

Hiperbolicidade, Estabilidade e Caos em Dimensão Um

Publicações Matemáticas

**Hiperbolicidade, Estabilidade e
Caos em Dimensão Um**

Flavio Abdenur
PUC-Rio

Luiz Felipe Nobili França
PUC-Rio



26^o Colóquio Brasileiro de Matemática

Copyright © 2007 by Flavio Abdenur e Luiz Felipe Nobili França

Direitos reservados, 2007 pela Associação Instituto

Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA

Estrada Dona Castorina, 110

22460-320 Rio de Janeiro, RJ

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Noni Geiger / Sérgio R. Vaz

26^a Colóquio Brasileiro de Matemática

- Aspectos Ergódicos da Teoria dos Números - Alexander Arbieto, Carlos Matheus e Carlos Gustavo Moreira
- Componentes Irredutíveis dos Espaços de Folheações - Alcides Lins Neto
- Elliptic Regularity and Free Boundary Problems: an Introduction - Eduardo V. Teixeira
- **Hiperbolicidade, Estabilidade e Caos em Dimensão Um - Flavio Abdenur e Luiz Felipe Nobili França**
- Introduction to Generalized Complex Geometry - Gil R. Cavalcanti
- Introduction to Tropical Geometry - Grigory Mikhalkin
- Introdução aos Algoritmos Randomizados - Celina de Figueiredo, Guilherme da Fonseca, Manoel Lemos e Vinicius de Sá
- Mathematical Aspects of Quantum Field Theory - Edson de Faria and Wellington de Melo
- Métodos Estatísticos Não-Paramétricos e suas Aplicações - Aluisio Pinheiro e Hildete P. Pinheiro
- Moduli Spaces of Curves - Enrico Arbarello
- Noções de Informação Quântica - Marcelo O. Terra Cunha
- Three Dimensional Flows - Vítor Araújo e Maria José Pacifico
- Tópicos de Corpos Finitos com Aplicações em Criptografia e Teoria de Códigos - Ariane Masuda e Daniel Panario
- Tópicos Introdutórios à Análise Complexa Aplicada - André Nachbin e Ailín Ruiz de Zárate
- Uma Introdução à Mecânica Celeste - Sérgio B. Volchan
- Uma Introdução à Teoria Econômica dos Jogos - Humberto Bortolossi, Gilmar Garbugio e Brígida Sartini
- Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos via Frações Contínuas - Lorenzo J. Díaz e Danielle de Rezende Jorge

ISBN: 978-85-244-0253-1

Distribuição: IMPA

Estrada Dona Castorina, 110

22460-320 Rio de Janeiro, RJ

E-mail: ddic@impa.br

<http://www.impa.br>

Dedicado à memória de Paulo Rogério Sabini

Sumário

1	Dinâmicas no Círculo	7
1.1	O Círculo	7
1.2	Dinâmicas no Círculo	14
1.3	Rotações	20
1.4	Homeomorfismos	23
2	Dinâmica dos Difeomorfismos Morse-Smale	25
2.1	Dois Exemplos: F e G	26
2.2	Pontos Hiperbólicos	30
2.3	Intervalos Monótonos	34
2.4	Difeomorfismos Morse-Smale	36
3	Estabilidade dos Difeomorfismos Morse-Smale	40
3.1	A Métrica C^1 e Conjugações	40
3.2	Estabilidade Local	45
3.3	Estabilidade Global	47
4	A Expansão Linear T_2 do Círculo	53
4.1	Definição de T_2	53
4.2	Dinâmica Topológica de T_2	55
4.3	Dinâmica Simbólica de T_2 : a Construção	63
4.4	Dinâmica Simbólica de T_2 : Inútil	70
5	Transformações Expansoras Não-Lineares	77
5.1	Expansoras Não-Lineares de Grau 2	77
5.2	Expansoras Não-Lineares de Grau k	82

Prefácio: Como Usar Este Livro

Em primeiro lugar, este livro não é comestível. Não o comam.

Ele também é leve demais para ser usado como arma ou para segurar portas, mas pode servir como um razoável peso para papéis (desde que não esteja ventando muito).

O principal uso que temos em mente para ele, porém, é como texto-base do minicurso homônimo, a ser ministrado por nós dois na última semana de Julho de 2007, no 26^o Colóquio Brasileiro de Matemática. O objetivo do tal minicurso é ilustrar num contexto bastante simples – o de aplicações diferenciáveis do círculo – alguns dos conceitos e fenômenos básicos de dinâmica diferenciável, através do estudo de duas classes de aplicações: os difeomorfismos de Morse-Smale e as aplicações expansoras.

Para tanto, é indispensável que os leitores tenham bastante familiaridade com os conceitos de cálculo de funções de uma variável (“Cálculo Um”) e desejável que tenham tido algum contato com matemática rigorosa (i.e., teoremas e suas demonstrações), como vista numa disciplina introdutória de análise ou de espaços métricos.

Na exposição decidimos priorizar a clareza sobre a generalidade. Em alguns casos fizemos demonstrações para casos ligeiramente simplificados (mas que já incluem todas as idéias centrais das demonstrações dos casos gerais), e deixamos os detalhes técnicos dos casos gerais como exercícios. Seguindo uma filosofia parecida, uma das demonstrações (a da estabilidade estrutural dos expansores via dinâmica simbólica, no Capítulo 5) foi deliberadamente feita de maneira

mais heurística do que formal.

Indicamos as afirmações que foram deixadas como exercícios para os alunos da seguinte maneira: “**EXERCÍCIO**”. Esperamos que esta notação não seja demasiadamente ambígua.

Agradecemos a Ana Cristina Oliveira, Lorenzo J. Díaz, Sérgio Volchan, e Thomas Lewiner pela ajuda na formatação do texto e das figuras. Sem o auxílio deles este livro até poderia existir, mas ele teria trechos em cirílico e todas as suas figuras seriam obras de arte abstrata (ruim). Agradecemos também a Henri Anciaux pela revisão do texto.

Um aviso para os incautos: matemática é um assunto sério – até mesmo grave – e deve ser tratada como tal. Como todo bom livro de matemática, este texto é seco, sisudo, e árido. Abandonem todo o bom-humor aqueles que adentrarem estas páginas.

F. A.

L. F. N. F.

Pontifícia Universidade Católica
Rio de Janeiro, 25 de Abril de 2007

Capítulo 1

Dinâmicas no Círculo

Neste livro vamos falar de sistemas dinâmicos diferenciáveis no círculo. Vocês já sabem o que é diferenciabilidade. Falta explicar o que é o círculo, e o que é um sistema dinâmico. Começemos com o círculo.

1.1 O Círculo

Bem, vocês já devem conhecer o círculo unitário como um subconjunto do plano \mathbb{R}^2 :

$$S^1 \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Mas há outras maneiras de ver o círculo, e uma dessas maneiras será bem conveniente neste curso.

Vamos considerar o círculo S^1 como sendo o intervalo unitário fechado $I = [0, 1]$, mas *com os pontos 0 e 1 identificados*. Isto é, se corremos da esquerda para a direita, ao atingirmos o 1 nós somos teletransportados para 0. Uma maneira elegante e bonita de se dizer isso é que o círculo é o conjunto dos números reais *módulo* os inteiros, ou

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Geometricamente vamos representar o círculo como tendo o zero

no seu “pólo norte”, com as coordenadas aumentando no sentido horário. Veja a Figura 1.1 abaixo.

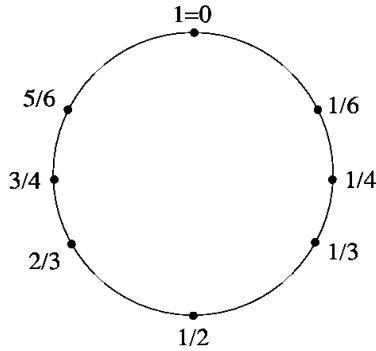


Figura 1.1: O círculo S^1

É claro que temos a nossa noção usual de distância no intervalo I , e que nessa noção usual 0 e 1 não são o mesmo ponto, de fato a distância usual entre eles é $|1 - 0| = 1$. Mas no círculo, 0 e 1 representam o mesmo ponto, e logo a distância entre eles tem que ser igual a zero. Como faremos então para definir a distância entre dois pontos de S^1 quando consideramos S^1 como sendo o intervalo I com os seus extremos identificados?

Primeiro, para evitar ambiguidade, quando trabalharmos com pontos do intervalo como sendo pontos do círculo, vamos usar a notação “[x]” ao invés de “ x ”. (Exceto é claro quando a gente não estiver afim.)

Agora vamos definir a distância no círculo: dados dois pontos $[x], [y] \in S^1$, a *distância* entre eles é dada por

$$d_{S^1}([x], [y]) \equiv \min\{|x - y|, |x - y - 1|, |x - y + 1|\}.$$

(Escreveremos d no lugar de d_{S^1} quando não houver ambiguidade.)

Usando este conceito de distância, temos que $d([0], [1]) = 0$, como desejado. Vamos testar alguns outros pares de pontos:

- i) $d([\frac{1}{10}], [\frac{9}{10}]) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
- ii) $d([\frac{1}{3}], [\frac{2}{3}]) = \frac{1}{3}$
- iii) $d([\frac{19}{20}], [0]) = \frac{1}{20}$
- iv) $d([\frac{1}{3}], [1]) = \frac{1}{3}$

e por aí vai. Brinquem um pouco com essa noção de distância para se familiarizar com ela.

Muitas vezes vamos querer manipular pontos do círculo de maneira que eles serão representados por números *fora* do intervalo $[0, 1]$. Por exemplo, no Capítulo 4 nós vamos multiplicar pontos $[x]$ do círculo por 2, o que é claro pode resultar num número $(2 \cdot x)$ maior do que 1. O que fazemos para lidar com isso é considerar que *números que diferem entre si por um número inteiro representam o mesmo ponto do círculo*. Ao fazermos isso nós estamos tratando os pontos do círculo como “*numeros reais módulo 1*”.

Por exemplo:

- i) O ponto $[1.7]$ é o mesmo que $[0.7]$, ou que $[-0.3]$, ou que $[17.7]$, ou que $0.7 \bmod 1$, ou que $-0.3 \bmod 1$ ou que $98.7 \bmod 1$.
- ii) De maneira semelhante, $[\frac{1}{3}] = [-\frac{2}{3}] = [\frac{10}{3}] = \frac{1}{3} \bmod 1$, etc e tal.
- iii) Segue que $d([1.7], [0]) = 0.3$, que $d([-\frac{2}{3}], [\frac{2}{3}]) = \frac{1}{3}$, que $d([-100006.1], [0.4]) = 0.5$, e assim por diante.

Com a distância d , o círculo se torna um *espaço métrico compacto*. Se vocês já sabem o que é isso, ótimo. Se vocês não sabem, a idéia é a seguinte: um *espaço métrico* é um conjunto X dotado de uma “função distância”, que chamamos de *métrica*, na forma

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+,$$

que associa a cada par de pontos de X um número não-negativo que faz o papel de distância entre os dois pontos. A métrica d tem que satisfazer três axiomas para que tenha propriedades compatíveis com a nossa noção usual de distância:

- a) Vale $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$;

- b) Vale $d(x, y) = d(y, x)$ para todos $x, y \in X$; e
 c) Dados três pontos $x, y, z \in X$ vale

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

EXERCÍCIO: mostre que d_{S^1} é uma métrica no espaço S^1 .

Uma vez que um conjunto X é dotado de uma métrica d , nós chamamos X (mais precisamente, chamamos o par (X, d)) de *espaço métrico*. A reta \mathbb{R} dotada da distância euclidiana é um espaço métrico, como também é o círculo S^1 dotado da métrica que acabamos de definir. Todas as noções usuais de topologia na reta se generalizam para espaços métricos:

- i) Dados um ponto $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, a *bola aberta de raio ε centrada em x* é o conjunto

$$B_\varepsilon(x) \equiv \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$$

- ii) Uma sequência $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de pontos de X *converge* para um ponto $x_0 \in X$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$ então $d(x_n, x_0) < \varepsilon$. Neste caso dizemos que x_0 é o *limite* da sequência $\{x_j\}$.
 iii) Um conjunto $A \subset X$ é *aberto* se para todo $x \in A$ existir algum $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset A$.

Um conjunto $F \subset X$ é *fechado* se dada qualquer sequência convergente $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de pontos de F então o limite x_0 da sequência $\{x_j\}$ pertence a F ; equivalentemente:

Um conjunto $F \subset X$ é *fechado* se $X \setminus F$ é um conjunto aberto de X .

Um conjunto $C \subset X$ é *limitado* se existe algum $\Delta > 0$ tal que $d(x, y) \leq \Delta$ para todo par $x, y \in C$. O menor tal Δ é chamado de *diâmetro* de C .

- iv) Um conjunto $K \subset X$ é *compacto* se dada qualquer sequência $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de pontos de K então existe alguma subsequência $\{x_{j_n}\}$

de $\{x_j\}$ que converge para algum ponto x_0 de K . Se X é completo¹, isto equivale a K ser simultaneamente fechado e limitado.

- v) Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ entre dois espaços métricos X e Y é *contínua* se dado qualquer $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$$

(Reparem que aqui há duas métricas distintas: “ $B_\delta(x)$ ” se refere a uma bola na métrica de X , enquanto que “ $B_\varepsilon(f(x))$ ” se refere a uma bola na métrica de Y .)

Temos duas outras maneiras equivalentes de caracterizar continuidade:

Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é *contínua* se dada uma sequência $\{x_j\}$ em X que converge para um ponto $x_0 \in X$ então vale que a sequência $\{f(x_j)\}$ converge para $f(x_0) \in Y$; ou ainda:

Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é *contínua* se dado qualquer aberto $A \subset Y$ vale que $f^{-1}(A)$ é um aberto de X .

Enfim: o círculo S^1 , quando munido de d , é um espaço métrico; portanto podemos falar de conjuntos abertos e fechados, de convergência de sequências, de continuidade de aplicações definidas no círculo, etc etc.

Observação. *Nos capítulos 4 e 5 veremos mais dois espaços métricos que não são os espaços euclidianos \mathbb{R}^n usuais: espaços de aplicações diferenciáveis e espaços de sequências de símbolos.*

Vamos dar uma olhada em alguns subconjuntos do círculo:

- i) O intervalo $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ é aberto em S^1 .
- ii) O intervalo $[0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{2}{3}, 1]$ é aberto em S^1 .
- iii) O intervalo $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ é fechado em S^1 .
- iv) O intervalo $[0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ é fechado em S^1 .

¹Se você não sabe o que significa ser completo, não se preocupe: todos os espaços métricos que aparecem neste curso são completos.

- v) O intervalo $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ não é nem aberto nem fechado em S^1 .
- vi) O intervalo $[0, \frac{1}{2})$ não é nem aberto nem fechado em S^1 .
- vii) Vale que $[0, 1) = (0, 1] = [0, 1] = S^1$.
- viii) O círculo é limitado (e seu diâmetro é igual a $\frac{1}{2}$: **EXERCÍCIO**), logo *todo subconjunto do círculo é limitado*.
- ix) O círculo é aberto.
- x) O círculo é fechado. Segue que, sendo também limitado e completo, o círculo é compacto.

Observação. Usando a nossa convenção “módulo 1” estabelecida anteriormente, podemos representar os intervalos que aparecem nos itens (ii) e (iv) por $(\frac{2}{3}, \frac{3}{2})$ e $[\frac{-1}{3}, \frac{1}{2}]$, respectivamente. Da mesma forma, podemos representar o círculo todo por $[5, 6)$ ou $(-89, -88]$ ou ainda por $[7.2, 8.2)$.

Neste livro vamos lidar com aplicações diferenciáveis do círculo nele mesmo. Vamos representar os gráficos destas funções em um quadrado de lado 1, onde identificamos os valores 0 e 1 (isto é, eles representam o mesmo ponto). Para que tenhamos continuidade, o gráfico da função deve intersectar o eixo vertical $x = 0$ na mesma coordenada horizontal na qual intersecta o eixo vertical $x = 1$, e intersectar o eixo horizontal $y = 0$ na mesma coordenada vertical na qual intersecta o eixo vertical $y = 1$.

Enfim: vejam alguns exemplos de gráficos de funções contínuas na Figura 1.2. Convençam-se de que elas são de fato contínuas. (As linhas sólidas são os gráficos; as retas tracejadas não fazem parte dos gráficos, elas aparecem apenas para ajudar vocês a se convencerem da continuidade.)

Cenas dos Próximos Capítulos. A aplicação com cara de inocente que aparece na linha dois, coluna dois da Figura 1.2 se chama T_2 ; ela é a grande estrela deste livro. No final do curso vocês conhecerão intimamente a dinâmica dela.

Bem, nessa altura do campeonato as questões de definir diferenciabilidade e de calcular derivadas de funções definidas no círculo não devem ter nenhum mistério. A derivada de uma aplicação $f : S^1 \rightarrow S^1$

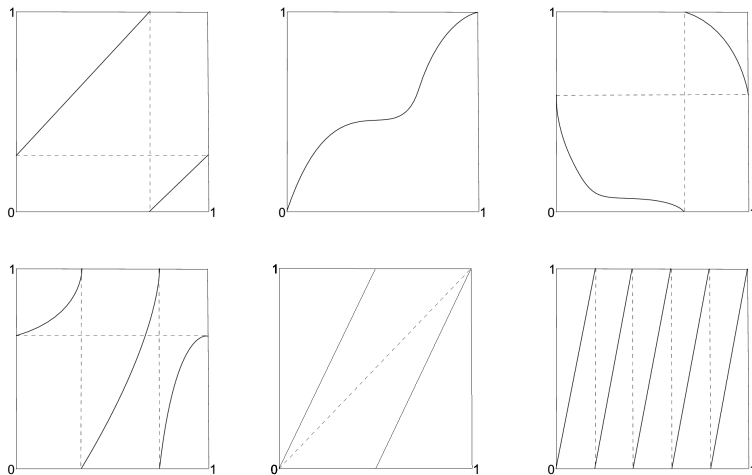


Figura 1.2: Exemplos de funções contínuas do círculo

num certo ponto do círculo é o que ela sempre foi: a inclinação do gráfico naquele ponto. A sua manipulação analítica segue as regras usuais.

