(n);$$

$$(b) \widehat{(\lambda f)}(n) = \lambda \hat{f}(n).$$

2. Mostre que se  $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$  é uma função par, então  $\hat{f}(n) = 0$ , quando  $n$  é par diferente de zero.

3. Dê um exemplo de duas funções distintas em  $\mathcal{R}^1(\mathbb{T})$  com coeficientes de Fourier idênticos.

4. Prove que se  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$  satisfaz a condição de Hölder com  $\alpha > 1$ , então  $f$  é constante.

5. Uma sequência  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é dita *rapidamente decrescente* se para todo  $m \in \mathbb{N}$  existe uma constante positiva  $c_m$  tal que  $|a_n| \leq c_m/|n|^m$  para todo  $n \neq 0$ . Prove que, se  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$  então  $\{\hat{f}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é *rapidamente decrescente*. Reciprocamente, prove que se  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é *rapidamente decrescente*, então existe  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$  tal que  $a_n = \hat{f}(n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

6. Defina os números de Lebesgue  $L_N = \int_{-1/2}^{1/2} |D_N(x)| dx$ .

(a) Prove que

$$\begin{aligned} L_N &= 2 \int_0^{1/2} \left| \frac{\text{sen } (2N+1)\pi x}{\pi x} \right| dx + O(1) \\ &= 2 \int_0^{N+1/2} \left| \frac{\text{sen } \pi t}{\pi t} \right| dt + O(1). \end{aligned}$$

(b) Use (a) para provar que

$$L_N = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 \frac{|\text{sen } \pi t|}{1+k} dt + O(1).$$

- (c) Use (b) para concluir que  $L_N = \frac{4}{\pi^2} \ln(N) + O(1)$ .
7. Prove que se uma série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge para  $s$  no sentido usual, então também converge para  $s$  no sentido Cesàro.
8. (Somadas de Cesàro Generalizadas)
- (a) Mostre que se  $\sum_{i=0}^{\infty} a_n$  converge no sentido de Cesàro para  $S$ , então ela também converge para  $S$  no sentido usual. Mais especificamente, pondo  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , mostre que se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n} = S,$$

então  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$ .

- (b) Mostre que a série  $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  não é convergente no sentido usual, mas converge no sentido de Cesàro;
- (c) Mostre a série  $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^n n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$  não é convergente no sentido de Cesàro;
- (d) Dizemos que uma série  $\sum_{i=0}^{\infty} a_n$  é convergente para  $S$  no sentido  $(H, 2)$  se a sequência das médias das somas parciais  $s_1, s_2, \dots + s_n$  converge no sentido de Cesàro, ou seja, se

$$c_n = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n},$$

então a sequência  $d_n = \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n}$  converge.

Mostre que a série  $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^n n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$  converge para  $1/4$  no sentido  $(H, 2)$ .

- (e) Por convenção dizemos que uma série converge no sentido  $(H, 0)$  se ela converge no sentido usual e que converge no sentido  $(H, 1)$ , se converge no sentido de Cesàro.

Indutivamente, dizemos que uma série  $\sum_{i=0}^{\infty} a_n$  é *converge para  $S$  no sentido  $(H, k)$*  se a sequência de suas somas parciais converge para  $S$  no sentido  $(H, k - 1)$ ,  $k \geq 1$ . Esta notação é feita em homenagem a *Otto Hölder* que deu grandes contribuições a teoria das *séries divergentes*. Mostre que se  $\sum_{i=0}^n a_n$  converge para  $S$  no sentido  $(H, k)$ , então também converge para  $S$  no sentido  $(H, j)$  para todo  $1 \leq j \leq k$ .

9. Mostre a propriedade 2.13.
10. Mostre que se  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função real tal que a sua série de Fourier converge, então que  $\hat{f}(n) = \overline{\hat{f}(-n)}$ .
11. Prove que não existe nenhuma função  $f \in C^0(\mathbb{T})$  tal que

$$\{\hat{f}(n)\} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n \log n}}, & n \geq 1, \\ 0, & n \leq 0. \end{cases}$$



## Capítulo 3

# A Transformada de Fourier na Reta

No capítulo anterior provamos que toda função periódica contínua pode ser escrita como soma de *ondas* periódicas simples desde que seja tomada a convergência adequada. Neste capítulo provaremos que resultados similares valem para funções contínuas na reta que não são periódicas, dando a série Fourier lugar à transformada de Fourier.

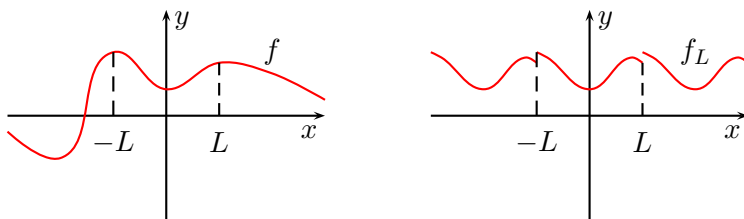
Desenvolveremos a teoria básica da transformada de Fourier no espaço  $\mathbb{R}^1(\mathbb{R})$  das funções absolutamente Riemann integráveis na reta e dedicamos uma seção ao estudo da transformada no espaço de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  das funções de decrescimento rápido, onde a transformada tem um comportamento simétrico. Em seguida, desenvolveremos a teoria básica no espaço  $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$  das funções de quadrado integráveis, segundo Riemann, na reta, onde o principal resultado é o teorema de Plancherel. Finalizamos o capítulo provando a Fórmula da Soma de Poisson, a qual resulta da combinação das teorias desenvolvidas para a série e a transformada de Fourier.

### 3.1 Da Série de Fourier à Transformada de Fourier

A seguir motivaremos a definição de transformada de Fourier como um limite da série de Fourier.

Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e absolutamente integrável na reta e  $L$  um número real positivo. Denotemos por  $f_L$  a extensão  $2L$ -periódica da restrição de  $f$  ao intervalo  $[-L, L]$ . Além disso, observamos que, pontualmente,

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow +\infty} f_L(x).$$



A série de Fourier de  $f_L$  é dada por

$$f_L(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}_L(n) e^{\frac{n\pi}{L}ix} dx,$$

com

$$\widehat{f}_L(n) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{n\pi}{L}ix} dx.$$

Pondo  $\xi_n = n/2L$  e definindo a função  $g$  por

$$g(\xi) = \int_{-L}^L f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx, \quad (3.1)$$

podemos escrever a série de  $f_L$  como segue

$$f_L(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi\xi_n ix} g(\xi_n) \frac{1}{2L}. \quad (3.2)$$

Como  $\Delta\xi_n = \xi_{n+1} - \xi_n = 1/2L$ , a soma (3.2) pode ser interpretada como uma soma de Riemann em  $\mathbb{R}$  da função  $g(\xi)e^{2\pi ix\xi}$ . Assim, passando formalmente o limite quando  $L \rightarrow +\infty$  (conseqüentemente  $\Delta\xi_n \rightarrow 0$ ) em (3.1) e (3.2) obtemos as expressões

$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \quad (3.3)$$

e

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} f_L(x) = f(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi. \quad (3.4)$$

Nas próximas seções veremos que definindo rigorosamente a transformada de Fourier mediante a fórmula (3.3) teremos uma teoria bem fundamentada. Além disso, provaremos que poderemos recuperar a função  $f$  através da fórmula de inversão da transformada de Fourier, a qual será dada pela expressão em (3.4).

## 3.2 Convergência Dominada

Antes de definir a Transformada de Fourier na reta provaremos um resultado de convergência para seqüências de funções contínuas na reta, o qual será muito útil no decorrer do capítulo.

**Definição 3.1.** Dizemos que uma seqüência  $\{f_n\}$  de funções contínuas, definidas na reta, *converge localmente uniformemente* para uma função  $f$  se para todo ponto  $x \in \mathbb{R}$  existe um  $\delta_x > 0$  tal que  $\{f_n\}$  converge uniformemente para  $f$  no intervalo  $[x - \delta_x, x + \delta_x]$ .

**Observação 3.2.** Como proposto no exercício 2, o conceito de *convergência uniforme local* é equivalente a provar que a sequência  $\{f_n\}$  converge uniformemente para a função  $f$  em qualquer intervalo fechado  $[a, b]$  da reta.

**Teorema 3.3** (Convergência Dominada). *Seja  $\{f_n\}$  uma sequência de funções contínuas, definidas na reta, que converge localmente uniformemente para uma função  $f$ . Suponha existe uma função real não-negativa  $g(x)$ , definida na reta, tal que  $|f_n(x)| \leq g(x)$ , para todos  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in \mathbb{R}$ , e, além disso, satisfazendo  $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx < \infty$ . Então, as integrais  $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx$  e  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  existem e vale a igualdade*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

*Demonstração.* Dado  $n \in \mathbb{N}$ , para todo  $a > 0$  temos que

$$\int_{-a}^a |f_n(x)|dx \leq \int_{-a}^a g(x)dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx < \infty.$$

Logo, a integral  $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx$  existe. Além disso, como a sequência  $\{f_n\}$  converge uniformemente para  $f$  no intervalo  $[-a, a]$  para todo  $a > 0$ , temos que

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a |f(x)|dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a |f_n(x)|dx \\ &\leq \int_{-a}^a g(x)dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx < \infty, \end{aligned}$$

o que verifica a existência da integral  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ .

Pondo  $g_n = f_n - f$  só nos resta provar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)dx = 0$ . Com efeito, da convergência da integral  $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$ , segue-se que para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $a > 0$  tal que

$$\int_{-a}^a g(x)dx < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (3.5)$$



Por outro lado, como  $g_n$  converge uniformemente para zero no intervalo  $[-a, a]$ , existe um  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $n \geq n_0$

$$\int_{-a}^a |g_n(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.6)$$

Portanto, combinando (3.5) e (3.6), para todo  $n \geq n_0$  temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |g_n(x)| dx &= \int_{-a}^a |g_n(x)| dx + \int_{|x|>a} |g_n(x)| dx \\ &\leq \int_{-a}^a |g_n(x)| dx + \int_{|x|>a} 2g(x) dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

concluindo-se com isto a prova do teorema. □

### 3.3 Definição de Transformada de Fourier

Denotamos por  $R^1(\mathbb{R})$  o conjunto das funções limitadas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  que satisfazem

$$\|f\|_1 := \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty.$$

Além disso, definimos  $R_c^1(\mathbb{R}) := R^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ .

Não é difícil de verificar que a aplicação

$$\|\cdot\|_1 : R_c^1(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty)$$

satisfaz as propriedades de norma, ou seja, para quaisquer  $f, g \in R_c^1(\mathbb{R})$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$  valem:

- $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1$ ,
- $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$ ,

$$\bullet \|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

A última destas três propriedades é a desigualdade triangular e nos garante que se  $f$  e  $g$  estão no espaço  $\mathcal{R}_c^1(\mathbb{R})$ , então a soma delas também está em  $\mathcal{R}_c^1(\mathbb{R})$ .

**Definição 3.4** (Transformada de Fourier). Seja  $f \in \mathcal{R}^1(\mathbb{R})$ . A *Transformada de Fourier* de  $f$  é a função definida por

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x} dx,$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 3.5.** Seja  $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$ , isto é:

$$\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]. \end{cases}$$

Então, para todo  $\xi \neq 0$  temos que

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_{[-1,1]}(\xi) &= \int_{-1}^1 e^{-2\pi i\xi x} dx = \left[ \frac{e^{-2\pi i\xi x}}{-2\pi i\xi} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{e^{2\pi i\xi} - e^{-2\pi i\xi}}{2\pi i\xi} = \frac{\text{sen}(2\pi\xi)}{\pi\xi} \end{aligned}$$

e para  $\xi = 0$  temos  $\hat{\chi}_{[-1,1]}(0) = 2$ .

Resumindo,

$$\hat{\chi}_{[-1,1]}(\xi) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(2\pi\xi)}{\pi\xi}, & \text{se } \xi \neq 0, \\ 2, & \text{se } \xi = 0. \end{cases}$$

No exemplo acima podemos constatar que  $\hat{\chi}_{[-1,1]}(\xi)$  é contínua e, além disso,  $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \hat{\chi}_{[-1,1]}(\xi) = 0$ . De fato, o resultado a seguir nos garante que estas propriedades sempre serão satisfeitas pela transformada  $\hat{f}(\xi)$  de qualquer função  $f \in \mathcal{R}^1(\mathbb{R})$ , inclusive, mais do que a continuidade da transformada teremos a continuidade uniforme da mesma.

**Proposição 3.6.** *Seja  $f \in R^1(\mathbb{R})$ . Então,*

- (a)  $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$  para todo  $\xi \in \mathbb{R}$ ;
- (b)  $\hat{f}$  é uniformemente contínua;
- (c)  $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$  (Lema de Riemann-Lebesgue).

*Demonstração.* A afirmação (a) segue diretamente da definição da transformada. Para provar (b), dado  $\varepsilon > 0$ , é preciso mostrar que existe  $\delta > 0$  tal que

$$|\xi'| < \delta \implies |\hat{f}(\xi + \xi') - \hat{f}(\xi)| < \varepsilon, \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi + \xi') - \hat{f}(\xi)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| |e^{2\pi i(\xi + \xi')x} - e^{2\pi i\xi x}| dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| |e^{2\pi i\xi'x} - 1| dx. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Por outro lado, como  $|f|$  é integrável, existe  $a > 0$  tal que

$$\int_{|x| > a} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{3.8}$$

Pela continuidade da função  $e^{2\pi i\eta} - 1$  no ponto  $\eta = 0$ , podemos tomar  $\delta' > 0$  tal que

$$|\eta| < \delta' \implies |e^{2\pi i\eta} - 1| < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_1}. \tag{3.9}$$

Agora tomamos  $\delta = \delta'/a$  e observamos que,

$$|\xi'| < \delta \implies |\xi'x| < \delta', \quad \text{sempre que } |x| \leq a. \tag{3.10}$$

Logo, para todo  $|\xi'| < \delta$ , de (3.7) obtemos

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi + \xi') - \hat{f}(\xi)| &\leq 2 \int_{|x|>a} |f(x)| dx \\ &\quad + \int_{|x|\leq a} |f(x)| |e^{2\pi i \xi' x} - 1| dx \quad (3.11) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

onde usamos (3.8), (3.9) e (3.10) para estimar as duas últimas integrais.

Procedemos agora com a prova de (c). Primeiro suponhamos que  $f \in \mathcal{R}_c^1(\mathbb{R})$  e observemos que para todo  $\xi \neq 0$  vale

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi \left(x + \frac{1}{2\xi}\right)} dx \quad (3.12) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x - \frac{1}{2\xi}\right) e^{-2\pi i \xi x} dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ f(x) - f\left(x - \frac{1}{2\xi}\right) \right] e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

Para toda sequência  $\xi_n \rightarrow \infty$ , usando a continuidade de  $f$  tem-se que  $f_n(x) := \left[ f(x) - f\left(x - \frac{1}{2\xi_n}\right) \right] e^{-2\pi i \xi_n x}$  converge uniformemente para zero em qualquer intervalo fechado  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ . Assim, fazendo uso do teorema de convergência dominada, temos que  $\lim_{|\xi_n| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi_n) = 0$  para toda sequência  $\xi_n \rightarrow \infty$ , de onde se segue o resultado para funções em  $\mathcal{R}_c^1(\mathbb{R})$ . Para funções em  $\mathcal{R}^1(\mathbb{R})$  a prova é similar ao caso do Lema de Riemann Lebesgue para funções periódicas. □

### 3.4 Propriedades da Transformada de Fourier

Nesta seção apresentamos algumas das principais propriedades da transformada de Fourier.

**Teorema 3.7.** *Seja  $R_c^1(\mathbb{R})$ . Então, valem as seguintes propriedades:*

- (a) *Se  $g(x) = f(x + a)$ , então  $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{2\pi ia\xi}$ ;*
- (b) *Se  $g(x) = f(x)e^{2\pi iax}$ , então  $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi - a)$ ;*
- (c) *Se  $g(x) = \frac{1}{\lambda}f(\frac{x}{\lambda})$ , então  $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\lambda\xi)$ ;*
- (d) *Se  $f \in C^1(\mathbb{R})$  e  $f' \in R_c^1(\mathbb{R})$ , então  $\widehat{f}'(\xi) = 2\pi i\xi\widehat{f}(\xi)$ ;*
- (e) *Se  $g(x) = -2\pi ix f(x) \in R_c^1(\mathbb{R})$ , então  $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R})$  e vale a relação  $\widehat{f}'(\xi) = \widehat{g}(\xi)$ .*

*Demonstração.* As propriedades (a), (b) e (c) seguem diretamente da definição e das propriedades de integração. Para provarmos (d) lembramos que, pela integrabilidade de  $|f|$ , existem seqüências  $a_n$  e  $b_n$  tais que  $f(a_n) \rightarrow 0$  e  $f(b_n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Assim, integrando por partes temos

$$\begin{aligned}\widehat{f}'(\xi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f'(x)e^{-2\pi i\xi x} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ f(x)e^{-2\pi i\xi x} \right]_{\xi=a_n}^{\xi=b_n} + 2\pi i\xi \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)e^{-2\pi i\xi x} dx \\ &= 2\pi i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x} dx = 2\pi i\xi\widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$

Por último, para provarmos (e) observamos que

$$\frac{\widehat{f}(\xi + h) - \widehat{f}(\xi)}{h} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i(\xi-h)x} \frac{e^{-2\pi ihx} - 1}{h} dx. \quad (3.13)$$

Agora definimos

$$f_h(x) := f(x)e^{-2\pi i(\xi-h)x} \frac{e^{-2\pi i h x} - 1}{h}$$

e aplicando o Teorema do Valor Médio vemos que  $f_h$  satisfaz

$$|f_h(x)| \leq 2\pi |x f(x)| \in \mathbf{R}_c^1(\mathbb{R}) \quad \text{para todo } h \neq 0.$$

Além disso,

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h(x) = f(x)e^{-2\pi i \xi x} (-2\pi i x)$$

localmente uniforme em  $x$ . Passando o limite quando  $h \rightarrow 0$  em (3.13) o resultado desejado segue do teorema da convergência dominada.  $\square$

Provaremos a seguir que faz sentido calcular a transformada de Fourier da convolução de duas funções em  $\mathbf{R}^1(\mathbb{R})$ , dado que a convolução é uma operação interna nesse espaço. Além disso, estabeleceremos a conexão existente entre as transformadas de  $f$ ,  $g$  e  $f * g$ .

**Teorema 3.8** (Teorema da Convolução). *Sejam  $f, g \in \mathbf{R}^1(\mathbb{R})$ . Então*

$$(a) \quad f * g \in \mathbf{R}^1(\mathbb{R}) \text{ e vale } \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1;$$

$$(b) \quad \widehat{(f * g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi).$$

*Demonstração.* Usando a desigualdade triangular,

$$|(f * g)(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)g(y)| dy.$$

Logo, aplicando o teorema o Teorema de Fubini e a mudança de variável  $x \rightarrow y + z$ , obtemos

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)g(y)| dy \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)| dx \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)| dz \right) dy \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1, \end{aligned}$$

o que nos dá o resultado enunciado em (a). Para provarmos (b) aplicamos novamente o Teorema de Fubini e a mudança de variável  $x \rightarrow y + z$  para obtermos

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g)}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi x} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi x} f(x-y)dx \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi y} g(y) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi z} f(z)dz \right) dy \\ &= \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi), \end{aligned}$$

como esperávamos. □

### 3.5 Fórmula de Inversão

Embora, pelo Lema de Riemann-Lebesgue,  $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$  para toda  $f \in R^1(\mathbb{R})$ , isto não quer dizer que  $\widehat{f}$  pertença ao espaço  $R^1(\mathbb{R})$  dado que o decaimento de  $\widehat{f}(\xi)$  pode não ser suficiente para a convergência da integral. Por exemplo, a função  $f(x)$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

está no espaço  $R^1(\mathbb{R})$ , porém sua transformada de Fourier é a função  $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{1+2\pi i \xi}$ , cuja norma  $\|\widehat{f}\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{4\pi^2 \xi^2 + 1}}$  não é finita.

Uma pergunta natural é a seguinte: *Em que condições podemos recuperar  $f$  a partir de sua transformada  $\widehat{f}$ ?*

A fórmula natural para inverter a transformada de Fourier, como visto na motivação ao início do capítulo, é

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

Portanto, supondo que  $\widehat{f} \in \mathcal{R}^1(\mathbb{R})$  a fórmula faz sentido. De fato, provaremos que assumindo esta hipótese podemos de fato recuperar a função  $f$  através de sua transformada.

O seguinte resultado será fundamental em nossa tarefa.

**Lema 3.9.** *Seja  $\phi(x) = e^{-\pi x^2}$ . Então,*

$$(a) \quad \{\phi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} = \{n\phi(nx)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ é uma identidade aproximada;}$$

$$(b) \quad \widehat{\phi}(\xi) = \phi(\xi).$$

*Demonstração.* A afirmação em (a) é imediata visto que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ne^{-\pi n^2 x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1,$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Para provarmos (b) observamos que  $\phi$  satisfaz a seguinte equação diferencial ordinária

$$\phi'(x) = -2\pi x\phi(x). \quad (3.14)$$

Definindo  $u(x) = \phi(x)e^{\pi x^2}$  temos que

$$u'(x) = (\phi'(x) + 2\pi x\phi(x))e^{\pi x^2} = 0,$$

de onde concluímos que  $u(x) = c \Leftrightarrow \phi(x) = ce^{-\pi x^2}$ , com  $c \in \mathbb{R}$ , são as únicas soluções da equação (3.14). Por outro lado, de acordo com as propriedades (e) do Teorema 3.7, temos

$$\begin{aligned} (\widehat{\phi})'(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi ix)e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i\xi x} dx \\ &= i \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-\pi x^2})' e^{-2\pi i\xi x} dx \\ &= -2\pi \xi \widehat{\phi}(\xi), \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde na última igualdade usamos integração por partes.