Uma última observação: há dois tipos de função monótona do círculo nele mesmo, as “crescentes” e as “decrecentes”: as primeiras são aquelas cujos gráficos sobem da esquerda para a direita, enquanto que as segundas são aquelas cujos gráficos descem da esquerda para a direita. A terminologia técnica aqui é *preserva orientação* e *inverte orientação*, respectivamente. Nos exemplos da Figura 1.2, apenas a função na linha um, coluna três inverte a orientação do círculo; as outras cinco funções preservam orientação.

Para funções que preservam orientação a imagem é percorrida no mesmo sentido (horário ou anti-horário) em que percorremos o domínio; o contrário acontece no caso de inversões de orientação. Veja as Figuras 1.3 e 1.4

Por razões didáticas, neste livro nós ignoraremos solenemente as funções que invertem a orientação do círculo.

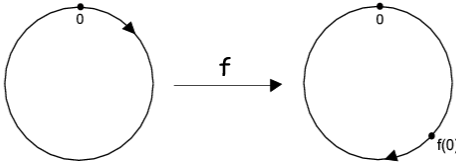


Figura 1.3: Preserva orientação

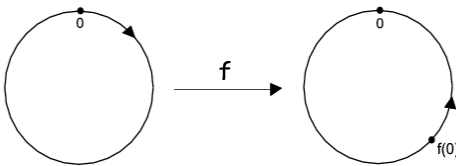


Figura 1.4: Inverte orientação

1.2 Dinâmicas no Círculo

Agora vamos explicar o que queremos dizer com um *sistema dinâmico*. Informalmente, um sistema dinâmico é algo que evolui ao longo do tempo de acordo com uma regra matemática. Essa regra pode assumir a forma de uma aplicação, de uma equação diferencial, de um algoritmo, o que for. Neste livro lidaremos com dinâmicas dadas pela iteração de aplicações de espaços métricos² neles mesmos.

É assim ó: considerem uma aplicação $f : X \rightarrow X$ de um espaço métrico X nele mesmo.

Dado um ponto $x \in X$, podemos aplicar f a este ponto obtendo um novo ponto $f(x)$ de X . E depois aplicar f novamente, obtemos mais um ponto $f(f(x))$; e assim por diante.

Repetindo esta brincadeira sucessivamente, obtemos uma sequência

²Normalmente o círculo, mas não só o círculo.

infinita $\{x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots\}$ de pontos de X . É aqui que entra a nossa noção intuitiva de tempo: a posição inicial de x é “hoje”, a posição de $f(x)$ é “amanhã”, a de $f(f(x))$ a de “depois de amanhã”, e assim por diante.

Por simplicidade, denotaremos

$$f^n(x) \equiv \overbrace{(f \circ f \circ f \dots \circ f)}^{n \text{ vezes}}(x).$$

Estudar dinâmica é tentar entender o comportamento-limite destas seqüências – as *órbitas* do sistema – quando n tende para o infinito.

No caso de f ser uma bijeção (e portanto possuir uma inversa f^{-1}), podemos iterar x por f^{-1} , e denotaremos

$$f^{-n}(x) \equiv \overbrace{(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1} \dots \circ f^{-1})}^{n \text{ vezes}}(x).$$

É claro que aqui estamos lidando com o “passado” do ponto x .

Bem, vamos começar com um exemplo concreto simples. Considerem as iterações da função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$. Tomem os pontos $x_0 = 0,5$ e $x_1 = 1,5$; vamos dar uma olhada no começo de suas órbitas (ilustradas na Figura 1.5 abaixo):

$$\{x_0 = 0,5, f(x_0) \simeq 0,71, f^2(x_0) \simeq 0,84, f^3(x_0) \simeq 0,92, f^4(x_0) \simeq 0,96, \dots\}$$

$$\{x_1 = 1,5, f(x_1) \simeq 1,22, f^2(x_1) \simeq 1,11, f^3(x_1) \simeq 1,05, f^4(x_1) \simeq 1,03, \dots\}$$

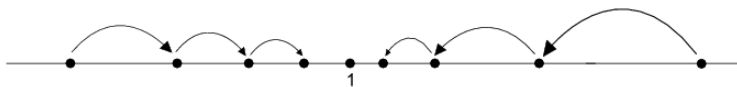


Figura 1.5: Iterações pela função \sqrt{x} dos pontos $x_0 = 0,5$ e $x_1 = 1,5$

É fácil ver (**EXERCÍCIO**) que vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x_1) = 1.$$

Reparem que vale também $f^n(0) = 0$ e $f^n(1) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Mais geralmente, dado qualquer $0 < x_0 < 1$ ou $x_0 > 1$ teremos convergência para 1. Enfim, no final das contas nós descobriremos o comportamento de todos os pontos do domínio sob iterações da função f . É isso que entendemos por “estudar a dinâmica de uma função”. Exceto que em muitos casos não dá para entender a dinâmica de *todos* os pontos; muitas vezes nos satisfazemos com a compreensão da dinâmica de “muitos” ou da “maioria” dos pontos. (É claro que aqui o significado de “muitos” e “maioria” varia de contexto para contexto.)

Em geral queremos entender não apenas convergências simples como as vistas no exemplo acima, mas também diversas outras propriedades dinâmico-topológicas que começaremos a explicar agora.

Para começar: lembrem-se do comportamento atípico dos pontos 1 e 0 no exemplo. Este comportamento – “ficar parado pela dinâmica” – é super importante e merece um nome especial:

Definição 1.1. *Dizemos que um ponto $x \in X$ é um ponto fixo de $f : X \rightarrow X$ se $f(x) = x$. Notem que neste caso vale $f^n(x) = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Se $x \in X$ é um ponto fixo de f^n (isto é, se $f^n(x) = x$) para algum $n \in \mathbb{N}$ então dizemos que x é um ponto periódico de f . Chamamos o menor valor natural de n satisfazendo esta propriedade de período do ponto x . Denotamos por $Fix(f)$ o conjunto de pontos fixos da função f e por $Per(f)$ o conjunto de pontos periódicos de f . Notem que $Fix(f) \subset Per(f)$.

Daqui a pouco veremos vários exemplos de dinâmicas do círculo que têm pontos periódicos de diversos períodos.

Queremos também um nome para as trajetórias dos pontos pelas iterações de f :

Definição 1.2. *Dado $f : X \rightarrow X$ e $x \in X$, a órbita futura de x é o conjunto $O^+(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$. Se f for invertível, chamaremos de órbita passada o conjunto $O^-(x) = \{f^{-n}(x) : n \in \mathbb{N}\}$, e simplesmente de órbita de x o conjunto $O(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$.*

Dependendo das circunstâncias, vamos tratar $O^+(x)$ como um conjunto ou então como uma sequência $O^+(x) = \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Quando um ponto é periódico de período n , a sua órbita “se repete” a cada n iterações de f . Como conjunto, a órbita (futura) de um ponto periódico x de período n é um conjunto finito

$$O(x) = \{f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$$

enquanto que vista como sequência ela é uma sequência infinita cujos termos se repetem a cada n posições.

Definição 1.3. *Dado um sistema dinâmico $f : X \rightarrow X$, dizemos que um ponto $x \in X$ converge no futuro (ou simplesmente converge) para $a \in X$ se vale $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = a$.*

A convergência é exponencial se existe $0 < \lambda < 1$ tal que

$$d(f^n(x), a) < \lambda \cdot d(f^{n-1}(x), a)$$

*para todo $n \in \mathbb{N}$ (o que implica que $d(f^n(x), a) < \lambda^n \cdot d(x, a)$): **EXERCÍCIO**).*

Se f for uma bijeção, temos também a noção de convergência no passado: um ponto x converge no passado para a se x converge para a no futuro em relação ao sistema f^{-1} .

Aqui as expressões “no futuro” e “no passado” reforçam a idéia de que as iterações podem ser vistas como a passagem discreta do tempo. Essa terminologia é emprestada de outras disciplinas (física, biologia, meteorologia e etc), onde os sistemas dinâmicos modelam fenômenos que evoluem com o tempo.

Bem, “para onde vão” as órbitas no futuro? Mais uma palavrinha para o nosso vocabulário:

Definição 1.4. *O ω -limite de um ponto $x \in X$ é o conjunto*

$$\omega(x) \equiv \{y \in X : \text{existe subsequência } n_i \rightarrow +\infty \text{ tal que } f^{n_i}(x) \rightarrow y\}.$$

Isto é, o ω -limite de um ponto x é o conjunto dos pontos de acumulação da sequência $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Se f for uma bijeção, definimos o α -limite de um ponto x como

$$\alpha(x) \equiv \{y \in X : \text{existe subsequência } n_i \rightarrow +\infty \text{ tal que } f^{-n_i}(x) \rightarrow y\}.$$

EXERCÍCIO:

- 1) Se x é um ponto fixo, então $\omega(x) = \{x\}$;
- 2) Se x é um ponto periódico de período n , então $\omega(x) = O^+(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$;
- 3) Se x converge (no futuro) para um ponto fixo p , então $\omega(x) = \{p\}$.

Mas ω -limites podem ser bem mais interessantes do que conjuntos finitos. De fato, em alguns casos podemos ter pontos cujos ω -limites coincidem com o espaço X todo:

Definição 1.5. Dizemos que uma aplicação $f : X \rightarrow X$ é topologicamente transitiva se existe $x \in X$ tal que $\overline{O^+(x)} = X$. Isto é, se existe algum ponto $x \in X$ que “passeia densamente” por X à medida em que o tempo passa³.

Se para todo $x \in X$ tivermos $\overline{O^+(x)} = X$, então dizemos que f é minimal. Obviamente aplicações minimais são transitivas, mas veremos nos Capítulos 4 e 5 que nem todas as aplicações transitivas são minimais.

Em outras palavras, uma aplicação topologicamente transitiva é uma que possui um ponto cuja órbita (futura) é densa. E uma aplicação minimal é uma aplicação cujas órbitas são todas densas.

A seguir, uma útil caracterização topológica de transitividade:

Proposição 1.1. Uma aplicação $f : S^1 \rightarrow S^1$ é topologicamente transitiva se, e somente se, para todo par de abertos não-vazios $U, V \subset S^1$ existir $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Demonstração. Primeiro a ida. Suponham que f é transitiva. Então existe um ponto $x \in S^1$ com órbita futura densa. Dados dois abertos quaisquer $U, V \subset X$, segue da densidade da órbita de x que existem $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $f^n(x) \in U$ e $f^m(x) \in V$. Podemos supor sem perda de generalidade que $m > n$, pois em cada aberto existe uma infinidade de pontos da órbita de x . Temos então que $f^{m-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.

³Equivalentemente, tal que $\omega(x) = X$: **EXERCÍCIO.**

Agora a volta: suponham que todo par de abertos $U, V \subset S^1$ satisfaz a condição do enunciado.

Vamos considerar a seguinte cobertura de S^1 por intervalos abertos:

$$\mathcal{B} \equiv \{(x - y, x + y) \subset S^1 : x, y \in \mathbb{Q}\}.$$

Sendo uma cobertura enumerável, podemos escrevê-la na forma

$$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, \dots\}.$$

Lembrem que dado qualquer $A \subset X$ aberto, então $f^{-n}(A)$ será também aberto (pela continuidade de f). Além disso, é bom lembrar que $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Segue destas observações que dados dois abertos $A, B \subset S^1$ tais que

$$f^n(A) \cap B \neq \emptyset$$

vale então que

$$A \cap f^{-n}(B) \neq \emptyset.$$

Pela hipótese, existe um natural n_1 tal que

$$f^{n_1}(B_1) \cap B_2 \neq \emptyset,$$

e portanto

$$U_1 \equiv B_1 \cap f^{-n_1}(B_2)$$

é um aberto não-vazio.

Tomem agora um aberto $V_1 \subset U_1$ tal que $\overline{V_1} \subset U_1$. Pela hipótese, existe agora um natural n_2 tal que

$$f^{n_2}(V_1) \cap B_3 \neq \emptyset,$$

e portanto

$$U_2 \equiv V_1 \cap f^{-n_2}(B_3)$$

é aberto não-vazio contido em V_1 .

Tomem agora um aberto $V_2 \subset U_2$ tal que $\overline{V_2} \subset U_2$, etc etc... Repetindo este processo indefinidamente, obtemos uma sequência de compactos encaixados não-vazios

$$\overline{V_1} \supset \overline{V_2} \supset \overline{V_3} \supset \dots$$

tal que os pontos de V_n começam em B_1 e intersectam B_{j+1} após n_j -iterações por f , para cada $j \in \{1, \dots, n\}$.

O conjunto $M = \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{V}_i$, sendo a interseção de enumeráveis compactos não-vazios encaixados, é um compacto não-vazio. Afirmamos que todo ponto $x \in M$ tem órbita densa em S^1 . Mas isso é fácil de ver: por construção, a órbita de tal x intersecta todos os B_i 's, que constituem uma base de abertos⁴ de S^1 . \square

Observem que se f é transitiva, então existe um subconjunto $Tr(f)$ denso de X tal que cada $x \in Tr(f)$ tem órbita futura densa em X : de fato, dado um ponto transitivo x de f , então todos os seus iterados futuros $f^n(x)$ têm órbita densa em X .

Observação. *A caracterização topológica de transitividade dada pela Proposição 1.1 acima vale também em espaços métricos gerais (que satisfazem certas condições fracas), com pequenas adaptações na demonstração acima (e.g., a substituição da cobertura \mathcal{B} por uma base enumerável de abertos qualquer).*

1.3 Rotações

Definimos na seção anterior várias noções abstratas de dinâmica; agora chegou a hora de ver alguns exemplos concretos destas noções em ação.

Os tais exemplos são as rotações do círculo. Uma *rotação* de S^1 é uma aplicação $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ da forma $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}$, onde $\alpha \in [0, 1]$.

Um exemplo particularmente bab... boboca de rotação é a rotação R_0 ($= R_1$) de ângulo zero, também conhecida como a identidade. Na sua dinâmica todos os pontos são fixos, e nada acontece. Nunca.

Geometricamente, as rotações giram o círculo no sentido horário. A rotação $R_{\frac{1}{2}}$ gira o círculo 180 graus no sentido horário; a rotação $R_{\frac{1}{3}}$ gira o círculo 120 graus; a rotação $R_{\frac{1}{6}}$ gira o círculo 300 graus; e assim por diante.

⁴Em particular, dado qualquer aberto $A \subset S^1$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $B_j \subset A$.

Claramente, a n -ésima iteração (a n -ésima potência) de uma rotação R_α será ela mesma uma rotação:

$$(R_\alpha)^n(x) = x + n \cdot \alpha \pmod{1} = R_{n \cdot \alpha}(x).$$

EXERCÍCIO: como são os gráficos de rotações? E os de suas potências?

Em termos da dinâmica, há uma divisão dramática entre dois casos: α racional e α irracional.

Se α é racional (digamos $\alpha = p/q$, com p e q inteiros) então **(EXERCÍCIO)** vale que $(R_\alpha)^q(x) = x$ para todo x ; portanto todo ponto de S^1 será um ponto periódico. Se supormos p e q relativamente primos (i.e., sem nenhum fator maior que 1 em comum) – coisa que podemos sempre fazer tomando o MDC de p e q – então vemos que *todos os pontos de S^1 têm o mesmo período: q .*

Algo muito mais interessante ocorre quando temos α irracional:

Proposição 1.2. *Dado $\alpha \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ então para todo $x \in S^1$ vale que $O^+(x) = \{R_\alpha^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em S^1 .*

Em outras palavras, rotações irracionais são minimais (e portanto transitivas).

Demonstração. Primeiro observem que uma rotação irracional não pode ter pontos periódicos, pois do contrário teríamos $R_\alpha^n(x) = x$, ou seja, $(x + n \cdot \alpha) \pmod{1} = x$. Esta última igualdade por sua vez equivale a $n \cdot \alpha = 0 \pmod{1}$, ou seja, $n \cdot \alpha \in \mathbb{Z}$ e portanto teríamos $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Vamos mostrar agora a minimalidade da rotação irracional R_α . Suponhamos por contradição que existe $x \in S^1$ tal que $O^+(x)$ não é denso em S^1 . Então o conjunto $A \equiv S^1 \setminus \overline{O^+(x)}$ é um aberto não-vazio do círculo.

Observem que $\overline{O^+(x)}$ é um conjunto invariante por R_α , e portanto por R_α^{-1} . Ou seja, vale

$$R_\alpha(\overline{O^+(x)}) = \overline{O^+(x)} = (R_\alpha)^{-1}(\overline{O^+(x)}).$$

Segue disso que $R_\alpha(A) = A$.

Fixe uma componente conexa (ou seja, um intervalo aberto maximal) I de A . Afirmamos que vale

$$R_\alpha^n(I) \cap I = \emptyset$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

De fato, se esta afirmação fosse falsa teríamos duas possibilidades:

1. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $R_\alpha^N(I) = I$.

Neste caso, escrevendo $I = (a, b)$, teríamos

$$R_\alpha^N(I) = ((a + N \cdot \alpha) \bmod 1, (b + N \cdot \alpha) \bmod 1) = (a, b),$$

o que implicaria que $a = (a + N \cdot \alpha) \bmod 1$ e portanto que a é um ponto periódico de R_α , uma contradição.

2. O segundo caso é existir $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$R_\alpha^N(I) \neq I \text{ e } R_\alpha^N(I) \cap I \neq \emptyset.$$

Neste caso o conjunto $C \equiv R_\alpha^N(I) \cup I$ é a reunião de dois intervalos contidos em A , e portanto é ele próprio um intervalo contido em A . Mas I é subconjunto próprio de C , logo C está contido numa componente conexa de A que contém propriamente a componente conexa I , uma contradição.

Muito bem, então a afirmação é verdadeira. Vamos usá-la para provar o teorema.

Como vale $R_\alpha^n(I) \cap I = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $R_\alpha^m(I) \cap R_\alpha^n(I) = \emptyset$ para todos os naturais distintos $n \neq m$, pois caso contrário teríamos (supondo $m > n$ sem perda de generalidade) que $R_\alpha^{m-n}(I) \cap I \neq \emptyset$.