Logo,  $\widehat{\phi}$  também satisfaz a equação diferencial (3.14) e conseqüentemente  $\widehat{\phi}(\xi) = ce^{-\pi \xi^2}$  para alguma constante real  $c$ . Como  $\widehat{\phi}(0) = 1$ , então  $c = 1$  e assim  $\widehat{\phi}(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$ .  $\square$



**Lema 3.10.** *Seja  $f \in \mathcal{R}_c^1(\mathbb{R})$ . Então,*

$$(f * \phi_n)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi y^2/n^2} \widehat{f}(y) e^{2\pi ixy} dy,$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Combinando o Lema 3.9 com a propriedade (c) do Teorema 3.7 vale que

$$\widehat{\phi\left(\frac{\cdot}{n}\right)}(\xi) = n\widehat{\phi}(n\xi) = n\phi(n\xi) = \phi_n(\xi).$$

Então, aplicando esta relação chegamos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} (f * \phi_n)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \phi_n(x-t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \widehat{\phi\left(\frac{\cdot}{n}\right)}(x-t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \phi\left(\frac{y}{n}\right) e^{-2\pi i(x-t)y} dy \right) dt. \end{aligned}$$

Ora, usando a paridade de  $\phi$  e o Teorema de Fubini obtemos

$$\begin{aligned} (f * \phi_n)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \phi\left(\frac{y}{n}\right) e^{2\pi i(x-t)y} dy \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi\left(\frac{y}{n}\right) e^{2\pi ixy} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi iyt} dt \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi y^2/n^2} \widehat{f}(y) e^{2\pi ixy} dy, \end{aligned}$$

concluindo-se assim prova do resultado. □

Finalmente, estamos em condições de provar a *fórmula de inversão* da transformada de Fourier.

**Teorema 3.11** (Fórmula de Inversão). *Seja  $f \in \mathcal{R}_c^1(\mathbb{R})$  tal que a transformada  $\widehat{f} \in \mathcal{R}_c^1(\mathbb{R})$ . Então, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , tem-se*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) e^{2\pi ixy} dy.$$

Além disso, vale a relação  $\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x)$ .

*Demonstração.* Pelo Lema (3.10), para todo  $n \in \mathbb{N}$  temos

$$(f * \phi_n)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\pi y)/n^2} \widehat{f}(y) e^{2\pi ixy} dy.$$

Passando o limite, quando  $n \rightarrow \infty$ , o lado esquerdo da igualdade acima tende para  $f(x)$ , por se  $\phi_n$  uma identidade aproximada, e o lado direito tende para  $\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) e^{2\pi ixy} dy$ , fazendo uso do teorema da convergência dominada. Assim, para todo  $x \in \mathbb{R}$  tem-se

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f * \phi_n)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi y^2/n^2} \widehat{f}(y) e^{2\pi ixy} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) e^{2\pi ixy} dy. \end{aligned}$$

De onde, segue diretamente relação

$$f(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) e^{-2\pi ixy} dy = \widehat{\widehat{f}}(x),$$

finalizando-se a prova do teorema. □

Seja  $\mathcal{R}_c^1(\widehat{\mathbb{R}})$  o subespaço vetorial de  $\mathcal{R}_c^1(\mathbb{R})$  formado por todas as funções de  $\mathcal{R}_c^1(\mathbb{R})$  tais que  $\widehat{f} \in \mathcal{R}_c^1(\mathbb{R})$ . Denotamos por  $F_c$  o operador transformada de Fourier definido em  $\mathcal{R}_c^1(\widehat{\mathbb{R}})$ , ou seja:

$$F_c : \mathcal{R}_c^1(\widehat{\mathbb{R}}) \longrightarrow \mathcal{R}_c^1(\widehat{\mathbb{R}}),$$

dado por  $F_c(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi)$ , o qual está bem definido dado que para toda  $f \in \mathcal{R}_c^1(\widehat{\mathbb{R}})$  temos

$$\widehat{f}(x) \in \mathcal{R}_c^1(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x) \in \mathcal{R}_c^1(\mathbb{R}).$$

**Corolário 3.12.** *Seja  $f \in \mathcal{R}_c^1(\widehat{\mathbb{R}})$ . Então,*

$$F_c^4(f) = F_c \circ F_c \circ F_c \circ F_c(f) = f.$$

**Exemplo 3.13.** A transformada inversa da função  $g(\xi) = e^{-a|\xi|}$  com  $a > 0$  é a função

$$P_a(x) = \frac{2a}{4\pi^2 x^2 + a^2}.$$

Com efeito, pela fórmula de inversão

$$\begin{aligned} P_a(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|\xi|} e^{2\pi i x \xi} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{a\xi} e^{2\pi i x \xi} d\xi + \int_0^{\infty} e^{-a\xi} e^{2\pi i x \xi} d\xi \\ &= \left[ \frac{e^{a\xi} e^{2\pi i x \xi}}{2\pi i x + a} \right]_{\xi=-\infty}^{\xi=0} + \left[ \frac{e^{-a\xi} e^{2\pi i x \xi}}{2\pi i x - a} \right]_{\xi=0}^{\xi=+\infty} \\ &= \frac{1}{2\pi i x + a} - \frac{1}{2\pi i x - a} = \frac{2a}{4\pi^2 x^2 + a^2}. \end{aligned}$$

O espaço  $\mathcal{R}_c^1(\widehat{\mathbb{R}})$  nos permite resolver o problema da inversão da transformada de Fourier, porém não temos uma descrição muito clara dos seus elementos. Na próxima seção apresentaremos um subespaço de  $\mathcal{R}_c^1(\widehat{\mathbb{R}})$  de funções muito bem comportadas no infinito onde toda a teoria feita até agora se adapta de maneira muito simétrica.

### 3.6 A Transformada de Fourier no Espaço de Schwartz

Consideremos o seguinte espaço de funções que decrescem rapidamente no infinito:

**Definição 3.14** (Espaço de Schwartz). O espaço de *Schwartz*, denotado por  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , é constituído pelas funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  infinitamente diferenciáveis tais que

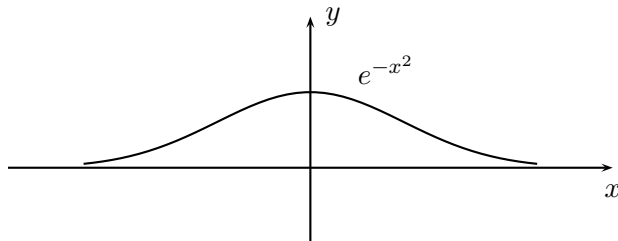
$$\sigma_{m,n}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m f^{(n)}(x)| < \infty, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

O espaço  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  contém o espaço  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  das funções infinitamente diferenciáveis de suporte compacto na reta, isto é,  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  e existe  $a > 0$  tal que  $f \equiv 0$ , para todo  $|x| \geq a$ . De fato se  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\sigma_{m,n}(f) = \sup_{|x| \leq a} |x^m f^{(n)}(x)| < \infty,$$

visto que as funções contínuas  $f_{m,n}(x) = |x^m f^{(n)}(x)|$  definidas no intervalo fechado  $[-a, a]$  são limitadas e atingem seu máximo pelo teorema de Weierstrass.

Um exemplo clássico de função em  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , que não está em  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ , é a função gaussiana  $f(x) = e^{-x^2}$ , verificação que deixamos a cargo do leitor.



**Lema 3.15.** O espaço  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  é um subespaço vetorial de  $R_c^1(\mathbb{R})$ . Precisamente, valem as seguintes afirmações:

(a)  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset R_c^1(\mathbb{R})$ ,

(b) Sejam  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Então,  $f + g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  e  $\lambda f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

*Demonstração.* Para provar (a), basta observar que se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , tomando a constante positiva  $C = \sigma_{0,0}(f) + \sigma_{2,0}(f)$  temos que

$$|f(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}.$$

Assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \leq C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi.$$

Deixamos a propriedade (b) como exercício.  $\square$

**Teorema 3.16.** *Seja  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Então  $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  e, além disso, a transformada de Fourier restrita a  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,*

$$F_c : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

*é uma bijeção.*

*Demonstração.* Notamos que se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  então  $(-2\pi ix)^n f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Aplicamos agora sucessivamente as propriedades (d) e (e) do Teorema 3.7 para obtermos, respectivamente,

$$\widehat{f^{(m)}}(\xi) = (2\pi i \xi)^m \widehat{f}(\xi)$$

e

$$\widehat{f^{(n)}}(\xi) = [(-2\pi ix)^n f]^\widehat{(\xi)},$$

para quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}_0$ . Conseqüentemente, para quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}_0$  temos que

$$\begin{aligned} \xi^m \widehat{f^{(n)}}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi i)^m} (2\pi i \xi)^m [(-2\pi ix)^n f]^\widehat{(\xi)} \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^m} \left[ ((-2\pi ix)^n f)^{(m)} \right]^\widehat{(\xi)}. \end{aligned}$$

Usando a regra de Leibniz para derivação de produto de funções temos que  $g(x) = ((-2\pi ix)^n f)^{(m)}(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{R}_c^1(\mathbb{R})$ . Logo,  $\xi^m \widehat{f^{(n)}}(\xi)$  é limitada, mostrando isto que  $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

O fato de  $F_c$  ser uma bijeção em  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  é conseqüência imediata da fórmula de inversão.  $\square$

### 3.7 Teorema de Plancherel

O teorema de Plancherel para transformada de Fourier é o equivalente da identidade de Parseval para a série de Fourier.

Seja  $R_c^2(\mathbb{R})$  o espaço das funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  contínuas e limitadas tais que

$$\|f\|_2 := \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx \right)^{1/2} < +\infty,$$

também conhecido como espaço das funções *quadrado integráveis* na reta. Similar ao caso periódico, esta norma provém do produto interno em  $R_c^2(\mathbb{R})$ , definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Uma observação interessante é que no caso periódico, qualquer função quadrado integrável no toro é também absolutamente integrável. De fato, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz se  $f$  é de quadrado integrável

$$\int_0^1 |f(x)| dx \leq \sqrt{\int_0^1 1 dx} \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx} = \|f\|_2 < \infty.$$

Além disso, como estamos trabalhando com funções limitadas, a recíproca também vale, ou seja, toda função periódica absolutamente integrável é também quadrado integrável pois

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leq \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \int_0^1 |f(x)| dx < \infty.$$

No caso da reta, também temos que  $R_c^1(\mathbb{R}) \subset R_c^2(\mathbb{R})$ . Entretanto, o fato de estarmos trabalhando com um domínio infinito de integração no nos garante a inclusão contrária. Por exemplo, a função

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1}e^x, & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

está em  $\mathcal{R}_c^2(\mathbb{R})$ , porém não pertence a  $\mathcal{R}_c^1(\mathbb{R})$ . Para isto, basta observar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx \geq \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{\infty} = \infty.$$

Agora enunciamos e provamos o Teorema de Plancherel que nos garante que a norma quadrática é invariante pela transformada de Fourier.

**Teorema 3.17.** *Para toda  $f \in \mathcal{R}_c^1(\mathbb{R})$  temos que  $\widehat{f}(\xi) \in \mathcal{R}_c^2(\mathbb{R})$ . Além disso, vale a igualdade*

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2.$$

*Demonstração.* Definimos

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(y-x)} f(y) dy.$$

Portanto,  $g(0) = \|f\|_2^2$ . Por outro lado, pelo Lema 3.10, temos que

$$g(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (g * \phi_n)(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi y^2/n^2} \widehat{g}(y) dy.$$

Logo, usando que  $\widehat{g}(y) = |\widehat{f}(y)|^2$ , temos

$$\|f\|_2^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi y^2/n^2} |\widehat{f}(y)|^2 dy.$$

Observamos que, se  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(y)|^2 dy < \infty$  então o resultado segue do teorema da convergência dominada. Supondo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(y)|^2 dy = \infty,$$

chegaremos a uma contradição e o teorema estará provado. Com efeito, nesse último caso, existe  $a > 0$  tal que

$$\int_{-a}^a |\widehat{f}(y)|^2 dy > 2\|f\|_2^2.$$

Logo, pela convergência uniforme local de  $f_n(y) = e^{-\pi y^2/n^2} |\widehat{f}(y)|^2$  para  $|\widehat{f}(y)|^2$  quando  $n \rightarrow \infty$  e o fato de  $f_n$  ser monótona crescente ( $f_{n+1}(y) \geq f_n(y)$ ), existe algum  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi y^2/n^2} |\widehat{f}(y)|^2 dy \geq \int_{-a}^a e^{-\pi y^2/n^2} |\widehat{f}(y)|^2 dy > 2\|f\|_2^2,$$

para todo  $n \geq n_0$ , o que é impossível.  $\square$

### 3.8 Fórmula de Soma de Poisson

Finalizamos o capítulo conectando as teorias da série e da transformada de Fourier através da belíssima fórmula do somatório de Poisson.

Seja  $f \in C^0(\mathbb{R})$  e suponhamos que para todo  $x \in \mathbb{R}$  a série

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$$

convirja absolutamente. Observemos que com tais condições,  $g(x)$  é uma função periódica de período 1. Suponhamos ainda que a série de Fourier de  $g$  convirja pontualmente, ou seja,

$$g(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(m) e^{2\pi i m x}.$$

Calculando no ponto  $x = 0$  ambas expressões para  $g$  temos

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) &= g(0) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(m) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^1 g(y) e^{-2\pi i m y} dy \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(y+n) e^{-2\pi i m y} dy. \end{aligned} \tag{3.16}$$



Assumindo que podemos trocar o sinal do somatório em  $n$  com a integral e usando a mudança de variável  $y \rightarrow z - n$ , de (3.16) concluímos que

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(y+n) e^{-2\pi i m y} dy \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(y+n) e^{-2\pi i m y} dy \right) \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(z) e^{-2\pi i m z} dz \right) \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-2\pi i m z} dz \right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m),
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

obtendo-se assim a seguinte identidade

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n). \tag{3.18}$$

A fórmula (3.18) é conhecida como *Fórmula de Soma de Poisson* e as deduções para chegar à mesma foram feitas de maneira formal. A seguir damos condições nas quais a fórmula vale efetivamente com o rigor matemático necessário.

**Teorema 3.18.** *Seja  $f \in \mathcal{R}_c^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  tal que para algum  $\delta > 0$  as funções*

$$(1 + |x|)^{1+\delta} f(x) \quad \text{e} \quad (1 + |x|)^{1+\delta} f'(x)$$

*são limitadas. Então a Fórmula de Soma de Poisson*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

*vale, onde  $\hat{f}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i n x} dx$ .*

*Demonstração.* Como  $f(x+n) \leq \frac{C}{(1+|x+n|)^{1+\delta}}$ , pelo teste  $M$  de Weierstrass a série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$  converge uniformemente para uma função contínua  $g$ . Pelo mesmo argumento, a série  $\sum_{m \in \mathbb{Z}} f'(x+m)$  converge uniformemente para uma função contínua  $h$ . Agora observamos que, pela convergência uniforme, valem as igualdades

$$\begin{aligned} \int_0^x h(x) dx &= \int_0^x \sum_{m \in \mathbb{Z}} f'(t+m) dt \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^x f'(t+m) dt \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_m^{m+x} f'(s) ds = \sum_{m \in \mathbb{Z}} [f(x+m) - f(m)] ds \\ &= g(x) - g(0). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Derivando (3.19) temos que  $h(x) = g'(x)$ , o que implica que  $g \in C^1(\mathbb{T})$ , ou seja,  $g$  é continuamente diferenciável de período 1. Ora, pelo Teorema 2.26 do capítulo 2 a série de Fourier de  $g$  converge uniformemente para  $g$  e, portanto, todos os passos formais feitos em (3.16) e (3.17) valem de forma rigorosa sob as hipóteses assumidas. Isto conclui a prova do Teorema.  $\square$

### 3.9 Exercícios

1. Sejam  $f, g \in R_c^1(\mathbb{R})$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Prove que

- $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1$ ,
- $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$ ,
- $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ .

2. Mostre que uma seqüência  $\{f_n\}$  de funções contínuas, definidas na reta, converge uniformemente localmente para uma função

$f$  se, e somente se, ela converge uniformemente em qualquer intervalo fechado  $[a, b]$  da reta.

3. Mostre que  $f(x) = e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . *Sugestão:* use indução.
4. Prove que se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , então  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty$  para todo  $p \geq 1$ .
5. Prove que se  $f \in C^2(\mathbb{R})$  é tal que  $f, f', f'' \in R_c^1(\mathbb{R})$ , então  $\widehat{f} \in R_c^1(\mathbb{R})$ . Logo,  $f \in R_c^1(\widehat{\mathbb{R}})$ .
6. Dê um exemplo de função em  $R_c^1(\widehat{\mathbb{R}})$  que não esteja em  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .
7. Considere o operador transformada de Fourier

$$F_c : R_c^1(\widehat{\mathbb{R}}) \longrightarrow R_c^1(\widehat{\mathbb{R}}).$$

Prove que se  $\lambda$  é autovalor de  $F_c$  então  $\lambda^4 - 1 = 0$ , ou seja, os possíveis autovalores são  $\lambda = \pm 1, \pm i$ . Dê um exemplo de auto-função associada a algum desses possíveis autovalores.

8. \*Seja  $\mathcal{M} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$  um operador linear tal que

$$\mathcal{M}(xf)(x) = x\mathcal{M}(f)(x).$$

Prove que existe  $g \in C^\infty(\mathbb{R})$  limitada tal que  $\mathcal{M}(f) = gf$ .

9. Assuma que  $a$  é um número real não nulo e que  $f \in R^1(\mathbb{R})$ . Encontre a transformada de Fourier de  $g(x) = f(x) \cos(ax)$  em função da transformada de Fourier de  $f$ .
10. Existe alguma função  $f \in R^1(\mathbb{R})$  tal que  $\widehat{f}(\xi) = 1 - \frac{\text{sen } \xi}{\xi}$ ?
11. Assuma que  $f$  é diferenciável e que tem transformada de Fourier

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1 + i\xi}{1 + \xi^6}.$$

Calcule  $f'(0)$ .

12. Seja  $f \in \mathcal{R}_c^1(\mathbb{R})$  tal que  $f(x)$  é positiva para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Prove que  $|\widehat{f}(\xi)| < |\widehat{f}(0)|$  para todo  $\xi \neq 0$ .
13. Dado  $a > 0$ , verifique que vale a identidade

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2 + n^2} = \frac{1 + e^{-2\pi a}}{1 - e^{-2\pi a}}.$$

# Capítulo 4

## Aplicações

O objetivo deste capítulo é apresentar algumas aplicações das teorias das séries e da Transformada de Fourier desenvolvidas nos capítulos anteriores.

### 4.1 Somando Séries Numéricas

Não poderíamos deixar de fazer uma aplicação rápida sobre soma de séries numéricas. A idéia básica é calcular a Série de Fourier de uma função na qual a série convirja e avalia-la num dado ponto.

No Exemplo 2.2 do Capítulo 2 calculamos a Série de Fourier da função  $f(x) = |x|$ ,  $x \in [-1/2, 1/2]$ ,  $f(x+1) = f(x)$ , a qual converge pontualmente para  $f$  pelo Critério de Dirichlet. Assim,

$$|x| = \frac{1}{4} - \sum_{|n| \geq 1} \frac{1}{\pi^2(2n+1)^2} e^{2\pi(2n+1)ix}, \quad x \in [-1/2, 1/2].$$

Tomando  $x = 0$  obtemos que

$$\sum_{|n| \geq 1} \frac{1}{\pi^2(2n+1)^2} = \frac{1}{4},$$

donde,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Por outro lado, aplicando a identidade de Parseval temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{16} + \sum_{|n| \geq 1} \frac{1}{\pi^4(2n+1)^4} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} |f(x)|^2 dx \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} x^2 dx = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

e assim,

$$\sum_{|n| \geq 1} \frac{1}{\pi^4(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{48}$$

No Exercício 6 indicamos outro exemplo clássico onde podemos aplicar este método.

## 4.2 A Série Theta

A função *theta* se define da seguinte através da série

$$\vartheta(s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s},$$

para todo  $s > 0$ . Notamos que  $\vartheta$  está bem definida dado que a série converge absolutamente se comparamos, por exemplo, com a série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2}$ , uma vez que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-\pi n^2 s} = 0$  por ser  $s > 0$ .

Usando a Fórmula de Soma de Poisson provaremos que  $\vartheta$  satisfaz uma importante equação funcional, a saber:

**Teorema 4.1.** *Para todo  $s > 0$  tem-se  $\vartheta(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}\vartheta(1/s)$*

*Demonstração.* Seja  $f_s(x) = e^{-\pi s x^2}$ . Então, pelo Lema 3.9, temos que  $\widehat{f}_1 = f_1$ . Portanto, usando o item (c) do Teorema 3.7 segue que

$$\widehat{f}_s(\xi) = \frac{1}{\sqrt{s}}f_{1/s}(\xi).$$

Como  $f_s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  para todo  $s > 0$ , pela fórmula do Somatório de Poisson obtemos

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_s(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_s(n) = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_{1/s}(n),$$

ou seja  $\vartheta(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}\vartheta(1/s)$ . □

**Observação 4.2.** A função  $\vartheta$  pode ser estendida a todo número complexo  $s$  com parte real positiva ( $\text{Re}(s) > 0$ ), sendo válida ainda a equação funcional provada acima. Além disso, esta função se conecta com a função *zeta de Riemann*, definida por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \text{Re}(s) > 1,$$

a qual joga um papel fundamental na teoria dos números primos.