Mas iterações de I pela rotação não alteram o comprimento ($= |a - b|$) da componente conexa I , logo se as iterações $R_\alpha^n(I)$ de I são todas mutuamente disjuntas, chegamos a uma contradição, pois o comprimento total da sua reunião

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_\alpha^n(I)$$

seria infinito.

□

Notem que a dinâmica de qualquer rotação é extremamente delicada – “instável” – sob pequenas modificações da rotação. Se R_α é uma rotação racional, e portanto tem todos os seus pontos periódicos, então com uma modificação arbitrariamente pequena do ângulo α nós obtemos um ângulo α^* irracional, cuja rotação associada não tem *nenhum* ponto periódico, e de fato é minimal. Da mesma maneira, podemos “perturbar” uma rotação irracional para que se torne uma rotação racional.

Observação. *Mais adiante, no Capítulo 3, vamos estabelecer o significado geral de se fazer uma “pequena perturbação” de uma aplicação. Em termos do vocabulário que vamos introduzir, o que nós “provamos” no último parágrafo foi que rotações são estruturalmente instáveis; esta instabilidade está relacionada à sua total ausência de hiperbolicidade.*

EXERCÍCIO: Releiam o parágrafo acima depois de terem concluído o livro.

1.4 Homeomorfismos

Bem, na penúltima seção nós apresentamos alguns conceitos abstratos (transitividade, pontos periódicos, etc) que foram ilustramos na última seção com exemplos concretos (as rotações). Vamos apresentar agora mais alguns conceitos abstratos.

As rotações são bijeções diferenciáveis do círculo cujas inversas (que são rotações no sentido anti-horário) também são diferenciáveis. Isto significa que as rotações são *difeomorfismos* do círculo nele mesmo. Mais geralmente temos que:

Definição 1.6. *Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ entre dois espaços métricos é um homeomorfismo se f é bijetiva, contínua, e sua inversa f^{-1} também é contínua.*

Se $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo diferenciável⁵ cuja inversa f^{-1} também é diferenciável, então f é dito um difeomorfismo.

⁵Isto exige que X e Y sejam *variedades diferenciáveis* – espaços nos quais o conceito de derivada faz sentido. Não se assustem: neste livro veremos derivadas apenas no círculo e na reta.

Por exemplo:

- 1) Rotações do círculo são difeomorfismos.
- 2) A aplicação $f(x) = x^3$ é um homeomorfismo diferenciável da reta nela mesma, mas não é um difeomorfismo (por que?)
- 3) A aplicação $f(x) = x^3$, quando restrita aos reais positivos, é um difeomorfismo de $R^{++} \equiv \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ nele mesmo.

A existência de um homeomorfismo entre dois espaços métricos X e Y garante que X e Y possuem exatamente as mesmas propriedades topológicas, tais como conexidade, compacidade, e ser aberto/fechado. Neste caso dizemos que X e Y são *homeomorfos*; esta é a relação de equivalência fundamental em topologia.

Pode-se definir o *número de rotação* de um homeomorfismo f do círculo. Intuitivamente, o número de rotação de f nos dá a “rotação média” que um ponto de S^1 sofre ao percorrer sua órbita por f . O número de rotação é um conceito importantíssimo em dinâmica unidimensional – cujo estudo inclusive já rendeu uma Medalha Fields (a de Jean-Christophe Yoccoz, em 1994) – mas não vamos entrar em detalhes sobre ele (ou mesmo dar a sua definição).

O que interessa aqui é a seguinte consequência não-trivial do conceito de número de rotação:

Teorema 1.1. *Se $f : S^1 \rightarrow S^1$ é um homeomorfismo do círculo, então todos os pontos periódicos de f têm o mesmo período.*

Isso bate com o que vimos com as rotações: no caso racional, todo ponto é periódico com o mesmo período, e no caso irracional não há nenhum ponto periódico. (Notem que o teorema acima não garante – e nem poderia garantir – a *existência* de algum ponto periódico).

Ok, chega de conceito abstrato. Vamos aos exemplos.

Capítulo 2

Dinâmica dos Difeomorfismos Morse-Smale

As aplicações que estudaremos neste livro são todas diferenciáveis. Neste e no próximo capítulo, elas serão mais do que isso: serão difeomorfismos¹. Usaremos a notação $\text{Diff}^1(S^1)$ para denotar o conjunto de todos difeomorfismos C^1 do círculo nele mesmo que preservam a sua orientação. (Aqui “ C^1 ” significa que a derivada do difeomorfismo varia continuamente com os pontos do círculo; não nos preocuparemos com questões de diferenciabilidade mais fina.)

No Capítulo 4 definiremos uma métrica no espaço $\text{Diff}^1(S^1)$; isso nos permitirá perturbar os difeomorfismos e estudar sua estabilidade ou instabilidade global. Neste capítulo nós vamos examinar a dinâmica de difeomorfismos fixos.

¹Lembrando: um difeomorfismo é um homeomorfismo diferenciável com inversa diferenciável.

2.1 Dois Exemplos: F e G

Os difeomorfismos que estudaremos são os *difeomorfismos Morse-Smale* do círculo. Antes de dar a definição, vamos dar uma olhada em dois exemplos deste tipo de difeomorfismo:

Primeiro, considerem a aplicação $F : S^1 \longrightarrow S^1$ dada por

$$F(x) = \frac{1}{40 \cdot \pi} \cdot \text{sen}(4 \cdot \pi \cdot x) + x$$

Veja o gráfico de F na Figura 2.1. A linha tracejada aqui é o gráfico da aplicação identidade $Id(x) \equiv x$.

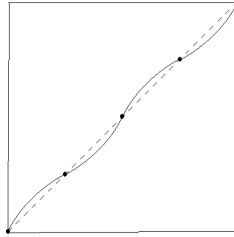
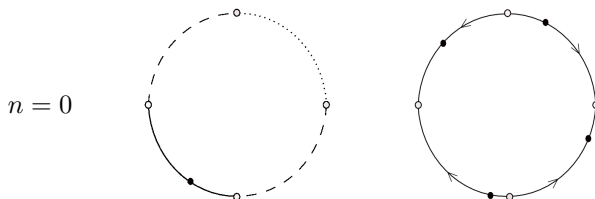


Figura 2.1: O gráfico de F

Então (como como se pode ver no gráfico ou comprovar analiticamente: **EXERCÍCIO**) a aplicação F :

- 1) é um difeomorfismo do círculo;
- 2) possui exatamente 4 pontos fixos: $[0]$, $[\frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{2}]$, e $[\frac{3}{4}]$ – e então, pelo Teorema 1.1, segue que F não possui nenhum outro ponto periódico; e
- 3) tem derivada diferente de 1 em cada um de seus pontos fixos:

$$F'(0) = \frac{11}{10}, \quad F'(\frac{1}{4}) = \frac{9}{10}, \quad F'(\frac{1}{2}) = \frac{11}{10}, \quad \text{e} \quad F'(\frac{3}{4}) = \frac{9}{10}$$

Figura 2.2: Dinâmicas de G e F

Como será a dinâmica de F ? Bem, sabemos que ela possui quatro pontos fixos, que ficarão parados. Um pouco de reflexão deve convencer vocês² do fato de que a derivada ser maior do que 1 em $[0]$ e em $[\frac{1}{2}]$ significará que f “empurra” (ou *repele*) pontos próximos destes dois pontos fixos para longe deles; da mesma forma, o fato da derivada ser menor do que 1 em $[\frac{1}{4}]$ e em $[\frac{3}{4}]$ significará que f “puxa” (ou *atrai*) pontos próximos destes dois pontos fixos para perto deles.

Mas e quanto aos outros pontos do círculo? Veremos neste capítulo que *todos*³ os pontos do círculo irão convergir no futuro para algum dos dois pontos fixos “atratores” $[\frac{1}{4}]$ ou $[\frac{3}{4}]$.

A partir da página 27, e continuando até a página 51, nós colocamos no canto superior direito ilustrações das 10 primeiras iterações de F (e à esquerda delas as iterações de G , definida abaixo). Nestas figuras as bolinhas ocas representam os quatro pontos fixos de F , e as bolinhas cheias representam as iterações de quatro pontos escolhidos ao acaso. Colocamos também setas para indicar as direções de convergência.

Vocês todos já devem ter brincado de desenhar uma série de aviõezinhos ou bonequinhos nos cantos das páginas do caderno e depois virar rapidamente as páginas para ver uma animação, não? Pois bem, façam isto⁴ com esse livro a partir da página 27 e vocês “verão” a dinâmica de F . Notem que todos os pontos cheios convergem no futuro para algum dos pontos fixos (as bolinhas ocas $[\frac{1}{4}]$ e $[\frac{3}{4}]$).

²Se não convencer, não se preocupe: vamos provar isto e muito mais no caso geral.

³Com exceção é claro dos pontos fixos $[0]$ e $[\frac{1}{2}]$.

⁴Virar as páginas, não desenhar aviões ou bonecos.

Vamos agora ao nosso segundo exemplo: considerem a aplicação $G : S^1 \rightarrow S^1$ dada por

$$G(x) \equiv (F(x) + \frac{1}{2}) \text{ mod } 1 = (\frac{1}{40 \cdot \pi} \cdot \text{sen}(4 \cdot \pi \cdot x) + x + \frac{1}{2}) \text{ mod } 1$$

Veja o gráfico de G na Figura 2.3. Notem que ele não intersecta a identidade, pois G não possui pontos fixos.

Assim como F , a aplicação G é um difeomorfismo do círculo. Mas ao contrário de F , agora temos não quatro pontos fixos, mas sim quatro pontos periódicos de período 2: os pontos $[0]$, $[\frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{2}]$, e $[\frac{3}{4}]$.

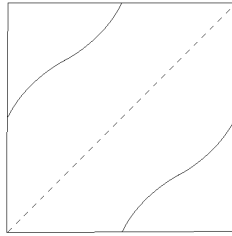


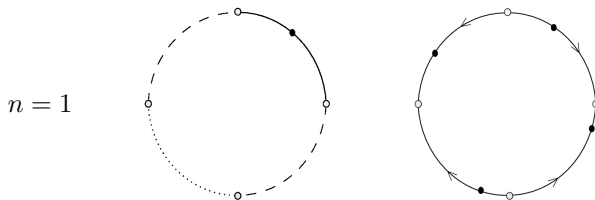
Figura 2.3: O gráfico de G

Notem que vale $G([0]) = [\frac{1}{2}]$ e $G([\frac{1}{2}]) = [0]$, e também $G([\frac{1}{4}]) = [\frac{3}{4}]$ e $G([\frac{3}{4}]) = [\frac{1}{4}]$; temos portanto duas *órbitas* periódicas.

O que muda na dinâmica? Bem, podemos ver no lado esquerdo das figuras a partir da página 27 que algo um pouco mais complicado está acontecendo neste caso. Assim como os pontos $[0]$ e $[\frac{1}{2}]$ (e também os pontos $[\frac{1}{4}]$ e $[\frac{3}{4}]$) são permutados por G a cada iteração, o mesmo acontece com os intervalos entre os quatro pontos periódicos: os intervalos $[0, \frac{1}{4}]$ e $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ são permutados a cada iteração de G , e o mesmo acontece com os intervalos $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ e $[\frac{3}{4}, 1]$.

Nas figuras nós usamos linhas sólidas e linhas pontilhadas para representar as sucessivas permutações dos intervalos $[0, \frac{1}{4}]$ e $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.

Para facilitar a compreensão da dinâmica, nas figuras que se referem a G nós colocamos as iterações de um único ponto (a bolinha cheia). Na medida em que o iteramos por G , esse ponto pula alternadamente do intervalo $[0, \frac{1}{4}]$ para o intervalo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, e deste segundo de volta para o primeiro.

Figura 2.4: Dinâmicas de G e F

Reparem que $G^2 = F^2$; portanto as iterações por tempos pares de G se comportam exatamente como as iterações por tempos pares de F . Isso nos dá uma pista para entender o comportamento do ponto cheio: ele não está (e nem poderia estar) convergindo para nenhum *ponto* periódico, mas sim para uma *órbita* periódica – a órbita $[\frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}]$.

Novamente, isto tem a ver com o valor da derivada. Desta vez o que importa não é a derivada de G , mas sim a derivada de sua potência G^2 nos pontos da órbita periódica: aplicando a regra da cadeia, vale

$$(G^2)'(\frac{1}{4}) = (G^2)'(\frac{3}{4}) = \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} = \frac{81}{100} < 1,$$

o que significa que a órbita $[\frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}]$ atrai pontos próximos.

Analogamente, temos

$$(G^2)'(0) = (G^2)'(\frac{1}{2}) = \frac{11}{10} \cdot \frac{11}{10} = \frac{121}{100} > 1,$$

o que significa que a órbita $[0] \cup [\frac{1}{2}]$ afasta (ou *repele*) pontos.

Ou seja, no final das contas as dinâmicas de F e G têm algumas características fundamentais em comum: (i) elas possuem órbitas periódicas, algumas das quais – as com derivada menor do que 1 – atraem pontos, enquanto que outras – as com derivada maior do que 1 – repelem pontos; e (ii) todos os pontos⁵ de S^1 acabam convergindo para alguma das órbitas periódicas atratoras. Como vamos ver daqui a pouco, esse tipo de dinâmica simples é característico dos difeomorfismos Morse-Smale.

⁵Exceto os pontos periódicos repulsores.

2.2 Pontos Hiperbólicos

Nos dois exemplos acima o fato da derivada ser diferente de 1 nos pontos fixos/periódicos teve um papel importante. Temos um nome para tais pontos:

Definição 2.1. *Um ponto fixo x de um difeomorfismo $f \in \text{Diff}^1(S^1)$ é hiperbólico se $f'(x) \neq 1$. Se $f'(x) < 1$ dizemos que este ponto fixo é um atrator, e se $f'(x) > 1$ dizemos que é um ponto fixo repulsor.*

Mais geralmente: dado x um ponto periódico de período n , dizemos que é um ponto periódico hiperbólico se x é ponto fixo hiperbólico de f^n . O ponto x será um atrator ou repulsor periódico conforme $(f^n)'(x)$ for menor ou maior do que 1, respectivamente.

O conceito de hiperbolicidade assume diferentes sentidos em diferentes contextos, mas está sempre relacionado à idéia de contração e/ou expansão exponencial de distâncias. Os nomes “atrator” e “repulsor” da definição acima são justificados pelas próximas proposições.

Proposição 2.1. *Seja x um ponto fixo hiperbólico atrator de um difeomorfismo $f \in \text{Diff}^1(S^1)$, com $f'(x) = \lambda < 1$. Então dado $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança U_ϵ de x tal que*

$$d(f^n(y), x) < (\lambda + \epsilon)^n \cdot d(y, x)$$

para todo $y \in U_\epsilon$ e $n \in \mathbb{N}$.

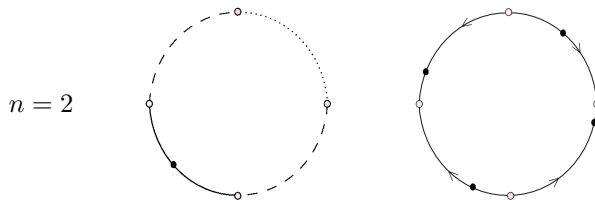
Notem que isto implica que todo ponto y de U_ϵ converge exponencialmente para o ponto fixo x , a uma taxa arbitrariamente próxima de $f'(x)$ (bastando tomar U_ϵ pequena). Em particular vale $\omega(y) = \{x\}$.

Veja na Figura 2.6 uma ilustração da dinâmica em torno de um ponto fixo atrator P . As setas indicam o que as sucessivas iterações estão fazendo com as trajetórias dos pontos iniciais x_0 e x_1 .

Demonstração. Dado um $\epsilon > 0$ pequeno, vale pela continuidade de f' que tomando um intervalo suficientemente pequeno $U_\epsilon = (x - \delta, x + \delta)$ em torno de x teremos $f'(z) < \lambda + \epsilon < 1$ para todo $z \in U_\epsilon$.

Segue então pelo Teorema do Valor Médio que dado $y \in U_\epsilon$ existe algum c entre x e y tal que

$$d(f(y), f(x)) = f'(c) \cdot d(y, x) < (\lambda + \epsilon) \cdot d(y, x).$$

Figura 2.5: Dinâmicas de G e F

Como x é fixo vale $d(f(y), f(x)) = d(f(y), x)$. Obtemos então a desigualdade

$$d(f(y), x) < (\lambda + \epsilon) \cdot d(y, x).$$

Agora nós iteramos este argumento: temos que $f(y)$ pertence ao intervalo U_ϵ pois sua distância até x é menor do que a distância de y até x . Logo podemos aplicar o argumento acima ao ponto $f(x)$, obtendo

$$d(f^2(y), x) < (\lambda + \epsilon)^2 \cdot d(y, x),$$

e assim por diante.

Concluimos que $d(f^n(y), x) < (\lambda + \epsilon)^n \cdot d(y, x)$, como desejado. \square

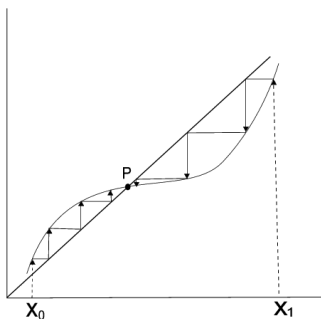


Figura 2.6: Um ponto fixo atrator

Temos também o análogo desta proposição para pontos fixos repulsores⁶:

Proposição 2.2. *Seja x é um ponto fixo hiperbólico repulsor de um difeomorfismo $f \in \text{Diff}^1(S^1)$, com $f'(x) = \lambda > 1$. Então dado $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança U_ϵ de x tal que $d(f(y), x) > (\lambda - \epsilon) \cdot d(y, x)$ para todo $y \in U_\epsilon$.*

Isto implica que todo ponto y de U_ϵ se afasta exponencialmente do ponto fixo x , a uma taxa arbitrariamente próxima de $f'(x)$, até ser “expulso” da vizinhança U_ϵ . Em particular vale $\alpha(y) = \{x\}$.

Veja a Figura 2.7.

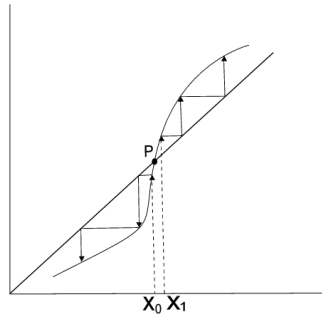


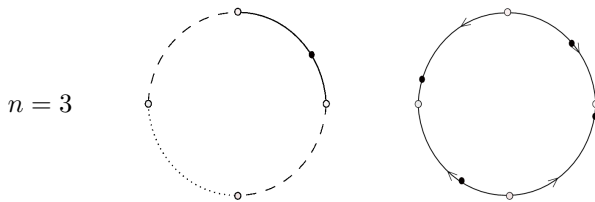
Figura 2.7: Um ponto fixo repulsor

Segue das duas proposições acima que

Corolário. *Todo ponto fixo hiperbólico x é isolado: existe vizinhança V de x tal que o único ponto fixo de f em V é o próprio x .*

Demonstração. Se x é um ponto fixo atrator, a Proposição 2.1 nos diz que existe uma vizinhança de x que é toda atraída para x , e portanto não pode haver outro ponto fixo nesta vizinhança. Se x for ponto fixo repulsor, então x é ponto atrator de f^{-1} e portanto é também isolado. \square

⁶Cuja demonstração, análoga à demonstração acima, fica como **EXERCÍCIO** para vocês.

Figura 2.8: Dinâmicas de G e F

Como a dinâmica do exemplo G sugere, as órbitas de pontos periódicos hiperbólicos também atraem pontos próximos:

Proposição 2.3. *Seja x um ponto periódico hiperbólico atrator com período k de um difeomorfismo $f \in \text{Diff}^1(S^1)$, com $(f^k)'(x) = \lambda < 1$. Então dado $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança U_ϵ de x tal que*

$$d(f^n(y), f^n(x)) < ((\lambda + \epsilon))^{\frac{n}{k}} \cdot d(y, x)$$

para todo $y \in U_\epsilon$ e $n \in \mathbb{N}$.

Ou seja, “a órbita de todo ponto y de U_ϵ converge exponencialmente para a órbita do ponto fixo x ”, a uma taxa arbitrariamente próxima de $((f^k)'(x))^{\frac{1}{k}}$ (bastando tomar U_ϵ pequena). Em particular vale $\omega(y) = O^+(x)$.

Demonstração. (Apenas esboçaremos a demonstração; deixamos os detalhes como **EXERCÍCIO**.)

Aplicamos a Proposição 2.1 a f^k , que tem x como ponto fixo com derivada $\lambda < 1$. Temos então que $\{f^{n \cdot k}(y)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge exponencialmente (a uma taxa próxima de λ) para x se tomarmos y próximo de x . Aplicando este mesmo argumento a $f(x)$, depois a $f^2(x), \dots$, e a $f^{k-1}(x)$ chegamos à conclusão desejada. \square

Temos uma proposição análoga para pontos periódicos repulsores, cuja formulação fica como um **EXERCÍCIO**.

Novamente, segue imediatamente das proposições anteriores que

Proposição 2.4. *Todo ponto periódico hiperbólico x é isolado: existe vizinhança V de x tal que o único ponto periódico de f em V é o próprio x .*

Em suma, agora nós entendemos a dinâmica local em torno de um ponto periódico hiperbólico: os pontos com derivada menor do que um atraem exponencialmente todos os pontos próximos, enquanto que os pontos com derivada maior do que um repelem exponencialmente todos os pontos próximos.

2.3 Intervalos Monótonos

Considerem agora um homeomorfismo f de um intervalo compacto da reta $[a, b]$ nele mesmo tal que os únicos pontos fixos de f são a e b . Evidentemente temos duas possibilidades:

- 1) Vale $f(x) > x$ para todo $x \in (a, b)$; ou então
- 2) Vale $f(x) < x$ para todo $x \in (a, b)$.

Em outras palavras, o sinal de $f - Id$ é constante no interior (a, b) do intervalo $[a, b]$, podendo ser positivo ou negativo.

A proposição seguinte caracteriza a dinâmica de f no intervalo $[a, b]$ no caso de sinal positivo. E além disso justifica batizar tais intervalos de *monótonos* (em relação a f):

Proposição 2.5. *Seja $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ um homeomorfismo de um intervalo compacto da reta $[a, b]$ nele mesmo tal que os únicos pontos fixos de f são a e b . Suponham que vale $f(x) - x > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então dado qualquer $x \in (a, b)$ vale*

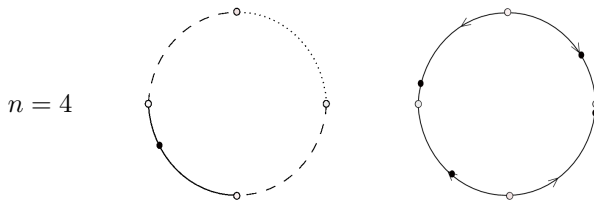
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = b \quad e \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-n}(x) = a.$$

Demonstração. Seja $x \in (a, b)$. Temos então que $f(x) > x$, e que $f^2(x) > f(x)$ (pois $f^2(x) - f(x) > 0$), e que $f^3(x) > f^2(x)$, e assim por diante.

Ou seja, a sequência $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é estritamente crescente, e também cotada superiormente por b . Segue pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass que ela converge para algum ponto p^* no compacto $[a, b]$.

Mas pela continuidade de f temos então que

$$f(p^*) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(f^n(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{n+1}(x) = p^*,$$

Figura 2.9: Dinâmicas de G e F

logo p^* é ponto fixo de f . Como a e b são por hipótese os únicos pontos fixos de f , e como p^* obviamente não pode coincidir com a , temos então que $p^* = b$.

Um argumento análogo mostra que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-n}(x) = a$. \square

No caso do sinal de $f - Id$ ser negativo em (a, b) , um raciocínio simétrico mostra que vale

Proposição 2.6. *Seja $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ um homeomorfismo de um intervalo compacto da reta $[a, b]$ nele mesmo tal que os únicos pontos fixos de f são a e b . Suponham que vale $f(x) - x < 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então dado qualquer $x \in (a, b)$ vale*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = a \quad e \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-n}(x) = b.$$

De agora em diante vamos chamar intervalos monótonos $[a, b]$ tais que $(f - Id)|_{(a,b)} > 0$ de *intervalos monótonos crescentes*, e intervalos monótonos $[a, b]$ tais que $(f - Id)|_{(a,b)} < 0$ de *intervalos monótonos decrescentes*. (Reparem que aqui os termos “crescente” e “decrescente” aludem não ao gráfico de f – que nós estamos supondo sempre crescente – mas sim à dinâmica que as iterações de f induzem no intervalo.)

Portanto num intervalo monótono, uma de duas coisas acontece: se o sinal de $f - Id$ for positivo (ou seja, se o intervalo for crescente), as órbitas andam da esquerda para a direita, convergindo no futuro para o extremo direito b e no passado para o extremo esquerdo a . E se o sinal de $f - Id$ for negativo (ou seja, se o intervalo for decrescente), acontece o contrário: as órbitas andam da direita para a esquerda,

convergindo no futuro para o extremo esquerdo a e no passado para o extremo direito b .

E nós já vimos esse comportamento! No caso do exemplo F , temos quatro intervalos monótonos: $I_1 \equiv [0, \frac{1}{4}]$, $I_2 \equiv [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $I_3 \equiv [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, e $I_4 \equiv [\frac{3}{4}, 1]$. No interior de I_1 e de I_3 o sinal de $F - Id$ é positivo, enquanto que no de I_2 e de I_4 o sinal de $F - Id$ é negativo.

Portanto com as proposições acima nós entendemos *toda* a dinâmica do exemplo F , que já tinha sido sugerida pela sequência de desenhos a partir da página 27: os quatro pontos fixos ficam é claro parados pelas iterações, enquanto que os demais pontos todos convergem para $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$ no futuro, e para 0 ou $\frac{1}{2}$ no passado, dependendo de a qual dos quatro intervalos monótonos I_1, I_2, I_3 , e I_4 eles pertencem. Mais do que isso, a convergência para os extremos é exponencial, e com uma taxa exponencial da ordem de $\frac{9}{10}$ para iterados próximos aos extremos.

2.4 Difeomorfismos Morse-Smale

Chegou finalmente a hora de definir a classe com a qual estamos trabalhando:

Definição 2.2. *Dizemos que um difeomorfismo $f \in \text{Diff}^1(S^1)$ de S^1 é Morse-Smale se:*

- i) f possui pelo menos um ponto periódico; e*
- ii) todo ponto periódico de f é hiperbólico.*

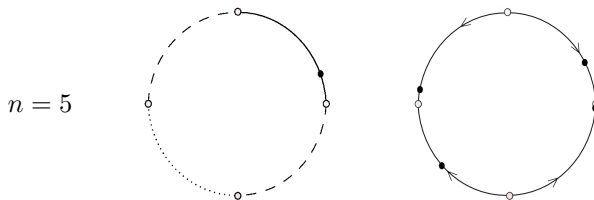
Lembramos que, sendo f um difeomorfismo, segue do Teorema 1.1 que todos os pontos periódicos de f terão exatamente o mesmo período.

E como os pontos periódicos hiperbólicos são isolados, e além disso o círculo é compacto, segue que o conjunto $Per(f)$ dos pontos periódicos de um difeomorfismo Morse-Smale f será sempre finito.

É fácil verificar (**EXERCÍCIO**) que os exemplos F e G são de fato difeomorfismos Morse-Smale.

Como é a dinâmica dos difeomorfismos Morse-Smale?

Para simplificar as coisas vamos supor inicialmente que os pontos periódicos do nosso Morse-Smale f são pontos fixos.

Figura 2.10: Dinâmicas de G e F

Bem, então f tem finitos pontos fixos p_1, \dots, p_k no círculo, todos eles hiperbólicos. Vamos supor que eles estão ordenados de maneira crescente ao longo do círculo, isto é, que vale

$$p_1 < p_2 < \dots < p_k,$$

onde estamos tomando as únicas representações dos pontos em $[0, 1)$.

Observação. *Nesta discussão nós usamos a convenção de que $p_{k+1} = p_1$.*

Vejam os que acontece entre dois pontos fixos vizinhos p_i e p_{i+1} : sabemos que não há nenhum ponto fixo no intervalo (p_i, p_{i+1}) , logo vale $f(x) - x \neq 0$ para todo $x \in (p_i, p_{i+1})$. Pela continuidade de f , segue que o sinal de $f - Id$ é constante (positivo ou negativo) no intervalo (p_i, p_{i+1}) .

Concluimos que **cada intervalo $[p_i, p_{i+1}]$ é monótono para $f|_{[p_i, p_{i+1}]}$!**

Além disso, é fácil ver (**EXERCÍCIO**) que a hiperbolicidade de cada p_i garante que se $[p_i, p_{i+1}]$ é um intervalo crescente, então seus intervalos vizinhos $[p_{i-1}, p_i]$ e $[p_{i+1}, p_{i+2}]$ são intervalos monótonos decrescentes, e vice-versa. (O que aliás garante que k é par.)

Ou seja – e abusando grotescamente da terminologia – concluimos também que **intervalos vizinhos têm sinais opostos!**

Juntando todas estas peças, e aplicando a elas as Proposições 2.1, 2.2, 2.5, e 2.6, nós montamos o quebra-cabeças da dinâmica de qualquer Morse-Smale f com pontos fixos:

- i) Existem finitos pontos fixos $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ de f , cada um deles hiperbólico;
- ii) O número k de pontos fixos é par;
- iii) Se p_i é atrator, então p_{i+1} é repulsor: os atratores e repulsores se alternam ao longo do círculo;
- iii) Os pontos fixos p_i dividem o círculo em k intervalos monótonos I_1, I_2, \dots, I_k que se alternam entre crescentes e decrescentes⁷.

Conclusão: a dinâmica topológica de f é a seguinte: os k pontos fixos p_i ficam parados, enquanto que pontos no interior de cada intervalo I_i convergem (eventualmente exponencialmente) no futuro para o extremo atrator e no passado para o extremo repulsor.

Ou seja, módulo o número de intervalos/pontos fixos, e a distribuição destes no círculo, a dinâmica de todo difeomorfismo Morse-Smale com pontos fixos se parece muito com a dinâmica do exemplo F que examinamos no começo deste capítulo.

E o que acontece no caso de um Morse-Smale g cujos pontos periódicos têm período maior do que 1? Bem, novamente o exemplo G serve de modelo para o caso geral. E a nossa análise para o caso de pontos fixos é facilmente adaptada para o caso periódico:

- Teremos uma partição do círculo não em intervalos invariantes monótonos, mas sim em intervalos *periódicos* monótonos. Isto é, teremos intervalos I_1, I_2, \dots, I_s cujos extremos são os pontos periódicos de g , e portanto teremos que para cada $j \in \{1, \dots, s\}$ vale $g^\ell(I_j) = I_j$ onde ℓ é o período comum a todos os pontos periódicos de g . Então cada I_j será um intervalo monótono (crescente ou decrescente) para g^ℓ . (Notem que o número de intervalos s será um múltiplo do período ℓ .)

⁷Os intervalos crescentes são aqueles que tem um ponto fixo repulsor à esquerda e um ponto fixo atrator à direita; já os intervalos decrescentes são aqueles que tem um ponto fixo atrator à esquerda e um ponto fixo repulsor à direita.

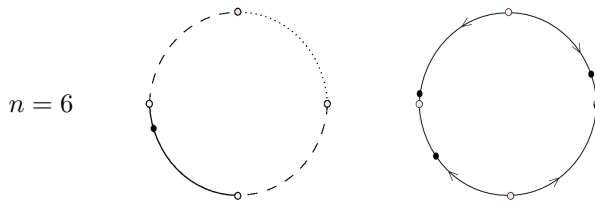


Figura 2.11: Dinâmicas de G e F

- Dinamicamente, os pontos do interior de cada I_j convergirão (eventualmente exponencialmente) no futuro para a *órbita* de um dos extremos – o extremo atrator – de I_j , como no enunciado da Proposição 2.3. E no passado eles convergirão para a órbita do outro extremo de I_j – o extremo repulsor.

Agora que conseguimos entender a dinâmica global dos difeomorfismos Morse-Smale, vamos estudar o que acontece quando damos um peteleco nela.

Capítulo 3

Estabilidade dos Difeomorfismos Morse-Smale

Para podermos dar petelecos em difeomorfismos precisamos de uma noção de distância entre dois difeomorfismos. Isto é, precisamos definir uma métrica no espaço $\text{Diff}^1(S^1)$. Vamos lá.

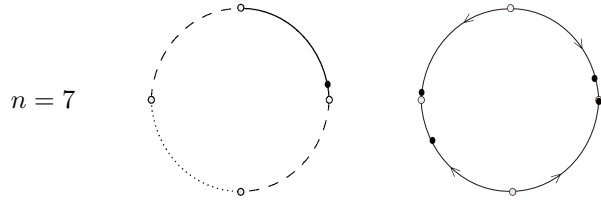
3.1 A Métrica C^1 e Conjugações

Definição 3.1. A distância C^1 entre dois difeomorfismos $f : X \rightarrow X$ e $g : X \rightarrow X$, onde $X = [a, b]$ ou $X = S^1$, é dada por

$$d_1(f, g) \equiv \sup_{x \in X} \{ \max\{d_{S^1}(f(x), g(x)), |f'(x) - g'(x)|\} \}.$$

Ou seja, dois difeomorfismos f e g estão próximos se as imagens e as derivadas de f e g estão próximas em todos os pontos do círculo. Como o círculo e os intervalos fechados limitados são compactos, e como estamos supondo que os difeomorfismos têm derivadas contínuas, segue por Weierstrass que o supremo que aparece na definição é sempre atingido em algum ponto do círculo.

Dizemos que f é C^1 - ϵ -próxima de g se $d_1(f, g) < \epsilon$. Dizemos então que g é uma perturbação de f .

Figura 3.1: Dinâmicas de G e F

A aplicação $d_1 : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ é de fato uma métrica no espaço dos difeomorfismos de X em X ; deixamos a verificação disto como **EXERCÍCIO**. (Além disso esta métrica é completa.)

Notem que para um difeomorfismo g estar C^1 -próximo de f os gráficos de f e g não somente têm que estar próximos ponto-a-ponto, mas *as suas inclinações* também devem estar próximas em cada ponto de X .

Mais um **EXERCÍCIO**: Esboce gráficos de dois difeomorfismos que estão próximos ponto-a-ponto mas cuja distância C^1 é enorme.

Queremos estudar a *estabilidade* de difeomorfismos sob pequenas perturbações C^1 . Isto é, queremos entender se a dinâmica permanece “essencialmente a mesma” quando mudamos ligeiramente o difeomorfismo. Precisamos então de uma boa noção de quando dois difeomorfismos possuem dinâmicas “essencialmente idênticas”.

Lembramos que os homeomorfismos são aplicações que preservam as propriedades topológicas do espaço, tais como cardinalidade, conexidade, compacidade, e densidade. Nada mais natural então que usarmos homeomorfismos para definir quando duas dinâmicas são idênticas do ponto de vista topológico. E queremos ainda fazer isso de maneira a preservar também as propriedades topológicas *da dinâmica*, tais como transitividade, minimalidade, número de pontos fixos, número e períodos de pontos periódicos.

Definição 3.2. *Sejam X e Y dois espaços métricos. Duas aplicações contínuas $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$ são topologicamente conjugadas se existe um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que $h \circ f = g \circ h$.*

Ou seja, tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Chamamos o homeomorfismo h de conjugação topológica entre f e g .

Como veremos agora, duas funções topologicamente conjugadas possuem a mesma dinâmica topológica.