### 4.3 O Teorema da Amostragem de Shannon

O resultado que provaremos a seguir tem importantes aplicações na tecnologia usada para a gravação de audios.

**Teorema 4.3** (Teorema da Amostragem de Shannon). *Suponha que  $f \in \mathcal{R}_c^1(\mathbb{R})$  e que  $\widehat{f}(\xi) = 0$  para  $|\xi| \geq c$ . Então*

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n\pi}{c}\right) \frac{\text{sen}(cx - n\pi)}{cx - n\pi},$$

onde a soma é uniformemente convergente em  $\mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Pela fórmula de inversão da Transformada de Fourier segue-se que

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-c}^c \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \frac{1}{2c} \int_{-c}^c \frac{2c}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(\xi) \overline{e^{-ix\xi}} d\xi. \quad (4.1)$$

Definimos agora as funções

$$g(\xi) = \frac{2c}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(\xi) \quad \text{e} \quad h(\xi) = e^{-ix\xi},$$

as quais consideramos como restrições no intervalo  $[-c, c]$  de funções  $2c$ -periódicas e cujas respectivas séries de Fourier são

$$g(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(n) e^{i \frac{n\pi}{c} \xi} \quad \text{e} \quad h(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{h}(n) e^{i \frac{n\pi}{c} \xi}, \quad (4.2)$$

com coeficientes dados por

$$\begin{aligned} \hat{g}(n) &= \frac{1}{2c} \int_{-c}^c g(\xi) e^{-i \frac{n\pi}{c} \xi} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-c}^c \hat{f}(\xi) e^{-i \frac{n\pi}{c} \xi} d\xi \\ &= f\left(-\frac{n\pi}{c}\right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

e

$$\begin{aligned} \hat{h}(n) &= \frac{1}{2c} \int_{-c}^c h(\xi) e^{-i \frac{n\pi}{c} \xi} d\xi = \frac{1}{2c} \int_{-c}^c e^{-ix\xi} e^{-i \frac{n\pi}{c} \xi} d\xi \\ &= \frac{\text{sen}(cx + n\pi)}{cx + n\pi}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Aplicando a identidade de Parseval polarizada para funções  $2c$ -periódicas podemos reescrever (4.1) como segue

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2c} \int_{-c}^c \frac{2c}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(\xi) \overline{e^{-ix\xi}} d\xi \\ &= \frac{1}{2c} \int_{-c}^c g(\xi) \overline{h(\xi)} d\xi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(n) \overline{\hat{h}(n)}. \end{aligned} \quad (4.5)$$



Usando em (4.5) a expressão dos coeficientes de Fourier de  $g$  e  $h$ , dadas em (4.3) e (4.4), obtemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(n) \overline{\hat{h}(n)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(-\frac{n\pi}{c}\right) \frac{\overline{\text{sen}(cx + n\pi)}}{cx + n\pi} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n\pi}{c}\right) \frac{\text{sen}(cx - n\pi)}{cx - n\pi}. \end{aligned}$$

□

**Observação 4.4.** O Teorema de Amostragem de Shannon nos diz que, se assumimos que um sinal  $f(x)$  é construído usando apenas frequências angulares  $\xi$  abaixo do valor  $c$  ( $|\xi| \leq c$ ) então é possível reconstruir completamente o sinal se usamos uma amostragem do mesmo em intervalos de comprimento  $\pi/c$ .

## 4.4 A Equação de Laplace no Semiplano

A aplicação que faremos a seguir se encontra no contexto das Equações Diferenciais Parciais. Especificamente, resolveremos o Problema de Valor Inicial associado à Equação de Laplace no Semiplano

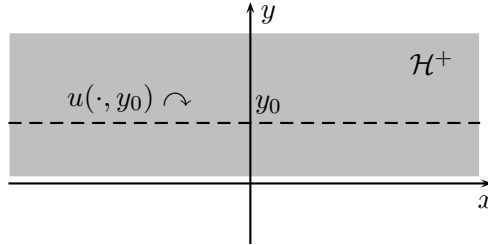
$$\mathcal{H}^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}.$$

Isto é, queremos achar um função  $u$  tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0, & (x, y) \in \mathcal{H}^+, \\ u(x, 0) = f(x) \in C^0(\mathbb{R}), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.6)$$

onde  $u$  é considerada na classe de funções que satisfazem:

- (i)  $u \in C^2(\mathcal{H}^+)$ , i.e,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y)$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y)$  e  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)$  são contínuas em  $\mathcal{H}^+$ ,
- (ii)  $u(\cdot, y) \in R_c^1(\mathbb{R})$  para cada  $y > 0$ .



Usando as hipóteses colocadas para  $u$  podemos aplicar a Transformada de Fourier na variável  $x$  para transformar a equação de Laplace na seguinte família de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} -4\pi^2\xi^2\widehat{u}(\xi, y) + \frac{\partial^2\widehat{u}}{\partial y^2}(\xi, y) = 0, & \xi \in \mathbb{R}, \\ \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi). \end{cases} \quad (4.7)$$

onde assumimos que a derivação com respeito à variável  $y$  comuta com a Transformada de Fourier na variável  $x$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}(\xi, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y) e^{-2\pi i \xi x} dx \right) \\ &= \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial y^2}(\xi, y). \end{aligned}$$

Agora, fixamos a variável  $\xi$  e resolvemos a equação diferencial ordinária de segunda ordem (4.7) na variável  $y$ , cuja solução geral é dada pela expressão

$$\widehat{u}(\xi, y) = A(\xi)e^{-2\pi|\xi|y} + B(\xi)e^{2\pi|\xi|y}, \quad (4.8)$$

onde  $A(\xi)$  e  $B(\xi)$  são constantes reais que dependem de  $\xi$ . Como  $\widehat{u}(\xi, y)$  é limitada para  $y > 0$  temos que  $B(\xi) \equiv 0$ . Ora, da expressão (4.8) segue-se que  $\widehat{u}(\xi, 0) = A(\xi) = \widehat{f}(\xi)$ , conseqüentemente

$$\widehat{u}(\xi, y) = \widehat{f}(\xi)e^{-2\pi|\xi|y}. \quad (4.9)$$

Lembramos agora que no Exemplo 3.13 provamos que

$$P_y(x) = \frac{4\pi y}{4\pi^2 x^2 + 4\pi^2 y^2}$$

é a transformada inversa de  $e^{-2\pi|\xi|y}$ . Logo, de (4.9) tem-se

$$\widehat{u}(\xi, y) = \widehat{f}(\xi)\widehat{P}_y(\xi)$$

Agora podemos recuperar a solução  $u(x, y)$  aplicando a propriedade da transformada da convolução, precisamente temos que

$$u(x, y) = f * P_y(x) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)}{(x-s)^2 + y^2} ds.$$

A fórmula acima é conhecida como *Fórmula Integral de Poisson* para o semiplano.

## 4.5 A Desigualdade Isoperimétrica

Nesta seção veremos como as Séries de Fourier podem resolver um problema clássico em Geometria Diferencial. Mais especificamente, vamos usar a teoria das Séries de Fourier para demonstrar a famosa *Desigualdade Isoperimétrica* para curvas no plano  $\mathbb{R}^2$ .

Como veremos mais adiante, a Desigualdade Isoperimétrica é uma desigualdade que relaciona o comprimento de uma curva plana fechada com a área delimitada pela curva, e foi concebida para resolver o seguinte problema:

**Problema Isoperimétrico 1:** *Dentre todas as curvas fechadas simples no plano de comprimento  $L$ , qual é a curva (se existir) que limita a maior área?*

Podemos provar (veja o Exercício 1) que resolver este problema é equivalente a resolver o seguinte:

**Problema Isoperimétrico 2:** *Dentre todas as curvas fechadas no plano que limitam uma área fixa  $A$ , qual é (se existir) a que tem o menor comprimento?*

Sendo estes dois problemas equivalente, vamos nos referir a ambos simplesmente por Problema Isoperimétrico. O leitor deve se convencer que a curva que é solução para o Problema Isoperimétrico é um *círculo*.

Apesar do Problema Isoperimétrico ser conhecido desde os tempos da antiga Matemática Grega, uma prova completa só veio aparecer em 1870 com Karl Weierstrass. Hoje em dia podemos encontrar várias outras demonstrações para o Problema Isoperimétrico (veja por exemplo [11]), e também várias generalizações; muitas delas ainda sem respostas (consulte [12] sobre resultados recentes).

Como veremos a seguir, a Desigualdade Isoperimétrica resolve este problema completamente.

A fim de enunciarmos precisamente nossos resultados necessitamos lembrar algumas definições.

**Definição 4.5.** Uma curva plana é simplesmente uma função contínua  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , de um intervalo  $I$  da reta no plano Cartesiano.

Dizemos que  $\alpha$  é *simples* se  $\alpha$  é injetiva. E dizemos que  $\alpha$  é *fechada* se  $I = [a, b]$  e  $\alpha(a) = \alpha(b)$ .

Nem toda curva plana simples e fechada tem o seu comprimento bem definido, o qual pode ser definido por meio de aproximações por curvas poligonais. Aqui não queremos entrar nesta discussão. Para darmos uma definição eficiente de comprimento de curvas vamos fixar mais algumas notações.

Se escrevemos  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , então lembramos que  $\alpha$  é diferenciável quando as funções  $x$  e  $y$  são funções reais diferenciáveis. Neste caso  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ . A curva  $\alpha$  é dita de classe  $C^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , se as funções  $x$  e  $y$  são funções de classe  $C^k$ . Finalmente dizemos que  $\alpha$  é regular se o seu vetor tangente nunca se anula, ou seja,  $\alpha'(t) \neq (0, 0)$

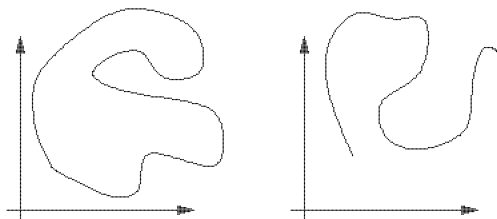


Figura 4.1: Curva fechada e curva não fechada

para todo  $t$ . Quando queremos estudar propriedades geométricas locais das curvas é comum exigir que a curva seja regular, pois neste caso temos uma reta tangente bem definida. Abaixo encontramos um exemplo de uma curva diferenciável que não é regular.

**Exemplo 4.6.** Seja  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ . Então  $\alpha$  é de classe  $C^k$  para todo  $k \geq 1$  e  $\alpha'(t) = (3t^2, 2t)$ . Portanto o vetor tangente a  $\alpha$  no ponto  $t = 0$  é  $(0, 0)$ .