Primeiro: se x é ponto fixo de uma aplicação f que é conjugada a g por um homeomorfismo h , então $h(x) = h \circ f(x) = g \circ h(x)$. Logo $h(x)$ é um ponto fixo de g . Assim, h leva o conjunto de pontos fixos de f no conjunto de pontos fixos de g . Como h é homeomorfismo, ele preserva todas as propriedades topológicas do conjunto $Fix(f)$ para $Fix(g)$, tais como a sua cardinalidade. O mesmo vale para o conjunto $Per(f)$ dos pontos periódicos, como consequência da seguinte proposição:

Proposição 3.1. *Se f é topologicamente conjugado a g pelo homeomorfismo h , então f^n é conjugado a g^n pelo homeomorfismo h para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Basta observar que

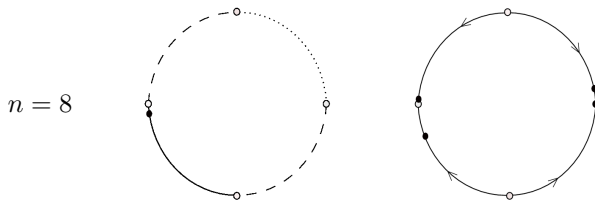
$$h \circ f^n \circ h^{-1} = \underbrace{(h \circ f \circ h^{-1}) \circ \dots \circ (h \circ f \circ h^{-1})}_{n \text{ vezes}}$$

e

$$h \circ f \circ h^{-1} = g$$

Portanto $h \circ f^n \circ h^{-1} = g^n$. \square

Transitividade e minimalidade também são invariantes por conjugação topológica:

Figura 3.2: Dinâmicas de G e F

Proposição 3.2. *Se $f : X \rightarrow X$ é conjugada a $g : Y \rightarrow Y$, sendo f transitiva (com x um ponto de órbita densa em X), então g também é transitiva (tendo $h(x)$ com órbita densa em Y). Conseqüentemente, se f é minimal então g é minimal.*

Demonstração. Vamos mostrar que o homeomorfismo h leva conjuntos densos em X em conjuntos densos em Y .

De fato, se D é denso em X , então dado qualquer $a \in X$ existe uma sequência $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset D$ tal que $\lim_{i \rightarrow +\infty} u_i = a$. Por continuidade de h , temos então $\lim_{i \rightarrow \infty} h(u_i) = h(a)$.

Dado agora um $b \in Y$ arbitrário, considerem $a \equiv h^{-1}(b) \in X$. Pelo o que acabamos de ver, existe uma sequência em $h(D)$ convergindo para $h(a) = b$. Pela arbitrariedade da escolha de b segue que $h(D)$ é denso em Y .

Se supomos que o conjunto $O^+(x)$ é denso em X , segue que

$$h(O^+(x)) = \{h(f^n(x)) \mid n \in \mathbb{N}\} = \{g^n(h(x)) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

é denso em Y . Portanto $h(x)$ é um ponto de órbita densa para g . \square

Informalmente: duas aplicações são topologicamente conjugadas se elas possuem exatamente a mesma dinâmica topológica, “módulo uma mudança contínua de coordenadas” – dada pelo homeomorfismo h .

Veremos agora que a existência de conjugação topológica forma uma relação de equivalência¹. (Em particular, os enunciados acima devem todos ser lidos como “ f é transitiva se e somente se g é transitiva”, “ f é minimal se e somente se g é minimal”, e assim por diante.)

De fato, a reflexividade e simetria são imediatas². E a relação é também transitiva, pois se $f = h \circ g \circ h^{-1}$ e $g = \ell \circ j \circ \ell^{-1}$ temos $f = h \circ (\ell \circ j \circ \ell^{-1}) \circ h^{-1} = (h \circ \ell) \circ j \circ (h \circ \ell)^{-1}$ e portanto $h \circ \ell$ conjuga f e j .

Agora que temos um conceito de distância entre difeomorfismos e também uma relação de equivalência que reconhece a topologia das dinâmicas, estamos prontos para definir estabilidade.

Definição 3.3. *Seja $X = [a, b]$ ou $X = S^1$. Dizemos que uma aplicação $f : X \rightarrow X$ é (C^1) -estruturalmente estável se existe $\epsilon > 0$ tal que toda $g : X \rightarrow X$ que está C^1 - ϵ -próxima de f é topologicamente conjugado a f .*

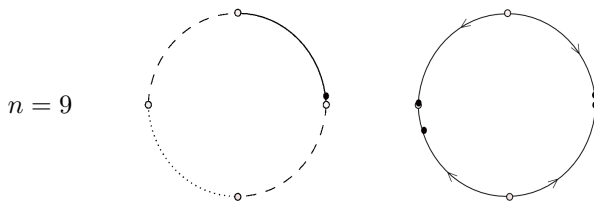
Equivalentemente: uma aplicação diferenciável f é estruturalmente estável se a classe de equivalência por conjugação à qual f pertence é um conjunto aberto no espaço das aplicações diferenciáveis de X . Ou então: uma aplicação diferenciável f é estruturalmente estável se a sua dinâmica permanece – topologicamente falando – inalterada após pequenos petelecos na métrica C^1 .

Há uma relação estreitíssima – quase de equivalência – entre estabilidade e hiperbolicidade. Vamos começar a vislumbrar esta relação na próxima seção.

¹Uma relação de equivalência é relação \sim num conjunto A tal que

- i) $x \sim x$ para todo $x \in A$ (*reflexividade*);
- ii) $x \sim y$ se e somente se $y \sim x$ (*simetria*); e
- i) Se $x \sim y$ e $y \sim z$ então $x \sim z$ (*transitividade*).

²**EXERCÍCIO:** Toda f é conjugada a si mesma pela identidade em X , e h^{-1} serve como conjugação entre g e f se h for conjugação entre f e g .

Figura 3.3: Dinâmicas de G e F

3.2 Estabilidade Local

As duas próximas proposições dizem respeito à robustez (da existência) dos pontos fixos hiperbólicos. Dizemos que uma propriedade de um sistema é *robusta* quando ela se mantém após qualquer perturbação suficientemente pequena do sistema. Como antes, aqui X denota um intervalo ou o círculo todo.

Proposição 3.3. *Seja $f : X \rightarrow X$ um difeomorfismo com um ponto fixo hiperbólico p . Então existe $\epsilon > 0$ e uma vizinhança U de p em X tais que se g é um difeomorfismo C^1 - ϵ próximo de f , então g possui um único ponto fixo (hiperbólico) p_g em U . Além disso p_g será atrator ou repulsor conforme p o for.*

Demonstração. Vamos supor que $f'(p) > 1$.

Pela continuidade de f' (e uma aplicação fácil do Teorema do Valor Médio), existe um intervalo aberto $U = (a, b) \ni p$ tal que

- i) $f'(x) > 1$ em todo $x \in [a, b]$;
- ii) $f(a) - a < 0$; e
- iii) $f(b) - b > 0$.

Seja agora ϵ suficientemente pequeno de maneira que, se g está C^1 - ϵ -próxima de f , então vale $g'(x) > 1$ para todo $x \in [a, b]$.

Tomem ainda $\epsilon < \min\{|f(a) - a|, |f(b) - b|\}$, de forma a termos

$$g(a) - a = (g(a) - f(a)) + (f(a) - a) < 0$$

e

$$g(b) - b = (g(b) - f(b)) + (f(b) - b) > 0.$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário (aplicado à função $w(x) \equiv g(x) - x$) existe $c \in (a, b)$ tal que $w(c) = 0$ (isto é, $g(c) = c$).

Afirmamos que este c é então o único ponto fixo de g em (a, b) . De fato, se valesse $g(d) = d$ com $c \neq d \in (a, b)$, teríamos $g'(k) = 1$ para algum k entre c e d , em decorrência do Teorema do Valor Médio.

No caso $f'(p) < 1$ a demonstração segue de forma análoga. \square

A demonstração da Proposição acima é facilmente visualizável nos gráficos dos exemplos anteriores. Se temos um ponto fixo p , digamos um repulsor, então o gráfico de f corta o gráfico da identidade em p de maneira ascendente (i.e., com inclinação maior do que um). É fácil ver que pequenas modificações g do gráfico terão sempre uma “continuação” p_g próxima do p original, e que além disso não aparecerão novos pontos fixos próximos a p . **EXERCÍCIO:** contemplem o gráfico de F na Figura 2.1 em torno do ponto $[\frac{1}{2}]$ até vocês atingirem a iluminação.

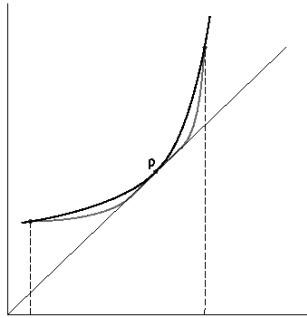
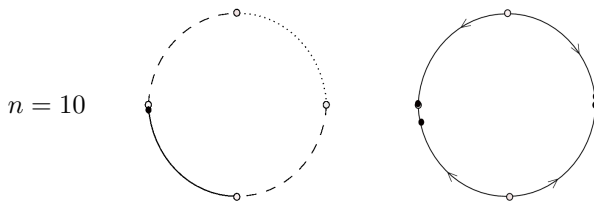


Figura 3.4: Perturbação em torno de um ponto fixo não-hiperbólico

Figura 3.5: Dinâmicas de G e F

Mas isso só acontece se p for hiperbólico! De fato, se p for um ponto fixo não-hiperbólico, então o gráfico será tangente ao gráfico da identidade em p . E isso significará que com pequenos petelecos poderemos criar todo tipo de esculhambação em torno de p – como por exemplo criar todo um intervalo de pontos fixos em torno de p ! (Vejam a Figura 3.2 acima.)

Na verdade não é difícil mostrar que a propriedade dada pela Proposição 3.3 acima – a existência robusta de uma única continuação – acontece se e somente se o ponto fixo p for hiperbólico. Mas não faremos esta demonstração pela razão usual³.

Além disso, pode-se mostrar que a robustez acima na verdade acarreta *estabilidade local* – a dinâmica em U permanece inalterada após uma pequena perturbação, módulo uma conjugação topológica blablabla. Também não demonstraremos isto, em parte por causa da razão anterior, e em parte porque o que faremos a seguir vai englobar essa estabilidade local.

3.3 Estabilidade Global

Considere dois intervalos monótonos crescentes $[a, b]$ de um difeomorfismo f e $[c, d]$ de um difeomorfismo g . Nós já vimos que $f|_{[a,b]}$ e $g|_{[c,d]}$ “possuem a mesma dinâmica”: os extremos ficam parados, enquanto que os pontos interiores andam para a direita no futuro até o extremo direito, e no passado até o extremo esquerdo. A proposição seguinte, que é o cerne técnico deste capítulo, retira as aspas da frase anterior:

³Preguiça.

Proposição 3.4. *Sejam $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ e $g : [c, d] \rightarrow [c, d]$ dois difeomorfismos tais que $f(x) > x$ para $x \in (a, b)$ e $g(y) > y$ para $y \in (c, d)$. Então f e g são topologicamente conjugadas.*

Demonstração. Tomem $\alpha \in (a, b)$ e $\beta \in (c, d)$ arbitrariamente. Por hipótese temos $f(x) > x$, e portanto $f^n(x)$ é crescente com relação a $n \in \mathbb{Z}$. O mesmo vale para $g^n(y)$

Sendo assim, podemos escrever (a, b) e (c, d) como uma reunião de intervalos disjuntos

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [f^n(\alpha), f^{n+1}(\alpha)) = (a, b) \quad e \quad \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [g^n(\beta), g^{n+1}(\beta)) = (c, d).$$

A imagem de cada intervalo é um intervalo adjacente à direita, e portanto para todo $x \in (a, b)$ temos que $O(x)$ passa uma única vez em cada intervalo desta união disjunta. Em particular, dado $x \in (a, b)$ existe um único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^n(x) \in [\alpha, f(\alpha))$.

Por motivos idênticos, o mesmo vale para cada $y \in (c, d)$ em relação ao intervalo $[\beta, f(\beta))$.

Tomem H qualquer homeomorfismo entre $[\alpha, f(\alpha))$ e $[\beta, g(\beta))$ tal que $H(\alpha) = \beta$. Por exemplo, $H : [\alpha, f(\alpha)) \rightarrow [\beta, g(\beta))$ dado por

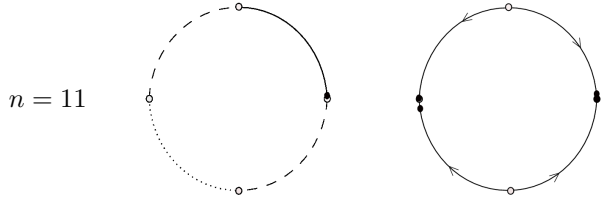
$$H(x) = \frac{g(\beta) - \beta}{f(\alpha) - \alpha} \cdot (x - \alpha) + \beta.$$

Agora nós vamos “colar” dinamicamente o homeomorfismo H em todo o intervalo $[a, b]$. Definimos uma aplicação $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$ colocando $h(x) = g^{-n} \circ H \circ f^n(x)$, onde n é o único inteiro tal que $f^n(x) \in [\alpha, f(\alpha))$, $h(a) = c$, e $h(b) = d$.

Afirmamos que h é um homeomorfismo que conjuga f com g .

1) Primeiro vamos mostrar que h é um homeomorfismo.

Claramente h é contínua quando restrito a $[f^n(\alpha), f^{(n+1)}(\alpha))$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Queremos mostrar que h é contínua em todo o intervalo $[a, b]$, o que equivale a verificar que h é contínua na fronteira de cada intervalo da reunião disjunta $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [f^n(\alpha), f^{(n+1)}(\alpha)) = (a, b)$. O problema aqui se reduz a verificar que os limites à esquerda coincidem com os limites à direita.

Figura 3.6: Dinâmicas de G e F

Considerem agora seqüências $\{x_k\} \rightarrow f^n(\alpha)_+$ e $\{y_k\} \rightarrow f^n(\alpha)_-$. Temos então

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow +\infty} h(x_k) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} g^n \circ H \circ f^{-n}(x_k) \\
 &= g^n \circ H(\alpha) \\
 &= g^n(\beta) \\
 &= g^{n-1}(g(\beta)) \\
 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} g^{n-1} \circ H \circ f^{-n+1}(y_k) \\
 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} h(y_k),
 \end{aligned}$$

e portanto h é contínua em cada $f^n(\alpha)$.

É óbvio que a função h é uma bijeção entre $[a, b]$ e $[c, d]$; ela portanto possui uma inversa, dada por $h^{-1}(y) = f^{-n} \circ H^{-1} \circ g^n(y)$, onde n é o único inteiro tal que $g^n(y) \in (c, d)$, $h^{-1}(c) = a$, e $h^{-1}(d) = b$. De forma análoga à argumentada para h verifica-se que h^{-1} é contínua em (c, d) . Assim, h é de fato um homeomorfismo.

2) Agora vamos mostrar que h conjuga f com g .

Essa é fácil. Seja x com $f^k(x) \in [\alpha, f(\alpha)]$. Temos então que

$$\begin{aligned}
 h \circ f(x) &= g^{-k+1} \circ H \circ f^{k-1}(f(x)) \\
 &= g \circ (g^{-k} \circ H \circ f^k)(x) \\
 &= g \circ h(x),
 \end{aligned}$$

como desejado. □

(Óbvio ululante: o mesmo enunciado vale para intervalos monótonos decrescentes.)

Proposição 3.5. *Seja $f \in \text{Diff}^1(S^1)$ um difeomorfismo Morse-Smale com k pontos fixos. Então existe $\epsilon > 0$ tal que todo g que está C^1 - ϵ -próximo de f é um difeomorfismo Morse-Smale com exatamente k pontos fixos.*

Demonstração. Sejam $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ os pontos fixos de f , em ordem crescente no círculo. Aplicando a Proposição 3.3 a cada um dos pontos fixos, segue que existem intervalos abertos $U_i = (a_i, b_i) \ni p_i$, que podemos supor mutuamente disjuntos, e constantes $\epsilon_i > 0$ tais que vale o seguinte: se g está C^1 - ϵ_i -próxima de f então existe um único ponto (hiperbólico, e do mesmo tipo que p_i) fixo q_i de g em cada U_i . Seja $\epsilon' \equiv \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\}$.

Como $f(x) - x \neq 0$ no compacto $S^1 \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i$, podemos então escolher $\epsilon'' > 0$ pequeno o suficiente para termos $g(x) - x \neq 0$ em todo $x \in (S^1 \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i)$ para qualquer perturbação g ϵ'' -próxima de f .

Tomando $\epsilon \equiv \min\{\epsilon', \epsilon''\}$, segue que se g está C^1 - ϵ -próxima de f então os únicos pontos fixos de g são os q_i 's descritos acima (i.e., as continuações dos pontos fixos p_i de f). \square

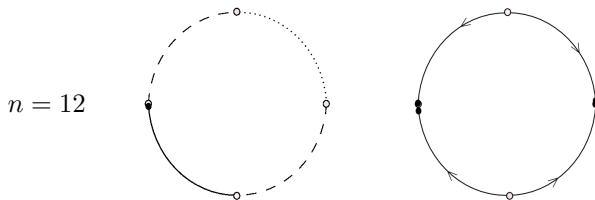
(É claro que há um enunciado análogo para difeomorfismos Morse-Smale com pontos periódicos de período arbitrário.)

O resultado principal deste capítulo é uma simples colagem das duas proposições anteriores:

Teorema 3.1. *Todo difeomorfismo Morse-Smale $f \in \text{Diff}^1(S^1)$ é estruturalmente estável.*

Demonstração. Faremos a demonstração apenas no caso em que os pontos periódicos de f são fixos. A demonstração do caso geral é essencialmente a mesma, módulo mudanças trabalhosas e chatas de notação e terminologia (e.g., trocar “intervalos invariantes monótonos” por “intervalos periódicos monótonos”).

Seja $f \in \text{Diff}^1(S^1)$, com pontos fixos $\{p_1 < \dots < p_k\}$, onde $p_{k+1} \equiv p_1$. Colocamos $I_i \equiv [p_i, p_{i+1}]$ para cada $i = 1, \dots, k$.

Figura 3.7: Dinâmicas de G e F

(Bem, estamos sendo pouco cuidadosos aqui no caso do intervalo $I_k \equiv [p_k, p_1]$, mas o sentido deve estar claro para vocês.)

Se restringimos o difeomorfismo f a cada um dos intervalos I_j obtemos k intervalos monótonos: o intervalo I_1 para $f_1 \equiv f|_{I_1}$, o intervalo I_2 para $f_2 \equiv f|_{I_2}$, e assim por diante, até o intervalo I_k para $f_k \equiv f|_{I_k}$.

Pelo Proposição 3.5, existe $\epsilon > 0$ tal que se g está $C^{1-\epsilon}$ -próxima de f , então g possui exatamente k pontos fixos $q_1 < \dots < q_k$, todos hiperbólicos, onde cada q_i é do mesmo tipo (atrator/repulsor) de p_i . Logo os pontos fixos de g dividem o círculo em k intervalos monótonos $J_i \equiv [q_i, q_{i+1}]$, sendo que J_i tem o mesmo “sinal” (crescente/decrescente) em relação a g que I_i tem em relação a f .

Agora aplicamos a Proposição 3.4 a cada par de intervalos I_i e J_i , e concluímos que para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ existe uma conjugação topológica $h_i : I_i \rightarrow J_i$ entre f_i e g_i .

Definimos agora $h : S^1 \rightarrow S^1$ colocando $h(x) = h_i(x)$ se $x \in I_i$.

Não há ambiguidade nesta definição, pois se x estiver em mais de um intervalo então x é um dos pontos fixos p_i e teremos $h_i(p_i) = q_i = h_{i+1}(p_i)$ pela construção das conjugações h_i . Isso mostra também que h é contínua nas fronteiras dos intervalos, e portanto em todo o círculo.

Claramente h é uma bijeção. A sua inversa, dada por $h^{-1}(y) = h_i^{-1}(y)$ para $y \in J_i$, é contínua por um argumento análogo ao feito para h .

É trivial verificar que h conjuga f com g . Concluímos que h é uma conjugação topológica entre f e g . \square

Duas últimas coisinhas sobre os difeomorfismos Morse-Smale:

- 1) Na verdade eles são *densos* no espaço $\text{Diff}^1(S^1)$: dado qualquer difeomorfismo do círculo, podemos torná-lo um Morse-Smale com uma perturbação arbitrariamente pequena na topologia C^1 (de fato em todas as topologias C^r com $r \geq 1$). E como os Morse-Smale são um aberto de $\text{Diff}^1(S^1)$, segue que os Morse-Smale constituem um subconjunto aberto-e-denso de $\text{Diff}^1(S^1)$. Ou seja, topologicamente falando, no espaço dos difeomorfismos do círculo quase todo mundo é Morse-Smale.
- 2) Nós vimos neste Capítulo que os difeomorfismos de Morse-Smale são estruturalmente estáveis. Mas vale também a volta: *no espaço dos difeomorfismos do círculo*, todo difeomorfismo estruturalmente estável é um Morse-Smale.

Agora, estes dois fatos⁴ – a densidade de dinâmicas hiperbólicas e a equivalência entre ser Morse-Smale e ser estruturalmente estável – valem apenas no contexto muito especial dos difeomorfismos do círculo. Na maioria dos contextos (especialmente em dimensão ≥ 2), os sistemas estruturalmente estáveis *não* são densos no espaço de sistemas dinâmicos. E como veremos nos dois próximos capítulos, mesmo no contexto de aplicações diferenciáveis do círculo um sistema pode ser estruturalmente estável sem ser Morse-Smale.

⁴Cujas demonstrações completas, em português, e com muitas figuras bonitas poderão em breve ser encontradas na referência [0].

Capítulo 4

A Expansão Linear T_2 do Círculo

4.1 Definição de T_2

Considerem agora a aplicação

$$T_2 : S^1 \rightarrow S^1$$
$$[x] \mapsto [2x]$$

do círculo nele mesmo. Geometricamente, esta aplicação corresponde a esticar o círculo até o dobro do seu comprimento e enrolá-lo de volta no próprio círculo no sentido horário, dando duas voltas completas (veja a Figura 4.1 abaixo).

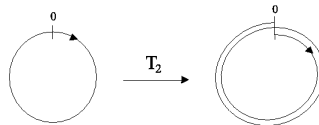


Figura 4.1: A geometria de T_2

Primeiro, a má notícia: como transformação, a aplicação T_2 , que chamaremos de *aplicação expansora de grau 2 do círculo* por razões óbvias¹, é extremamente simples – bem mais simples de fato do que os difeomorfismos de Morse-Smale que temos estudado até agora. T_2 é a aplicação cujo gráfico aparece na Figura 4.2 abaixo. Ela é sobrejetiva, diferenciável (com derivada constante igual a 2), e seus levantamentos para a reta \mathbb{R} são as funções da família $\{F(x) = 2x + k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Chato, né?

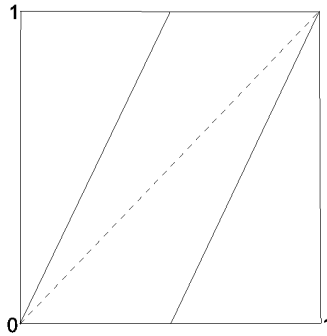


Figura 4.2: O gráfico de T_2

A boa notícia é que, dinamicamente falando, T_2 é bem mais complicada – e portanto mais interessante – do que os difeomorfismos Morse-Smale. Uma primeira indicação disto é que T_2 , ao contrário dos Morse-Smale, *não* é injetiva. De fato, tendo grau 2, e como se pode ver na Figura 4.2, qualquer ponto de S^1 tem duas pré-imagens por T_2 . Por exemplo, o ponto $[\frac{1}{3}]$ tem como pré-imagens os pontos $[\frac{1}{6}]$ e $[\frac{2}{3}]$ (pois $2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ e $2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$). Então faz sentido falar em futuro (iterações sucessivas por T_2), mas não em passado.

Como T_2 é uma sobrejeção contínua do círculo e não um homeomorfismo, várias coisas acontecem e outras deixam de acontecer. Para começar, aquela coisa misteriosa chamada “número de rotação” deixa de estar bem-definida para T_2 , e algumas das suas consequências

¹a saber, porque assim fica um nome sofisticado e bonito.

vão pro lixo. Por exemplo, no caso dos homeomorfismos os pontos periódicos todos têm o mesmo período. Mas isso não acontece com T^2 :

De fato, $[0]$ é um ponto fixo (i.e, um ponto periódico de período 1) de T_2 (pois $2 \cdot 0 = 0$), mas $[\frac{1}{3}]$ é um ponto periódico de período 2 (pois $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ e $2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$)!

Veremos daqui a pouco que T_2 tem pontos periódicos *de todos os períodos possíveis*, e além disso que ela é transitiva: existem pontos cujas órbitas futuras por T_2 são densas no círculo. Em suma, o mapa T_2 apresenta uma dinâmica muitíssimo mais rica do que a dos Morse-Smale. Esta complicação dinâmica toda se deve à hiperbolicidade de T_2 , que neste caso se apresenta como uma expansão em todos os pontos do círculo.

Mas veremos também que, assim como o que acontece com os Morse-Smale, o expansor linear de grau 2 do círculo é estruturalmente estável: a sua dinâmica permanece essencialmente a mesma sob pequenas perturbações da transformação T_2 .

E veremos finalmente que o mapa T_2 é apenas um exemplo de uma classe ampla de funções do círculo, as *aplicações expansoras (não-necessariamente-lineares)*, todas elas com dinâmicas complicadas mas estruturalmente estáveis.

Ok, hora de botar a mão na massa.

4.2 Dinâmica Topológica de T_2

Vamos começar a analisar a dinâmica de T_2 com cuidado. Uma das primeiras coisas que se vê é que $[0]$ é o único ponto fixo de T_2 . Mas existem muitos pontos (e.g., $[\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{4}]$, etc) que “caem” em $[0]$ após alguns iterados. É claro que as órbitas destes pontos, uma vez tendo atingido $[0]$, ficam presas para sempre em $[0]$. Temos a seguinte definição:

Definição 4.1. *Um ponto $p \in S^1$ é eventualmente fixo² se existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $(T_2)^n(p) = (T_2)^{n-1}(p)$. Neste caso o período de p é o menor n que satisfaz esta condição. (Notem que por definição os pontos fixos são os pontos eventualmente fixos de período 1.)*

²Tá, não deveria ser “eventualmente”, isso é anglicismo blablabla, mas dane-se.

Quão grande é o conjunto dos pontos eventualmente fixos de T_2 ? Claramente trata-se de um conjunto infinito, mas vale mais:

Proposição 4.1. *Dado um número natural $n \in \mathbb{N}$, então T_2 possui pelo menos um ponto eventualmente fixo de período n . Além disso o conjunto $E\text{Fix}(T_2)$ de pontos eventualmente fixos de T_2 é um subconjunto denso de S^1 .*

Demonstração. Para a primeira afirmação, considerem $p \equiv [\frac{1}{2^n}]$. Então

$$(T_2)^n(p) = \underbrace{[2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2]}_{n \text{ vezes}} \cdot \frac{1}{2^n} = [\frac{2^n}{2^n}] = [1] (= [0]).$$

Claramente vale $(T_2)^s(p) \neq [1]$ para todo $1 \leq s < n$, logo o período eventual de p é igual a n .

Para a afirmação sobre densidade, observem que o conjunto $\{\frac{s}{2^n} : s, n \in \mathbb{N}\}$ é denso em S^1 , e todos os seus elementos são eventualmente fixos (pois $(T_2)^n(\frac{s}{2^n}) = \underbrace{[2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2]}_{n \text{ vezes}} \cdot \frac{s}{2^n} = [\frac{s \cdot 2^n}{2^n}] = [s] = [0]$). \square

Ao mesmo tempo, temos também muitíssimos pontos periódicos:

Proposição 4.2. *Dado um número natural $n \in \mathbb{N}$, então T_2 possui pelo menos um ponto periódico de período n . Além disso o conjunto $Per(T_2)$ de pontos periódicos de T_2 é um subconjunto denso de S^1 .*

Demonstração. Primeiro vamos contar os pontos periódicos de T_2 cujo período é um fator de n (o que é claro inclui os periódicos de período n). Notem que este conjunto coincide com o conjunto $\text{Fix}((T_2)^n)$ dos pontos *fixos* do n -ésimo iterado $(T_2)^n$ de T_2 .

Um ponto $[p] \in S^1$ pertence a $\text{Fix}((T_2)^n)$ se e somente se ele satisfaz a seguinte “equação módulo 1”:

$$[(T_2)^n[p]] = [p].$$

Agora, um pouquinho de reflexão mostra que se tomamos p como sendo o (único) representante de $[p]$ no intervalo semi-aberto $[0, 1)$ da reta, então a equação acima é equivalente a

$$2^n \cdot p = p \pmod{1}, \quad (4.1)$$

o que por sua vez equivale a

$$(2^n - 1) \cdot p = 0 \pmod{1}. \quad (4.2)$$

Logo a questão de descobrir quem são os pontos periódicos cujo período é fator de n se reduz a descobrir *quais são os pontos entre 0 e 1 (incluindo o 0 e excluindo o 1) que quando multiplicados por $2^n - 1$ resultam num número inteiro.*

A solução do problema em itálico acima é fácil: os pontos que buscamos são os múltiplos (por naturais ou por zero) do número $\frac{1}{2^n - 1}$ que são menores do que 1. Ou seja, a lista completa de soluções da equação 4.2 (e portanto da equação 4.1) é dada por

$$0, \frac{1}{2^n - 1}, \frac{2}{2^n - 1}, \frac{3}{2^n - 1}, \dots, \frac{2^n - 3}{2^n - 1}, \frac{2^n - 2}{2^n - 1}.$$

Logo os elementos de $Fix((T_2)^n)$ são os pontos

$$[0], \left[\frac{1}{2^n - 1}\right], \left[\frac{2}{2^n - 1}\right], \left[\frac{3}{2^n - 1}\right], \dots, \left[\frac{2^n - 3}{2^n - 1}\right], \text{ e } \left[\frac{2^n - 2}{2^n - 1}\right]$$

Temos portanto exatamente $2^n - 1$ pontos fixos de $(T_2)^n$, que estão distribuídos uniformemente ao longo do círculo S^1 . Notem que ao variarmos n entre todos os naturais e tomarmos a reunião dos pontos fixos correspondentes nós obtemos uma subconjunto denso de S^1 , o que prova a segunda parte da proposição.

Mas e quanto à primeira parte da proposição? É claro que todos os pontos periódicos com período n pertencem a $Fix((T_2)^n)$, mas a recíproca não é verdadeira em geral. De fato, ainda não provamos que dado um n fixo então existe algum ponto periódico de período n . Felizmente, sabendo o número de elementos de $Fix((T_2)^n)$ fica fácil mostrar que *dado qualquer $n \in \mathbb{N}$ existe pelo menos um ponto periódico de período n (na verdade mostraremos que existem pelo menos n tais pontos).*

Bem, temos $2^n - 1$ elementos em $Fix((T_2)^n)$, e $2^{n-1} - 1$ elementos em $Fix((T_2)^{n-1})$, e assim por diante. Logo a reunião de conjuntos

$$Fix_{j < n}((T_2)^j) \equiv \bigcup_{1 \leq j < n} Fix((T_2)^j)$$

tem no máximo

$$\sum_{j=1}^{n-1} (2^j - 1) \equiv (2^{n-1} - 1) + (2^{n-2} - 1) + \dots + (2^2 - 1) + (2 - 1) = 2^n - (n - 1)$$

elementos.

Segue então que o conjunto $Fix((T_2)^n) \setminus Fix_{j < n}((T_2)^j)$ tem pelo menos

$$\#Fix((T_2)^n) - \#Fix_{j < n}((T_2)^j) = (2^n - 1) - (2^n - (n - 1)) = n$$

elementos. Claramente os membros deste último conjunto são necessariamente pontos periódicos de período n de T_2 . \square

Ou seja, o que não falta é ponto periódico de T_2 . Bacana³, né? Mas a coisa não pára por aí: existem também pontos cujas órbitas futuras são densas no círculo S^1 . Vamos lá:

Proposição 4.3. *A dinâmica de T_2 é transitiva. Isto é, existem (densos) pontos x de S^1 tais que o conjunto $\mathcal{O}^+(x) \equiv \{(T_2)^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em S^1 .*

Demonstração. Como vimos no Capítulo 1, basta mostrar que dados dois abertos U e V de S^1 então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(T_2)^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Vamos lá: fixem dois abertos U, V de S^1 . Então o aberto U contém algum intervalo aberto (a, b) . Cada vez que aplicamos T_2 a um intervalo, obtemos uma imagem que tem o dobro do comprimento do intervalo anterior (isto até a imagem “se enrolar” no círculo e começar a se auto-intersectar). Isto é, vale

$$comp((T_2)^n((a, b))) = 2^n \cdot comp(a, b) = 2^n \cdot |b - a|.$$

Logo para n suficientemente grande a imagem $(T_2)^n((a, b)) \subset (T_2)^n(U)$ teria comprimento maior do que 1, e portanto coincidiria com o círculo S^1 todo, intersectando o aberto V . \square

Observação. *Na verdade mostramos que T_2 satisfaz uma propriedade mais forte do que a transitividade, o misturamento. Mas isso é papo para outro minicurso.*

³Bacana: sinônimo de “irado” e “sinistro”. Vocábulo empregado por pessoas com mais de 30 anos.

Finalmente, a dinâmica de T_2 é “imprevisível”, no seguinte sentido:

Proposição 4.4. *Dados dois pontos distintos $x \neq y \in S^1$, então existe algum iterado $N \in \mathbb{N}^* \equiv (\mathbb{N} \cup \{0\})$ tal que $d_{S^1}(f^N(x), f^N(y)) \geq \frac{1}{4}$*

Demonstração. Afiramos primeiro que dados dois pontos $x, y \in S^1$ tais que

$$d(x, y) < 1/4$$

então vale

$$d(T_2(x), T_2(y)) = 2 \cdot d(x, y).$$

De fato, temos (**EXERCÍCIO**) que $d(x, y) = \min\{|x-y|, |y-x|\}$, onde tomamos as (únicas) representações dos pontos $[x-y]$ e de $[y-x]$ no intervalo $[0, 1)$.

Segue que $d(T_2(x), T_2(y)) = \min\{|2x-2y|, |2y-2x|\}$. Supondo $|x-y| \leq |y-x|$, temos então $|x-y| \leq 1/4$ e $|2x-2y| = 2|x-y| \leq \frac{1}{2}$.

Segue que $|2y-2x| = 1 - |2x-2y| \geq \frac{1}{2}$, e conseqüentemente temos que

$$d(T_2(x), T_2(y)) = \min\{|2x-2y|, |2y-2x|\} = 2|x-y|,$$

como foi afirmado. (O caso $|x-y| \geq |y-x|$ é análogo.)

Tomem agora dois pontos distintos x e y do círculo. Se vale $d(x, y) \geq \frac{1}{4}$ não há nada para provar. Caso contrário, seja $M \in \mathbb{N}^*$ o maior natural (incluindo zero) que satisfaz $2^M \cdot d(x, y) < \frac{1}{4}$. Queremos mostrar que $d((T_2)^{M+1}(x), (T_2)^{M+1}(y)) \geq 1/4$.

Suponham por absurdo que vale

$$d((T_2)^{M+1}(x), (T_2)^{M+1}(y)) < 1/4.$$

Como temos $2^n \cdot d(x, y) < \frac{1}{4}$ para todo $n \leq M$, aplicando a afirmação sucessivamente temos

$$d(T_2(x), T_2(y)) = 2 \cdot d(x, y) < \frac{1}{4},$$

e daí

$$d((T_2)^2(x), (T_2)^2(y)) = 2 \cdot d(T_2(x), T_2(y)) = 2^2 \cdot d(x, y) < \frac{1}{4},$$

e assim por diante até obtermos

$$d((T_2)^{M+1}(x), (T_2)^{M+1}(y)) = 2^{M+1} \cdot d(x, y) < \frac{1}{4}.$$

Mas a desigualdade $2^{M+1} \cdot d(x, y) < \frac{1}{4}$ contradiz a maximalidade de M , absurdo. □

O que significa esta última propriedade? Bem, se T_2 representasse a dinâmica de algum sistema físico num espaço X , teríamos que usar algum instrumento para determinar a posição de um ponto do sistema (e também as posições de seus iterados por T_2). Mas é fisicamente impossível medir com precisão absoluta qualquer quantidade física, como a posição de uma partícula. Isto significa que na prática teremos sempre pequenos erros nas nossas observações sobre o sistema físico.

A proposição acima nos diz que estes erros, por menores que sejam, podem ter consequências catastróficas ao longo do tempo: uma pequenínssima imprecisão num dado período pode causar um grande erro de previsão ao longo do tempo.