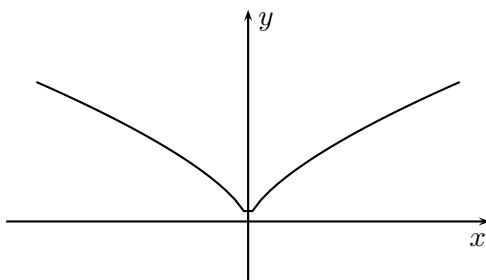


Figura 4.2: Curva não regular

Quando  $\alpha$  é uma curva regular temos uma boa definição para o comprimento.

**Definição 4.7.** Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular. O *comprimento* de  $\alpha$  no intervalo  $[a, b]$  é definido por

$$L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt.$$

Para muitas aplicações é conveniente identificar a curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  com o seu *traço*  $C = \alpha(I) \subset \mathbb{R}^2$ . De fato, se  $\varphi : J \subset \mathbb{R} \rightarrow I$  é um difeomorfismo (bijeção diferenciável com inversa diferenciável) e  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  é definida por  $\beta(s) = \alpha(\varphi(s))$ , então  $\alpha$  e  $\beta$  têm o mesmo traço e o mesmo comprimento  $L(\alpha) = L(\beta)$  (veja o exercício 2). Neste caso, dizemos que  $\beta$  é uma *reparametrização* de  $\alpha$  e  $\varphi$  é chamado de *mudança de parâmetro*. Podemos verificar que  $\alpha$  e  $\beta$  têm várias propriedades geométricas em comum, e é isso que motiva a fazer a identificação de uma curva com o seu traço. Em particular, dada uma curva  $\alpha$  regular sempre existe uma reparametrização de  $\alpha$  cujo vetor tangente é unitário. Quando isto ocorre dizemos que  $\alpha$  é uma curva *parametrizada pelo comprimento de arco*.

Finalmente, lembramos que o Teorema de Jordan-Brower para curvas planas garante que qualquer curva fechada simples divide o  $\mathbb{R}^2$  em duas regiões, uma limitada e outra ilimitada (veja [7] para uma demonstração no caso diferenciável). Mais uma vez, supondo que  $\alpha$  é uma curva regular, é possível mostrar que a área da região delimitada por  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  é dada por

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left| \int_a^b x(t)y'(t) - y(t)x'(t) dt \right|.$$

Esta fórmula pode ser obtida do Teorema de Green (veja por exemplo [9] p. 427).

Agora estamos prontos para enunciar e provar o nosso principal resultado desta seção.

**Teorema 4.8** (Desigualdade Isoperimétrica). *Seja  $C \subset \mathbb{R}^2$  uma curva regular, simples e fechada no plano, de comprimento  $L$  e de*

limitando uma região de área  $\mathcal{A}$ . Então vale que

$$\mathcal{A} \leq \frac{L^2}{4\pi}. \quad (4.10)$$

Além disso, vale a igualdade se, e somente se,  $C$  é um círculo.

Antes de apresentar a demonstração (usando as Séries de Fourier) veremos como esta desigualdade resolve os dois problemas isoperimétricos que enunciámos acima.

Primeiro, fixado  $L$  temos que (4.10) é uma cota superior para a área  $\mathcal{A}$  e, se uma curva  $C$  tem a maior área dentre todas com comprimento  $L$ , então temos a igualdade em (4.10) e portanto  $C$  é um círculo, o que resolve o Problema Isoperimétrico 1.

Por outro lado, fixado  $A$ , (4.10) é uma conta inferior para  $L$ , a saber  $\sqrt{4\pi A} \leq L$ , e, analogamente, a curva que tem o menor comprimento é a que realiza a igualdade, donde um círculo. E assim também resolvemos o Problema Isoperimétrico 2.

Agora observamos que a desigualdade isoperimétrica é invariante por homotetias. Com efeito, seja  $C$  uma curva plana de comprimento  $L$  e limitando uma região de área  $\mathcal{A}$ . Tomando uma homotetia de fator  $\lambda$  obtemos uma nova curva  $\tilde{C}$ , de comprimento  $\tilde{L}$  e limitando uma região de área  $\tilde{\mathcal{A}}$  tais que  $\tilde{\mathcal{A}} = \lambda^2 \mathcal{A}$  e  $\tilde{L} = \lambda L$  (veja exercício 3). Assim, vale a desigualdade isoperimétrica para  $C$  se, e somente se, vale para  $\tilde{C}$ .

Portanto, para fins de demonstração podemos supor que  $L = 1$ . Neste caso precisamos mostrar que  $\mathcal{A} \leq \frac{1}{4\pi}$ .

### Prova da Desigualdade Isoperimétrica:

*Demonstração.* Seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$  uma parametrização de  $C$  pelo comprimento de arco,

i.e.,

$$\|\gamma'(s)\|^2 = (x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1, \quad \forall s \in (0, 1).$$

Como  $\gamma$  é fechada, temos que  $x(s)$  e  $y(s)$  são funções periódicas, (de período 1), e, por um argumento de aproximação, podemos supor que  $x$  e  $y$  são de Classe  $C^2$ . Assim vamos supor que as Séries de Fourier de  $x$ ,  $y$ ,  $x'$  e  $y'$  convergem uniformemente e em média quadrática:

$$x(s) = \sum \hat{x}(n)e^{2\pi ins}, \quad y(s) = \sum \hat{y}(n)e^{2\pi ins},$$

$$x'(s) = \sum \hat{x}'(n)e^{2\pi ins} = \sum 2\pi in\hat{x}(n)e^{2\pi ins}$$

e

$$y'(s) = \sum \hat{y}'(n)e^{2\pi ins} = \sum 2\pi in\hat{y}(n)e^{2\pi ins}.$$

Como estamos supondo que  $\gamma$  está parametrizada pelo comprimento de arco, temos que

$$\int_0^1 [x'(s)^2 + y'(s)^2] ds = 1.$$

Aplicando a Identidade de Parseval obtemos,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 4\pi^2 |n|^2 (|\hat{x}(n)|^2 + |\hat{y}(n)|^2) = 1. \quad (4.11)$$

Por outro lado, temos a fórmula da área da região limitada por  $C$  na qual podemos usar a Identidade de Parseval Polarizada (Corolário 2.25) obtendo,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \left| \int_a^b x(t)y'(t) - y(t)x'(t) dt \right| \\ &= \pi \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} n[\hat{x}(n)\overline{\hat{y}(n)} - \hat{y}(n)\overline{\hat{x}(n)}] \right|. \end{aligned}$$

Neste ponto devemos lembrar das seguintes desigualdades (verifique!)

$$|z\bar{w} - w\bar{z}| \leq |z||w| \leq |z|^2 + |w|^2, \quad z, w \in \mathbb{C}. \quad (4.12)$$



Mais ainda, vale a igualdade se, e somente se,  $z = w$ .

Agora, lembrando de (4.11), vamos usar os extremos nas desigualdades acima e o fato que  $|n| \leq |n|^2$  para estimar o valor de  $\mathcal{A}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\leq \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^2 (|\hat{x}(n)|^2 - |\hat{y}(n)|^2) \\ &\leq \frac{1}{4\pi}. \end{aligned}$$

Que é a desigualdade que estávamos procurando.

Para finalizar, devemos analisar o que acontece com as funções  $x$  e  $y$  quando temos a igualdade  $\mathcal{A} = \frac{1}{4\pi}$ .

A nossa primeira observação é que neste caso temos  $|n| = |n|^2$ , o que só é verdade quando  $n = 0, 1, -1$ . Assim usando as Séries de Fourier de  $x$  e  $y$  temos que

$$x(s) = \hat{x}(-1)e^{-2\pi is} + \hat{x}(0) + \hat{x}(1)e^{2\pi is}$$

e

$$y(s) = \hat{y}(-1)e^{-2\pi is} + \hat{y}(0) + \hat{y}(1)e^{2\pi is}$$

Agora, lembramos que  $x$  e  $y$  são funções reais, ou seja  $x = \bar{x}$  e  $y = \bar{y}$ , e isto implica que  $\overline{\hat{x}(n)} = \hat{x}(-n)$  e  $\overline{\hat{y}(n)} = \hat{y}(-n)$  (veja exercício 10 no capítulo 2). Usando este fato na identidade (4.11) concluímos que  $2(|\hat{x}(1)|^2 + |\hat{y}(1)|^2) = 1$ ; e como vale a igualdade em (4.12) devemos ter  $|\hat{x}(1)| = |\hat{y}(1)| = 1/2$ . Assim, podemos escrever

$$\hat{x}(1) = \frac{1}{2}e^{2\pi i\alpha} \quad \text{e} \quad \hat{y}(1) = \frac{1}{2}e^{2\pi i\beta}.$$

Dessa forma, pondo  $\hat{x}(0) = a$  e  $\hat{y}(0) = b$ , temos que

$$x(s) = a + \frac{1}{2}(e^{-2\pi i(s+\alpha)} + e^{-2\pi i(s+\alpha)}) = a + \cos(s + \alpha),$$

e analogamente

$$y(s) = b + \cos(s + \beta).$$

Finalmente, temos que  $2|\hat{x}(1)\overline{\hat{y}(1)} - \hat{y}(1)\overline{\hat{x}(1)}| = 1$ . Aplicando a notação acima nesta igualdade temos,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2}|e^{2\pi i\alpha}e^{-2\pi i\beta} - e^{2\pi i\beta}e^{-2\pi i\alpha}| \\ &= \frac{1}{2}|e^{2\pi i(\alpha-\beta)} - e^{-2\pi i(\alpha-\beta)}| \\ &= |\text{sen}(\alpha - \beta)|, \end{aligned}$$

donde  $\alpha - \beta = k\pi/2$ , para algum  $k \in \mathbb{Z}$ .

Portanto, podemos escrever

$$x(s) = a + \cos(s + \alpha) \quad \text{e} \quad y(s) = b + \text{sen}(s + \alpha)$$

ou

$$x(s) = a + \cos(s + \alpha) \quad \text{e} \quad y(s) = b - \text{sen}(s + \alpha),$$

dependendo da paridade de  $k$ . Em todo caso, temos que a curva  $\gamma$  é a parametrização de um círculo. Isto conclui a prova.  $\square$

## 4.6 Exemplo de uma Função Contínua que não tem Derivada em Nenhum Ponto.

Normalmente, quando estudamos (ou ensinamos) o conceito de diferenciabilidade conseguimos provar, sem maiores dificuldades, que toda função diferenciável é contínua. Também é muito comum nos depararmos com o clássico exemplo da função modular  $f(x) = |x|$  como contra-exemplo para a recíproca, ou seja, este é um exemplo de uma função contínua que não é diferenciável. Isto costuma convencer bem a platéia (possivelmente ainda em êxtase diante do novo conceito) e é possível que um estudante venha a concluir o seu curso com apenas este exemplo ou algumas poucas variantes dele.