Temos um nome para este tipo de comportamento:

Definição 4.2. *Um sistema dinâmico $f : X \rightarrow X$ tem dependência sensível às condições iniciais se existe alguma constante $\delta > 0$ tal que dados dois pontos distintos $x \neq y \in X$ então existe iterado $N \in \mathbb{N}^*$ tal que $d(f^N(x), f^N(y)) \geq \delta$.*

Então podemos reformular a proposição anterior dizendo que a transformação T_2 tem dependência sensível às condições iniciais, com $\delta = \frac{1}{4}$.

(Aliás, difeomorfismos de Morse-Smale não têm dependência sensível às condições iniciais: **EXERCÍCIO** pra vocês⁴.)

A propriedade de ter dependência sensível às condições iniciais é muitas vezes chamada por si só de *caos*. Muitos de vocês já terão ou-

⁴Dica: tomem dois pontos distintos arbitrariamente próximos de um ponto periódico de tipo atrator.

vido estorinhas como a do bater-de-asas-de-uma-borboleta-na-China-que-causa-uma-tempestade-no-Brasil blablabla para ilustrar essa idéia⁵.

A embaraçosa verdade é a seguinte: não existe nenhuma definição universalmente aceita do que é caos. Na prática, quase toda⁶ vez que um dinamicista percebe que a dinâmica com a qual ele está mexendo é muito complicada e imprevisível, ele chama a complicação que ele vê de “caos”. Esta prática gera várias definições não-equivalentes e portanto uma certa confusão (um certo caos?) semântica, mas serve como marketing eficaz para novas idéias, conceitos, e minicursos. De qualquer modo, o nome caos serve sempre para denotar algum tipo de imprevisibilidade e complexidade dinâmica.

Já que tem tantas definições de caos por aí, usaremos cinicamente a que mais nos convém. Então, para efeitos deste minicurso, vamos usar a seguinte definição, proposta⁷ por R. Devaney no seu livro (vide a referência [2]):

Definição 4.3. *Um sistema dinâmico $f : X \rightarrow X$ é caótico se satisfaz as três seguintes condições:*

- a) o conjunto de pontos periódicos $Per(f)$ de f é denso em X ;
- b) a dinâmica de f é transitiva; e
- c) a dinâmica de f tem dependência sensível às condições iniciais (para alguma constante $\delta > 0$).

Então poderíamos resumir (quase) tudo o que verificamos nesta seção numa única frase:

A dinâmica que T_2 induz no círculo é caótica.

Resumindo um pouco menos, o que descobrimos foi o seguinte:

- 1) que existe um conjunto $EFix(T_2)$ denso de S^1 de pontos que caem no ponto fixo $[0]$ após um número finito de iterados;

⁵Aliás: um dos personagens do filme *Parque dos Dinossauros* é um “matemático” – interpretado por Jeff Goldblum – que supostamente usa teoria do caos para prever que os bichos vão se soltar. Puro caô. Sem falar que o final do filme é péssimo.

⁶No sentido de Lebesgue.

⁷Há definições muito mais sutis, que “quantificam” a imprevisibilidade, usando conceitos como expoentes de Lyapunov, mas não vamos entrar nessa discussão.

- 2) que existe um conjunto $Per(T_2)$ denso de S^1 de pontos que caem neles mesmos após um número finito de iterados;
- 3) que existe um conjunto $Tr(T_2)$ denso de S^1 de pontos cujas órbitas futuras são densas em S^1 ; e
- 4) que a dinâmica de T_2 é imprevisível: mudanças infinitesimais na posição inicial dos pontos acarretam mudanças substanciais das órbitas ao longo do tempo.

Enfim: como se vê, apesar da transformação T_2 ser ela própria extremamente simples, a dinâmica que ela induz no círculo é pra lá de complicada.⁸

Este fenômeno – transformações simples gerando dinâmicas complicadas – é muitíssimo comum na teoria dos sistemas dinâmicos. De fato, o estudo dos sistemas dinâmicos lida em boa parte com duas questões:

- i) entender por que e como muitas transformações simples geram dinâmicas complicadas; e
- ii) entender a complicação dinâmica em si.

Um dos poucos contextos nos quais a dinâmica tende a ser simples é justamente o dos difeomorfismos do círculo, estudados nos Capítulos 2 e 3. (Se você passar para aplicações diferenciáveis do círculo, ou para difeomorfismos de objetos de dimensão maior que um, a complicação já aparece com força...) Mas nos contextos em que há complicação dinâmica – como o contexto das aplicações expansoras – precisamos de ferramentas para lidar com e entender a complexidade dinâmica.

É aí que entra a *dinâmica simbólica*, o emocionante tema da próxima seção.

⁸A complexidade dinâmica de T_2 está relacionada ao fato de T_2 ser uma transformação “globalmente hiperbólica”. É óbvio que todos os pontos periódicos de T_2 são hiperbólicos (**EXERCÍCIO**: use a regra da cadeia), e além disso vimos que o conjunto $Per(T_2)$ é denso em S^1 . Ou seja, temos um subconjunto denso de pontos periódicos hiperbólicos. Mas vale mais do que isso: T_2 expande o círculo em torno de *todos* os seus pontos. É neste sentido que podemos dizer que T_2 é globalmente hiperbólica.

4.3 Dinâmica Simbólica de T_2 : a Construção

Vamos lá. Começamos dividindo o círculo S^1 em duas metades: os intervalos $A \equiv (0, \frac{1}{2})$ e $B \equiv (\frac{1}{2}, 1)$.

Temos então uma partição do círculo em dois intervalos A e B de comprimento $\frac{1}{2}$, exceto que existem dois pontos – o $[0]$ e o $[\frac{1}{2}]$ – que não pertencem a nenhum dos dois intervalos. Daqui a pouquinho veremos por que excluímos estes pontos.

Bem, vamos definir \tilde{S}_0 como sendo $S^1 \setminus \{[0] \cup [\frac{1}{2}]\}$. Definimos agora o seguinte mapa no domínio \tilde{S}_0 :

$$\theta : \tilde{S}_0 \longrightarrow \{A, B\}$$

$$x \mapsto \begin{cases} A & \text{se } x \in A \\ B & \text{se } x \in B \end{cases}$$

Ou seja, θ é uma função sinalizadora: quando ela vê um ponto no intervalo A ela grita “A!” e quando ela vê um ponto no intervalo B ela grita “B!”. Se o ponto não está em nenhum desses dois intervalos (ou seja, se o ponto é $[0]$ ou $[\frac{1}{2}]$) então θ não está – literalmente – nem aí.

Agora definimos \tilde{S}_1 como sendo $S^1 \setminus (T_2)^{-1}(\{[0], [\frac{1}{2}]\})$. Ou seja, \tilde{S}_1 é o círculo menos as pré-imagens dos pontos fixos $[0]$ e $[\frac{1}{2}]$, que são os pontos $[0]$, $[\frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{2}]$, e $[\frac{3}{4}]$.

Depois colocamos $\tilde{S}_2 \equiv S^1 \setminus (T_2)^{-2}(\{[0], [\frac{1}{2}]\})$, obtendo o círculo menos as pré-imagens por $(T_2)^2$ de $[0]$ e de $[\frac{1}{2}]$, que são os pontos $[0]$, $[\frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{2}]$, $[\frac{3}{4}]$, $[\frac{1}{8}]$, $[\frac{3}{8}]$, $[\frac{5}{8}]$, e $[\frac{7}{8}]$.

E assim por diante: $\tilde{S}_n \equiv S^1 \setminus (T_2)^{-n}(\{[0], [\frac{1}{2}]\})$ é o círculo menos um número finito de pontos – os eventualmente fixos cujo período é um fator de n .

Colocamos agora

$$\tilde{S} \equiv \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{S}_n.$$

Ou seja, \tilde{S} é o círculo sem os pontos eventualmente fixos de T_2 . (É claro que poderíamos ter poupado um pouco de papel e tempo simplesmente definindo $\tilde{S} \equiv S^1 \setminus \text{Fix}(T_2)$; não fizemos isso porque queremos enfatizar o caráter dinâmico da construção de \tilde{S} .)

Começamos com duas observações sobre \tilde{S} :

- Primeiro, \tilde{S} é *invariante* por T_2 . Isto é, vale (**EXERCÍCIO**)

$$T_2(\tilde{S}) = \tilde{S}.$$

Isto significa que podemos considerar a dinâmica de T_2 *restrita* ao conjunto \tilde{S} . Ou seja, como os pontos que começam em \tilde{S} nunca saem de \tilde{S} , não importa quantas vezes os iteramos por T_2 , podemos tratar $T_2|_{\tilde{S}}$ como um sistema dinâmico.

- Segundo, apesar de ser infinito, o conjunto $S^1 \setminus \tilde{S}$ é pequeno: de fato, para começar, ele é enumerável, pois é a reunião enumerável de uma família de conjuntos finitos. E sendo enumerável, o complemento dele – o conjunto \tilde{S} – é denso e não apenas não-enumerável, mas mais do que isso: ele é “densamente não-enumerável” em S^1 , no sentido de que qualquer intervalo aberto de S^1 tem interseção não-enumerável com \tilde{S} .

Há maneiras mais sofisticadas de dizer que \tilde{S} é “muito grande”: poderíamos dizer que \tilde{S} , sendo o complemento de um conjunto enumerável do círculo, é *residual* ou *tem medida total* em S^1 . Mesmo que você não saiba o que estes termos significam, o ponto aqui é que a grande maioria dos pontos do círculo pertence a \tilde{S} , e portanto considerar a dinâmica de T_2 restrita a \tilde{S} não acarreta uma perda significativa de informação. Na prática, o sistema dinâmico $T_2|_{\tilde{S}}$ possui essencialmente toda a informação dinâmica do sistema “inteiro” $T_2 = T_2|_{S^1}$.

Ok, continuando com a construção da dinâmica simbólica.

Seja Σ_2 o espaço de todas as sequências de símbolos A s e B s. Isto é, cada $x \in \Sigma_2$ é uma sequência da forma

$$x = \{x_0, x_1, x_2, \dots\},$$

onde $x_j \in \{A, B\}$ para cada $j \in \mathbb{N}^* \equiv (\mathbb{N} \cup \{0\})$.

Pontos de Σ_2 têm a seguinte cara:

$$\{B, A, A, B, A, \dots\}, \{A, A, A, \dots\}, \{A, B, A, B, \dots\} \text{ e etc.}$$

Seja agora $d^* : (\{A, B\} \times \{A, B\}) \longrightarrow \{0, 1\}$ dada por

$$d^*(\alpha, \beta) \equiv \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha = \beta \\ 1 & \text{se } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Ou seja, d^* é a aplicação que “distingue” o símbolo A do símbolo B.

Munimos agora o espaço Σ_2 da métrica $d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ dada por

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d^*(x_i, y_i)}{2^i}$$

Proposição 4.5. *A aplicação d é de fato uma métrica em Σ_2 .*

Demonstração. Em primeiro lugar, observem que dados quaisquer $x, y \in \Sigma_2$, vale sempre $d(x, y) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$; portanto d está bem definida.

Vamos verificar agora que d satisfaz os três axiomas da definição de métrica (vide a página 8):

a) $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$

De fato, obviamente $x = y$ implica $d(x, y) = 0$.

Na outra direção, se $d(x, y) = 0$ então $d^*(x_j, y_j) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}^*$, e portanto $x = y$.

b) $d(x, y) = d(y, x)$ para quaisquer $x, y \in \Sigma_2$

Decorre imediatamente da definição.

c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ para quaisquer $x, y, z \in \Sigma_2$

É (um **EXERCÍCIO**) fácil ver que para todo $j \in \mathbb{N}^*$ vale $d^*(x_j, y_j) \leq d^*(x_j, z_j) + d^*(z_j, y_j)$, e que disso segue que $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

□

Agora que Σ_2 possui uma métrica, vamos apresentar para vocês um sistema dinâmico definido em Σ_2 :

Seja $\sigma : \Sigma_2 \longrightarrow \Sigma_2$ a aplicação dada por

$$(\sigma(x))_j \equiv (x)_{j+1}$$

para cada $j \in \mathbb{N}$.

Ou seja, σ é a aplicação que leva uma sequência $x \in \Sigma_2$ na sequência obtida “deslocando” os símbolos de x uma posição para a esquerda.

Por exemplo, se x começa com

$$x = \{A, A, B, A, B, A, B, B, A, \dots\},$$

então o começo de $\sigma(x)$ é dado por

$$\sigma(x) = \{A, B, A, B, A, B, B, A, \dots\}.$$

Notem que o primeiro símbolo de x é “jogado fora” quando aplicamos σ a x .

A aplicação σ é chamada de *shift*⁹ no espaço de sequências de dois símbolos.

Ok, tudo muito bonito e legal e tal, mas... afinal, o que estes objetos todos têm a ver com T_2 ? Pois bem: o que veremos ao longo desta seção é o seguinte estupefaciente e espantoso fato: *módulo uma mudança contínua de coordenadas – um homeomorfismo conjugante – as dinâmicas de σ e de T_2 são idênticas!*

Um propriedade importante de σ é a sua continuidade:

Proposição 4.6. *O shift $\sigma : \Sigma_2 \longrightarrow \Sigma_2$ é contínuo.*

Demonstração. Sejam $x \in \Sigma_2$ e $\varepsilon > 0$. Queremos mostrar a existência de $\delta > 0$ tal que se $d(x, y) < \delta$ então $d(\sigma(x), \sigma(y)) < \varepsilon$.

Tomem $N \in \mathbb{N}$ grande o suficiente para que $\frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$. Mostraremos que $\delta = \frac{1}{2^N}$ funciona.

Então $d(x, y) < \frac{1}{2^N}$ implica que $x_j = y_j$ para todo $j \in \{0, 1, \dots, N\}$, pois caso contrário a série que define $d(x, y)$ incluiria um termo maior ou igual a $\frac{1}{2^N}$.

⁹“Deslocamento,” em inglês. Mas ninguém chama assim.

Pela definição do shift, isto implica que $(\sigma(x))_j = (\sigma(y))_j$ para todo $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, logo

$$\begin{aligned}
 d(\sigma(x), \sigma(y)) &\equiv \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{d^*((\sigma(x))_n, (\sigma(y))_n)}{2^n} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{d^*((\sigma(x))_n, (\sigma(y))_n)}{2^n} + \sum_{n \geq N} \frac{d^*((\sigma(x))_n, (\sigma(y))_n)}{2^n} \\
 &= \sum_{n \geq N} \frac{d^*((\sigma(x))_n, (\sigma(y))_n)}{2^n} \\
 &\leq \sum_{n \geq N} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon.
 \end{aligned}$$

□

Considerem agora a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned}
 \pi : \tilde{S} &\longrightarrow \Sigma_2 \\
 x &\longmapsto \pi(x),
 \end{aligned}$$

onde $(\pi(x))_i \equiv \theta((T_2)^i(x))$.

Em palavras, π associa a cada ponto de \tilde{S} uma sequência de “A”s e “B”s da seguinte forma: a primeira posição de $\pi(x)$ (a posição zero) marca onde x está em termos de pertencer a A ou a B ; a segunda posição marca onde $T_2(x)$ está em termos de A ou B ; a terceira posição onde $(T_2)^2(x)$ está em termos de A ou B ; e assim por diante. Ou seja, a sequência $\pi(x)$ é um itinerário da órbita futura de x em termos dos seus iterados pertencerem a A ou a B .

Como π não está definida em todo o círculo – e nem poderia estar pois θ não está definida no ponto $[0]$ nem em $[\frac{1}{2}]$ – a imagem de π não será todo o espaço Σ_2 .

Vamos definir agora $\tilde{\Sigma}$ como sendo o conjunto $\{q \in \Sigma_2 : q \text{ não termina com um bloco infinito de “A”s nem com um bloco infinito de “B”s}\}$. Isto é, retiramos de Σ_2 as sequências que terminam com $\{A, A, \dots\}$ ou com $\{B, B, \dots\}$. Ou então: retiramos as sequências de Σ_2 que ficam constantes a partir de alguma posição.

EXERCÍCIO: verifique que Σ_2 é não-enumerável, mas que $\Sigma_2 \setminus \tilde{\Sigma}$ é enumerável.

Claramente vale $\sigma(\tilde{\Sigma}) = \tilde{\Sigma}$. Além disso é fácil ver (outro **EXERCÍCIO** para vocês) que vale $\pi(T_2(x)) = \sigma(\pi(x))$ para todo $x \in \tilde{S}$. Ou seja, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow{T_2} & \tilde{S} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \tilde{\Sigma} & \xrightarrow{\sigma} & \tilde{\Sigma} \end{array}$$

comuta.

Veremos agora que π é uma bijeção de \tilde{S} em $\tilde{\Sigma}$. De fato, veremos que vale mais do que isso:

Teorema 4.1. *A aplicação π é um homeomorfismo entre \tilde{S} (munido da métrica do círculo) e $\tilde{\Sigma}$ (munido da métrica que acabamos de definir). Portanto π conjugua topologicamente $T_2|_{\tilde{S}}$ com $\sigma|_{\tilde{\Sigma}}$.*

Demonstração. Vamos separar a demonstração em três partes.

1) Primeiro vamos mostrar que π é contínua.

Isto é, dado $x \in \tilde{S}$ e $\epsilon > 0$, queremos obter um $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$ implica $d(\pi(x), \pi(y)) < \epsilon$.

Fixe um $x \in \tilde{S}$ e seja $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que tenhamos

$$\sum_{j>N} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^N} < \epsilon.$$

(Vamos usar agora as letras A e B para representar respectivamente os intervalos $(0, \frac{1}{2})$ e $(\frac{1}{2}, 1)$ do círculo.)

Pela continuidade de T_2 , existe $\delta_1 > 0$ tal que se $d(x, y) \leq \delta_1$ então x e y pertencem ao mesmo intervalo A ou B – ou seja, vale $\theta(x) = \theta(y)$ – e além disso $T_2(x)$ e $T_2(y)$ pertencem ao mesmo intervalo A ou B – ou seja, vale $\theta(T_2(x)) = \theta(T_2(y))$. (Aqui estamos usando o fato de que $x \in \tilde{S}$, e portanto nem x nem $T_2(x)$ estão na fronteira entre A e B .)