Por outro lado, o estudante mais curioso pode não ficar muito convecido com o exemplo dado, afinal a função  $f(x) = |x|$  não é diferenciável apenas na origem, e por construções semelhantes só é

possível gerar funções contínuas com um número finito (ou até enumerável) de pontos onde a derivada não existe.

Usando o Teorema de Baire é possível mostrar que, fixado um intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , o conjunto das funções contínuas que possuem derivada em algum ponto de  $(a, b)$  é *magro* no conjunto das funções contínuas que não possuem derivada em ponto algum (veja [10], p. 195). *A grosso modo, isto significa que a “maioria” das funções contínuas (definidas num dado intervalo) não possui de derivada em nenhum ponto.*

Como ocorre com vários outros entes *patológicos* da matemática, os exemplos concretos geralmente requerem argumentos mais elaborados.

Para o deleite dos curiosos, vamos apresentar aqui uma família de funções contínuas, onde cada uma delas não possui derivada em nenhum ponto, e faremos isso usando as Séries de Fourier.

**Teorema 4.9.** *Para cada  $\alpha \in (0, 1)$ , a função*

$$r_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} e^{2\pi i 2^n x} \quad (4.13)$$

*é contínua em  $\mathbb{R}$ , mas não é diferenciável em nenhum ponto de  $\mathbb{R}$ .*

Notemos que a função  $r_\alpha$  está expressa em termos da sua Série de Fourier e que nesta série apenas os coeficientes da forma  $\hat{r}_\alpha(2^n)$  não são nulos, e estes são muito pequenos. Isto significa que cada soma parcial tem pouca *amplitude* e muita *frequência*; essencialmente, este é o motivo porque esta função (o limite dessas somas parciais) não é diferenciável.

A continuidade de  $r_\alpha$  segue do fato que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} |2^{-n\alpha} e^{2\pi i 2^n x}| = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha}$  é uma série convergente, daí, pelo Teste  $M$  de Weierstrass, a série (4.13) converge uniformemente, e como cada parcela é contínua temos que a série é uma função contínua (veja [8] pg. 375).

Antes de apresentarmos a demonstração de que  $r_\alpha$  não é diferenciável em nenhum ponto vamos precisar de alguns lemas.

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função periódica  $f$  (ou definida em  $[0, 1)$ ) cuja a série de Fourier é convergente, ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{2\pi inx}.$$

Então já vimos que  $S_N(f) = f * D_N$  e  $\sigma_N(f) = f * F_N$ , onde  $D_N$  é o núcleo de Dirichlet e  $F_N$  é o núcleo de Fejér.

**Lema 4.10.** *Se  $f \in R(\mathbb{T})$  é uma função contínua que é diferenciável em  $x_0$ , então*

$$\sigma_N(f)'(x_0) = O(\log N), \quad \text{quando } N \rightarrow \infty.$$

*Demonstração.* Como  $\sigma_N(f) = f * F_N$ , temos, derivando sob o sinal da integral,

$$\sigma_N(g)'(x_0) = \int_0^1 F'_N(x_0 - y)f(y)dy = \int_0^1 F'_N(y)f(x_0 - y)dy.$$

Como  $F_N$  é periódica,  $\int_0^1 F'_N(y)dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F'_N(y)dy = 0$ . Assim podemos escrever

$$\sigma_N(g)'(x_0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F'_N(y)[f(x_0 - y) - f(x_0)]dy.$$

Como  $f$  é diferenciável em  $x_0$  temos que

$$|\sigma_N(g)'(x_0)| \leq C \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |F'_N(y)||f(x_0)|dy,$$

onde  $C$  é uma constante positiva.

Agora temos duas estimativas para  $F'_N$ :

1.  $|F'_N(y)| \leq CN^2$ .

De fato, como  $F_N$  é uma combinação linear das funções  $e^{2\pi inx}$ , com  $-N \leq n \leq N$ , cujos coeficientes são limitados por 1, então  $F'_N$  também é uma combinação linear das mesmas funções, porém com os coeficientes  $\leq N$ . Assim,  $|F'_N| \leq (2N + 1)N \leq CN^2$ , onde  $C$  é uma (outra) constante positiva.

2.  $|F'_N(y)| \leq \frac{C}{|y|^2}$ .

Neste caso lembramos que  $F_N(y) = \frac{\text{sen}^2(N\pi y)}{N\text{sen}^2(\pi y)}$ . Derivando esta expressão obtemos,

$$F'_N(y) = \frac{2\pi \text{sen}(N\pi y) \cos(N\pi y)}{\text{sen}^2(\pi y)} - \frac{2\pi \text{sen}^2(N\pi y) \cos(\pi y)}{\text{sen}^3(\pi y)}.$$

Agora usando os fatos que  $|\cos(y)| \leq 1$ ,  $|\text{sen}(N\pi y)| \leq CN|y|$  e  $|\text{sen}(\pi y)| \geq c|y|$ , se  $|y| \leq 1/2$ , concluímos a segunda estimativa.

Usando essas estimativas temos que

$$\begin{aligned} |\sigma_N(f)'(x_0)| &\leq C \int_{|y| \geq 1/N} |F'_N(y)||y| dy + C \int_{|t| \leq 1/N} |F'_N(y)||y| dy \\ &\leq C \int_{|y| \geq 1/N} \frac{1}{|y|} dy + CN \int_{|t| \leq 1/N} dy \\ &= O(\log N) + O(1) \\ &= O(\log N). \end{aligned}$$

□

Agora precisamos definir mais um tipo de convergência para Séries de Fourier.

**Definição 4.11.** Definimos a *média com atraso* de  $f$  como sendo

$$\Delta_N(f) = 2\sigma_{2N}(f) - \sigma_N(f).$$

Neste caso temos que  $\Delta_N(f) = f * [2F_{2N} - F_N]$ .

Sobre as médias com atraso temos a seguinte consequência do lema anterior.

**Corolário 4.12.** *Seja  $f \in R(\mathbb{T})$  nas mesmas condições do Lema 4.10. Então vale que*

$$\Delta_N(f)'(x_0) = O(\log N), \quad \text{quando } N \rightarrow \infty.$$

Finalmente, temos dois fatos particulares sobre a família de funções  $r_\alpha$ .

**Lema 4.13.**  *$S_N(r_\alpha) = \Delta_{N'}(r_\alpha)$ , onde  $N'$  é o maior inteiro da forma  $2^k$  menor ou igual a  $N$ . Em particular,  $S_{2^n}(r_\alpha) = \Delta_{2^n}(r_\alpha)$ .*

Deixamos a prova deste lema como exercício para o leitor.

**Lema 4.14.** *Se  $2N = 2^n$ , então*

$$\Delta_{2N}(r_\alpha) - \Delta_N(r_\alpha) = 2^{-n\alpha} e^{2\pi i 2^n x}.$$

*Demonstração.* Segue do lema anterior, visto que

$$\Delta_{2N}(r_\alpha) - \Delta_N(r_\alpha) = S_{2N}(r_\alpha) - S_N(r_\alpha) = 2^{-n\alpha} e^{2\pi i 2^n x}.$$

□

Agora podemos concluir a prova do Teorema 4.9. Suponhamos que  $r_\alpha$  é derivável no ponto  $x_0$ . Então derivando a identidade do lema 4.14 temos

$$\begin{aligned} |\Delta_{2N}(r_\alpha)'(x_0) - \Delta_N(r_\alpha)'(x_0)| &= |2\pi i 2^n 2^{-n\alpha} e^{2\pi i 2^n x}| \\ &= C 2^{n(1-\alpha)} \geq C N^{1-\alpha}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

para alguma constante  $C > 0$ .

Por outro lado, pelo Corolário 4.12 temos que

$$\Delta_{2N}(r_\alpha)'(x_0) - \Delta_N(r_\alpha)'(x_0) = O(\log N).$$

Isso é uma contradição com a estimativa (4.14). Com esta contradição concluímos a prova do Teorema 4.9.

## 4.7 O Teorema de Weyl

Vamos agora descrever uma aplicação que se encontra na fronteira dos sistemas Dinâmicos com a Teoria dos Números. A mesma refere-se à distribuição de números irracionais no intervalo  $[0, 1]$ .

Antes de enunciar o resultado principal damos alguns conceitos preliminares. Dado um número real  $x$  denotaremos por  $[x]$  o maior inteiro menor ou igual do que  $x$  e por  $\langle x \rangle = x - [x]$  a parte fracionária de  $x$ . Por exemplo,  $[2.3] = 2$  e  $\langle 2.3 \rangle = 0.3$ , bem como  $[-1.7] = -2$  e  $\langle -1.7 \rangle = 0.3$ . Notamos também que,  $\langle x \rangle \in [0, 1)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Definimos agora a seguinte relação de equivalência em  $\mathbb{R}$ . Dizemos que dois números reais  $x$  e  $y$  são congruentes módulo 1 se  $x - y \in \mathbb{Z}$  e usamos a notação

$$x = y \pmod{1}$$

para representar esta frase.

Observamos que qualquer número real  $x$  é congruente com um único número no intervalo  $[0, 1)$ , que não é mais que sua parte fracionária  $\langle x \rangle$ . De fato, se existem inteiros  $n$  e  $m$  e números reais  $\alpha_n, \alpha_m \in [0, 1)$  tais que

$$x = n + \alpha_n = m + \alpha_m,$$

então  $|n - m| = |\alpha_m - \alpha_n| < 1$ . Logo  $n = m$  e  $\alpha_m = \alpha_n$ . Portanto, na congruência módulo 1 basta considerar apenas os números do intervalo  $[0, 1)$ .

Seja  $\alpha \neq 0$  um número real e consideremos a sequência de seus múltiplos

$$\alpha, 2\alpha, \dots, n\alpha, \dots$$

Olhamos agora para a sequência de suas partes fracionárias

$$\langle \alpha \rangle, \langle 2\alpha \rangle, \dots, \langle n\alpha \rangle, \dots \tag{4.15}$$

e observamos os seguintes fatos:

- Se  $\alpha = p/q$  é racional, então a sequência (4.15) possui apenas um número finito de elementos distintos, que são

$$\langle p/q \rangle, \langle 2p/q \rangle, \dots, \langle (q-1)p/q \rangle, \langle qp/q \rangle = 0.$$

- Se  $\alpha$  é irracional, então todos os elementos de (4.15) são distintos. De fato, se  $\langle n\alpha \rangle = \langle m\alpha \rangle$  com  $n \neq m$ , então  $n\alpha - m\alpha \in \mathbb{Z}$ , sendo  $\alpha$  irracional o que é uma contradição.

Provaremos a seguir resultados mais profundos acerca da sequência (4.15). Por exemplo, mostraremos a densidade da sequência dela no intervalo  $[0, 1)$ , resultado provado por Kronecker e que obteremos aqui como consequência do Teorema de Weyl, o qual garante que garante que a sequência (4.15) é *uniformemente equidistribuída* no intervalo  $[0, 1)$ .

A seguir definiremos o que entendemos por *sequência uniformemente equidistribuída*.

**Definição 4.15.** Dizemos que uma sequência  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números reais é *uniformemente equidistribuída* no intervalo  $[0, 1)$  se para todo intervalo  $(a, b) \subset [0, 1)$  tem-se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|A_N|}{N} = b - a,$$

onde  $A_N = \{1 \leq n \leq N; \alpha_n \in (a, b)\}$  e  $|A_N|$  é o número de elementos de  $A_N$ .

**Exemplo 4.16.** A sequência

$$0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 0, \dots$$

é equidistribuída em  $[0, 1)$ . Além disso, ela é densa em  $[0, 1)$ , pois contém os racionais deste intervalo.



**Exemplo 4.17.** Sendo  $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma enumeração de  $\mathbb{Q} \cap [0, 1)$ , definimos a sequência  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  por

$$\alpha_n = \begin{cases} r_{\frac{n}{2}}, & \text{se } n = 2k, \\ 0, & \text{se } n = 2k - 1, \end{cases}$$

não é equidistribuída em  $[0, 1)$ , pois se tomamos  $(a, b) = (0, 1)$ , para todo  $N \in \mathbb{N}$  metade da sequência estará fora de  $(0, 1)$ . Logo,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|A_N|}{N} = \frac{1}{2} \neq 1.$$

No entanto, a sequência  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é densa em  $[0, 1)$ .

Os exemplos acima mostram que o conceito de equidistribuição é mais fino que o de densidade e que para uma sequência ser equidistribuída deverá ter um bom ordenamento dos seus termos.

**Proposição 4.18.** *Seja  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  equidistribuída em  $[0, 1)$ . Então,  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é densa em  $[0, 1)$ .*

*Demonstração.* Seja  $x_0 \in [0, 1)$  e  $\delta > 0$  tal que  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [0, 1)$ . Assim,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|A_N|}{N} = 2\delta > 0,$$

o que implica que existe algum termo da sequência no interior do intervalo  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Como  $\delta$  é arbitrário a densidade está provada.  $\square$

O seguinte resultado será a peça chave na prova do Teorema de Weyl.

**Lema 4.19.** *Seja  $f \in C^0(\mathbb{T})$  e  $\alpha$  irracional. Então,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\alpha) = \int_0^1 f(x) dx.$$

*Demonstração.* Dividimos a prova em três passos.

(1) Primeiro suponhamos que  $f = e_0 = 1$  a igualdade é óbvia. Se  $f = e_k(x) = e^{2\pi ikx}$ , com  $k \neq 0$ , temos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i kn\alpha} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{e^{2\pi i k\alpha} (1 - e^{2\pi i kN\alpha})}{N (1 - e^{2\pi i k\alpha})} = 0,$$

onde o fato de  $\alpha$  ser irracional nos garante que  $1 - e^{2\pi i k\alpha} \neq 0$ .

(2) Como o lema vale para as funções  $e_k(x) = e^{2\pi ikx}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , então também vale para todo polinômio trigonométrico.

(3) Sendo  $f$  contínua e periódica, dado  $\varepsilon > 0$  existe um polinômio trigonométrico tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - p(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(consequência do Teorema de Fejér). Pelo passo (2), existe  $N_0 \gg 1$  tal que para  $N \geq N_0$  tem-se

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N p(n\alpha) - \int_0^1 p(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\alpha) - \int_0^1 f(x) dx \right| &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |f(n\alpha) - p(n\alpha)| \\ &+ \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N p(n\alpha) - \int_0^1 p(x) dx \right| \\ &+ \int_0^1 |p(x) - f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo  $N \geq N_0$ . □

Finalmente, enunciaremos o Teorema de Weyl.

**Teorema 4.20** (Teorema de Weyl). *Seja  $\alpha$  irracional. Então, a sequência*

$$\langle \alpha \rangle, \langle 2\alpha \rangle, \dots, \langle n\alpha \rangle, \dots$$

*é uniformemente equidistribuída em  $[0, 1)$ .*

*Demonstração.* Consideremos uma extensão periódica, de período 1, em toda a reta da função característica  $\chi_{(a,b)}$ . O primeiro passo será observar que

$$|A_N| = |\{1 \leq n \leq N; \alpha_n \in (a, b)\}| = \sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(n\alpha).$$

Portanto, provar o teorema é equivalente a provar

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(n\alpha) = \int_0^1 \chi_{(a,b)}(x) dx.$$

Agora só resta aproximar a função característica  $\chi_{(a,b)}$  por funções periódicas contínuas  $f_\epsilon^-$  e  $f_\epsilon^+$  tais que

$$f_\epsilon^-(x) \leq f(x) \leq f_\epsilon^+(x)$$

e satisfazendo

$$b - a - 2\epsilon \leq \int_0^1 f_\epsilon^-(x) dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 f_\epsilon^+(x) dx \leq b - a + 2\epsilon.$$

Assim,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_\epsilon^-(n\alpha) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(n\alpha) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_\epsilon^+(n\alpha),$$

de onde, usando o Lema 4.19, obtemos as desigualdades

$$b - a - 2\epsilon \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(n\alpha)$$

e

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(n\alpha) \leq b - a + 2\epsilon.$$

Como  $\epsilon$  é arbitrário, temos  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(n\alpha) = b - a$ .  $\square$

## 4.8 Exercícios

1. Mostre que o Problema Isoperimétrico 1 é equivalente ao Problema Isoperimétrico 2.
2. Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular e  $\varphi : J \subset \mathbb{R} \rightarrow I$  é um difeomorfismo. Se  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  é definida por  $\beta(s) = \alpha(\varphi(s))$ , mostre que  $\alpha$  e  $\beta$  têm o mesmo traço e o mesmo comprimento  $L(\alpha) = L(\beta)$ .
3. Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma homotetia de fator  $\lambda$ , ou seja  $T(v) = \lambda v$ , e seja  $C \subset \mathbb{R}^2$  uma curva regular fechada de comprimento  $L$  limitando uma região de área  $\mathcal{A}$ . Se  $\tilde{C} = T(C)$  mostre que o comprimento de  $\tilde{C}$  é igual a  $\lambda L$  e a área limitada por  $\tilde{C}$  é igual a  $\lambda^2 \mathcal{A}$ .
4. Mostre que a curva  $\alpha[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (t, \frac{\text{sen } t}{t})$ , se  $t \in (0, 1]$  e  $\alpha(0) = (0, 0)$  não tem comprimento bem definido. [Sugestão: Mostre que o comprimento de  $\alpha$  restrito ao intervalo  $[\epsilon, 1]$  vai para infinito quando  $\epsilon \rightarrow 0$ .]
5. Prove o Lema 4.13.
6. Use a Série de Fourier da função  $f(x) = x^2$ ,  $x \in (-1/2, 1/2)$ ,  $f(x) = f(x + 1)$ , para encontrar a soma  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] Deitmar, A., **A First Course in Harmonic Analysis (2nd edition)**. Universitext-Springer (2004).
- [2] Duondikoetxea, J., **Fourier Analysis**. Academic Press, INC.(2001).
- [3] Dyn, H. & McKean, H. P., **Fourier Series and Integrals**. american Mathematical Society. GSM, vol. 29 (1972).
- [4] Figueiredo, D. G. de, **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais (4<sup>a</sup> edição)**. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro. Projeto Euclides (2003), 274 p.
- [5] Iório R, R. & Iório, V., **Equações Diferenciais Parciais: uma introdução**. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro (1988).
- [6] Landau, E., **Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. 2 vols.**Leipzig: B. G. Teubner, 1909.
- [7] Lima, E. E., **Duas novas demonstrações do Teorema de Jordan-Brouwer no caso diferenciável**. Revista Matemática Universitária, 4, 13-19 (1986)
- [8] Lima, E. E., **Curso de Análise Vol. 2 8<sup>a</sup> Edição**.Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro (2005).

- [9] Lima, E. E., **Curso de Análise Vol. 1** 11<sup>a</sup> Edição. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro (2004).
- [10] Lima, E. E., **Espaço Métricos** 3<sup>a</sup> Edição. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro (1993).
- [11] Moreira, C. G. T. & Saldanha, N. C., **A Desigualdade Isoperimétrica**. Revista Matemática Universitária, 15, 13-19 (1993).
- [12] Ritoré, M. & Ros, A., **Some updates on isoperimetric problems**. The Math. Intelligencer, 24, 9-14 (2002).
- [13] Stein, E. M. & Shakarchi, R., **Fourier Analysis An Introduction**. Princeton University Press. Princeton Lectures in Analysis I, (2003).
- [14] Vretblad, A., **Fourier Analysis and its Applications**. GTM-Springer (2003).

# Índice Remissivo

- $O$  grande, 30
- $C^0(I)$ , 12
- $C^0(\mathbb{T})$ , 20
- $C^k(\mathbb{T})$ , 20
- $C^\infty(I)$ , 20
- $C^\infty(\mathbb{T})$ , 20
- $C^k(I)$ , 20
- $F(\mathbb{T})$ , 19
- $R(I)$ , 11
- $R(\mathbb{T})$ , 20
- $o$  pequeno, 31
  
- Coefficientes de Fourier, 36
- Convergência Dominada, 70
- Convergência em Média Quadrática, 57
- Convergência no sentido de Cesàro, 47
- converge localmente uniformemente, 69
- Convolução, 27
- Curva
  - comprimento de, 100
  - fechada, 98
  - parametrizada pelo comprimento de arco, 100
  - regular, 98
  - reparametrização de, 100
  - simples, 98
  
- Desigualdade
  - de Cauchy-Schwarz, 14
  - triangular, 22
- Desigualdade Isoperimétrica, 100
  
- Espaço de Schwartz, 82
  
- Fórmula de Inversão, 80
- Fórmula de Soma de Poisson, 87
- Fórmula Integral de Poisson, 97
- Função
  - exponencial complexa, 15
  - Hölder, 55
  - Lipschitz, 54
  - periódica, 16, 17
  - Riemann integrável, 9
  
- Identidade Aproximada, 24
- Identidade aproximada, 24
- Identidade de Parseval, 60

- Polarizada, 61
- Integral
  - imprópria, 10
- Lema de Riemann-Lebesgue, 39, 73
- Núcleo de Dirichlet, 42
- Núcleo de Fejér, 48
- Norma quadrática, 56
- Problema Isoperimétrico, 97
- Produto interno, 12
- produto interno, 84
- quadrado integrável, 84
- Série de Fourier, 37
- Somas parciais, 38
- Teorema
  - da aproximação de Weierstrass , 51
  - da Concentração da Massa, 25
  - da existência de uma aproximação contínua, 21
  - de Fejér, 50
- Teorema da Amostragem de Shannon, 93
- Teorema da Convolução, 76
- Teorema de Weyl, 113
- Toro, 19
- Transformada de Fourier, 72
- transformada de Fourier, 75
- Transformada de Fourier Periódica, 51
- Unicidade da Série de Fourier, 51
- uniformemente equidistribuída, 110