Da mesma forma, a continuidade de $(T_2)^2$ nos dá um $\delta_2 > 0$ tal que se $d(x, y) \leq \delta_2$ então $(T_2)^2(x)$ e $(T_2)^2(y)$ pertencem ao mesmo

intervalo A ou B – ou seja, vale $\theta((T_2)^2(x)) = \theta((T_2)^2(y))$. (Novamente, usamos aqui o fato de que $x \in \tilde{S}$, agora para garantir que nem x , nem $T_2(x)$, e nem $(T_2)^2(x)$ estão na fronteira entre A e B .)

Usando esse argumento de continuidade sucessivamente para $(T_2)^3$, $(T_2)^4, \dots$, e $(T_2)^N$, obtemos constantes $\delta_3, \delta_4, \dots, \delta_N$ correspondentes.

Colocando agora $\delta \equiv \min\{\delta_1, \dots, \delta_N\}$ concluímos que se $d(x, y) < \delta$ então $\theta(T_2)^j(x) = \theta(T_2)^j(y)$ para todo $j = 1, \dots, N$. Segue que:

$$\begin{aligned} d(\pi(x), \pi(y)) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d^*(\theta((T_2)^j(x)), \theta((T_2)^j(y)))}{2^j} \\ &= \sum_{j>N}^{\infty} \frac{d^*(\theta((T_2)^j(x)), \theta((T_2)^j(y)))}{2^j} \\ &\leq \sum_{j>N}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^N} < \epsilon. \end{aligned}$$

como desejado.

2) Agora vamos mostrar que π é uma bijeção entre \tilde{S} e $\tilde{\Sigma}$.

Fixe

$$x = \{x_0, x_1, x_2, \dots\} \in \tilde{\Sigma}.$$

O conjunto C_0 de pontos $z \in S^1$ tais que $(\pi(z))_0 = x_0$ é um intervalo de comprimento $\frac{1}{2}$ (pois $x_0 = A$ ou $x_0 = B$).

Ao aplicarmos T_2 , esse conjunto é levado bijetivamente em $S_0 \equiv S^1 \setminus \{0\}$. É fácil ver que o conjunto C_1 de pontos $z \in S^1$ tais que $(\pi(z))_0 = x_0$ e $(\pi(z))_1 = x_1$ é um intervalo de comprimento $\frac{1}{4}$ (de fato, C_1 é uma das metades do intervalo C_0).

E assim por diante: o conjunto C_2 de pontos $z \in S^1$ tais que $(\pi(z))_0 = x_0$, $(\pi(z))_1 = x_1$, e $(\pi(z))_2 = x_2$ é um intervalo de comprimento $\frac{1}{8}$.

Em geral: o conjunto C_k de pontos $z \in S^1$ tais que $(\pi(z))_j = x_j$ para cada $j \in \{0, 1, \dots, k\}$ é um intervalo de comprimento $\frac{1}{2^{k+1}}$.

Tomando os fechos K_j dos intervalos C_j , temos então uma sequência de intervalos compactos encaixados de S^1 :

$$K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n \supset \dots$$

de tamanhos respectivamente iguais a $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^{n+1}}, \dots$

Segue que existe um único $z^* \in S^1$ na interseção de todos estes intervalos: isso nos dá simultaneamente a sobrejetividade (pela existência de z^*) e a injetividade (pela unicidade de z^*) de π , **desde que z^* pertença a \tilde{S} .**

Para mostrar que efetivamente vale $z^* \in \tilde{S}$ façam o seguinte

EXERCÍCIO: Um ponto $z \in S^1$ é eventualmente fixo se e somente se $\pi(z)$ termina com uma sequência infinita de símbolos iguais¹⁰, ou seja $\pi(z) \in (\Sigma_2 \setminus \tilde{\Sigma})$.

3) Sendo uma bijeção, $\pi|_{\tilde{S}}$ admite uma inversa $\pi^{-1}|_{\tilde{\Sigma}}$. Vamos mostrar que π^{-1} é contínua.

Vamos lá. Dados $x \in \tilde{\Sigma}$ e $\epsilon > 0$ temos que obter $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$ implica $d(\pi^{-1}(x), \pi^{-1}(y)) < \epsilon$.

Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^p} < \epsilon$ e seja $y \in \tilde{\Sigma}$ tal que $d(x, y) < \frac{1}{2^p}$ (e portanto $x_j = y_j$ para todo $j \in \{1, \dots, p\}$).

Seguindo a mesma idéia da demonstração da bijetividade, podemos ver que $\pi^{-1}(x)$ e $\pi^{-1}(y)$ pertencem a uma interseção de p intervalos encaixados cujos comprimentos começam com $\frac{1}{2}$ e depois “caem pela metade a cada iterado”. Logo $d(\pi^{-1}(x), \pi^{-1}(y)) < \frac{1}{2^p} < \epsilon$, como desejado.

□

Resumindo: $T_2|_{\tilde{S}}$ e $\sigma|_{\tilde{\Sigma}}$ são topologicamente conjugadas (via π), e portanto têm a mesma dinâmica topológica.

4.4 Dinâmica Simbólica de T_2 : Inútil

E agora, tendo construído a sua dinâmica simbólica, nós vamos obter informações novas sobre a dinâmica de T_2 , certo? Afinal, como sabemos que σ e T_2 são topologicamente conjugadas (a menos do conjunto dinamicamente irrelevante $S^1 \setminus \tilde{S}$), tudo o que vale para σ vale também para T_2 , dinâmico-topologicamente falando.

Hmm, vejamos:

¹⁰Ok, a rigor é verdade que π nem mesmo está definida em pontos eventualmente fixos... o que queremos dizer no exercício é que ser eventualmente fixo obrigaria a sequência simbólica associada a ficar constante, e vice-versa.

- i) Bem, olhando a dinâmica de $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ nós podemos verificar facilmente que σ possui pontos periódicos de todos os períodos. Vamos lá:

Demonstração da afirmação (i). Dado um natural N qualquer, basta considerar por exemplo uma N -upla de $N-1$ “A”s seguido de um “B”, e depois repetir essa N -upla infinitamente:

$$q \equiv \underbrace{\{A, \dots, A, B\}}_{N \text{ posições}} \underbrace{\{A, \dots, A, B, \dots\}}_{N \text{ posições}}$$

Obviamente q é uma sequência de período N por σ . □

- ii) Mais do que isso, conseguimos (quer dizer, *vocês* conseguem: **EXERCÍCIO** meio déjà vu) contar os pontos periódicos cujo período é um fator de N :

$$\#Fix(\sigma^N) = 2^N - 1$$

- iii) Dá pra ver também que os pontos periódicos de σ são densos em Σ_2 (ou em $\tilde{\Sigma}$, o que é equivalente, pois o segundo é subconjunto denso do primeiro):

Demonstração da afirmação (iii). Sejam $x \in \tilde{\Sigma}$ e $\varepsilon > 0$. Queremos mostrar que existe algum ponto periódico p de σ que está ε -próximo de x na topologia de Σ_2 .

Seja $N \in \mathbb{N}$ grande o suficiente para que valha $\frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$. Considerem agora a N -upla $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$ formada pelas N primeiras posições de $x \equiv \{x_0, x_1, \dots\}$, e seja p a sequência em Σ_2 tal que o primeiro bloco de N posições de p coincide com a N -upla $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$, e o segundo também, e assim infinitamente. Ou seja, temos

$$p \equiv \underbrace{\{x_0, \dots, x_{N-1}\}}_{N \text{ posições}} \underbrace{\{x_0, \dots, x_{N-1}, \dots\}}_{N \text{ posições}}.$$

Claramente p é um ponto periódico de σ cujo período é um fator de N (pois $\sigma^N(p) = p$), e cujas N primeiras posições coincidem com as N primeiras posições de x .

Temos então que

$$\begin{aligned} d(x, p) &\equiv \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{d^*(x_n, p_n)}{2^n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{d^*(x_n, p_n)}{2^n} + \sum_{n \geq N} \frac{d^*(x_n, p_n)}{2^n} \\ &= \sum_{n \geq N} \frac{d^*(x_n, p_n)}{2^n} \\ &\leq \sum_{n \geq N} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ou seja, p é um ponto periódico que está ε -próximo do ponto x , que é justamente o que queríamos mostrar. \square

- iv) Finalmente, podemos ver também que a dinâmica de σ é transitiva. De fato, neste caso não precisamos usar o critério topológico de transitividade; podemos construir *explicitamente* um ponto de $\tilde{\Sigma}$ cuja órbita por σ é densa em $\tilde{\Sigma}$.

Demonstração da afirmação (iv). Notem que dado um comprimento $k \in \mathbb{N}$, só existem finitos (**EXERCÍCIO** trivial: quantos?) blocos distintos de “A”s e “B”s com comprimento k . Por exemplo, $\{A\}$ e $\{B\}$ são os únicos 1-blocos possíveis.

Já com comprimento 2, temos os blocos $\{A, A\}$, $\{A, B\}$, $\{B, A\}$, e $\{B, B\}$. E com comprimento 3, temos os blocos $\{A, A, A\}$, $\{A, A, B\}$, $\{A, B, A\}$, $\{A, B, B\}$, $\{B, A, A\}$, $\{B, A, B\}$, $\{B, B, A\}$, e $\{B, B, B\}$. E por aí vai.

Pois bem, podemos usar esta observação para explicitar uma sequência p de “A”s e “B”s – ou seja, um elemento de Σ_2 – cuja órbita futura por σ é densa em Σ_2 .

É assim: comece colocando nas primeiras posições os primeiros 1-blocos na ordem que você quiser. Não se preocupe com as outras posições por enquanto. Por exemplo:

$$p_1 = \{A, B\}$$

Agora acrescente todos os 2-blocos, novamente na ordem que preferir. Por exemplo:

$$p_{1+2} = \{ \underbrace{A}_1, \underbrace{B}_1, \underbrace{A, A}_2, \underbrace{A, B}_2, \underbrace{B, A}_2, \underbrace{B, B}_2 \}$$

E depois acrescente todos os 3-blocos, e assim por diante. No limite teremos uma sequência $p_\infty \equiv p \in \Sigma_2$ que “contém todos os possíveis blocos com comprimento finito”. Vamos verificar agora que a órbita (futura) deste p por σ é densa em Σ_2 :

Seja $q \in \Sigma_2$ uma sequência qualquer e $\varepsilon > 0$. Queremos mostrar que existe algum iterado N de σ tal que $d(q, \sigma^N(p)) \leq \varepsilon$. Fixe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{M+1}} < \varepsilon$.

Como todos os possíveis blocos de comprimento M aparecem como subblocos de p , segue que o M -bloco formado pelas M primeiras posições de q aparece a partir de alguma posição N de p . Ou seja, vale que

$$q_i = p_{i+N}$$

para todo $i \in \{0, 1, \dots, M-1\}$.

Pela definição do shift σ , temos então que as primeiras M posições de $\sigma^N(p)$ coincidem com as primeiras M posições de q :

$$q_i = (\sigma^N(p))_i$$

para todo $i \in \{0, 1, \dots, M-1\}$.

Segue então que

$$\begin{aligned}
d(q, \sigma^N(p)) &\equiv \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{d^*(q_i, (\sigma^N(p))_i)}{2^n} \\
&= \sum_{i=0}^{M-1} \frac{d^*(q_i, (\sigma^N(p))_i)}{2^n} + \sum_{i \geq M} \frac{d^*(q_i, (\sigma^N(p))_i)}{2^n} \\
&= \sum_{i \geq M} \frac{d^*(q_i, (\sigma^N(p))_i)}{2^n} \\
&\leq \sum_{i \geq M} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{M+1}} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ou seja, mostramos que qualquer ponto de Σ_2 é aproximado por iterados de p , que é o que queríamos.

□

Resumindo a estória, ao examinar a dinâmica (simbólica) de σ nós conseguimos descobrir várias coisas¹¹ sobre a dinâmica (topológica) de T_2 :

- 1) o conjunto dos pontos periódicos de T_2 é denso no círculo, a além disso existem pontos periódicos de todos os períodos possíveis;
- 2) existem pontos cujas órbitas futuras por T_2 são subconjuntos densos no círculo (i.e., T_2 é transitiva).

Sensacional, né? Viram quanta coisa nova a gente descobriu sobre T_2 usando dinâmica simbólica?

Tá.

Ahem¹².

¹¹Só não dá pra ver os pontos eventualmente fixos de T_2 , pois esses são justamente os pontos que excluímos da dinâmica simbólica. Mas tudo bem, nós já conhecemos a dinâmica deles mesmo.

¹²*Ahem* é a notação-padrão na literatura matemática para “pigarro constrangido.”

Interlúdio Dramático

[A CENA: Um jovem matemático ministra um minicurso sobre sistemas dinâmicos para uma platéia mais jovem ainda. Sua calça e camisa estão manchadas de giz. O matemático acaba de concluir um argumento e olha triunfante para a platéia. No fundo da sala, um aluno se remexe incomodado, cria coragem, e levanta a mão.]

ALUNO [timidamente]: *Peraí, professor: a gente já não sabia tudo isso a respeito de T_2 ?*

MATEMÁTICO: *Hmm, certo. Tá, você tem razão, nós já sabíamos a maior parte disso sim. Mas... hmm, tá. Bem, mas agora nós conseguimos contar os pontos periódicos, né? Quero dizer, conseguimos contar mesmo, não só mostrar que eles existem.*

A [ainda hesitante]: *Mas... você já fez isso na última aula, lembra? Mesmo antes da dinâmica simbólica já dava pra contar os pontos fixos das potências de T_2 , não só mostrar a existência dos periódicos.*

M [nervoso]: *Certo. Bem... tá, certo.*

A [agora mais confiante]: *Então por que a gente teve todo esse trabalho de construir uma dinâmica simbólica para T_2 ?*

M [mais nervoso, começando a gaguejar]: *Bem, eu... quero dizer. Ahem. Bem.*

[Os alunos, perplexos, se entreolham e cochicham. O tom predominante dos cochichos é de indignação. O matemático começa a suar frio. Ele fica calado.]

A [agora plenamente confiante, e assumindo o papel de porta-voz dos colegas]: *Então quer dizer que nós perdemos o nosso tempo nessa aula inteira? A gente poderia estar aprendendo coisas interessantes sobre geometria tropical ou análise temperada e ao invés disso passamos quase uma hora sentados aqui aprendendo algo absolutamente inútil!*

[O cochicho indignado rapidamente se transforma numa balbúrdia raivosa. Um aluno grita “Isso é uma palhaçada! Queremos nossas taxas de inscrição de volta!” Outro, ainda mais enfurecido, berra “Morte à dinâmica simbólica!”]

[Durante algum tempo, paralisado pelo medo, o jovem matemático assiste à fúria crescente da platéia. Subitamente ele dispara correndo

na direção da saída do auditório. Uma turba de alunos ensandecidos o persegue.]

[DESCE O PANO.]

(fim do interlúdio)

Ok então. Continuando com o minicurso:

Se estivéssemos buscando informações mais sutis sobre a dinâmica de T_2 (como por exemplo calcular um negócio chamado *entropia*), a sua dinâmica simbólica nos forneceria informações muito mais facilmente do que a análise imediata de T_2 . Mas para as questões topológicas simples com as quais estamos lidando, como transitividade e número de pontos periódicos, a dinâmica simbólica de T_2 realmente não nos fornece novas informações. Em compensação, ela será útil para entendermos a dinâmica das *perturbações* de T_2 (o assunto do próximo capítulo).

Observação. *Em contextos mais complicados do que expansões do círculo – para estudar dinâmicas em dimensões mais altas, por exemplo – a construção de dinâmicas simbólicas é útil e em muitos casos imprescindível para podermos analisar as dinâmicas em questão. Isso mesmo quando lidamos com propriedades básicas como transitividade e existência/número de pontos periódicos.*

Bem, vamos às perturbações de T_2 .

Capítulo 5

Transformações Expansoras Não-Lineares

5.1 Expansoras Não-Lineares de Grau 2

No capítulo anterior construímos a dinâmica simbólica de T_2 e a partir dela nós conseguimos, após um esforço substancial, não obter nenhuma informação nova sobre a dinâmica de T_2 .

Agora veremos que a mesma construção nos fornece informações valiosas sobre as transformações diferenciáveis do círculo que estão *próximas* de T_2 . Por “próximas” aqui queremos dizer próximas na topologia C^1 :

Definição 5.1. *Seja $C^1(S^1)$ o espaço de todas as aplicações C^1 do círculo nele mesmo¹. Munimos $C^1(S^1)$ da métrica C^1 que já utilizamos no espaço dos difeomorfismos:*

$$d(f, g) \equiv \sup_{x \in S^1} \{ \max \{ d_{S^1}(f(x), g(x)), |f'(x) - g'(x)| \} \}$$

Ou seja, d compara ponto-a-ponto os valores das imagens e das

¹Notem que $\text{Diff}^1(S^1) \subset C^1(S^1)$ mas que não vale a inclusão inversa.

derivadas de f e g . Com a métrica d o espaço $C^1(S^1)$ é um espaço métrico completo.

Bem, como são as aplicações de $C^1(S^1)$ que estão próximas a T_2 ? Notem que, como a derivada de T_2 é igual a 2 em todos os pontos de S^1 , segue que se $f \in C^1(S^1)$ é suficientemente C^1 -próxima² de T_2 então

- i) existe alguma constante $\lambda > 1$ tal que $f'(x) > \lambda$ para todo $x \in S^1$, e
- ii) além disso f ainda tem grau 2.

Veja na Figura 5.1 um esboço de uma perturbação de T_2 :

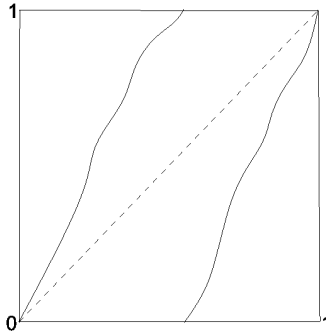


Figura 5.1: O gráfico de uma perturbação de T_2

A propriedade (i) acima merece um nome especial:

Definição 5.2. Uma aplicação $f \in C^1(S^1)$ é expansora se existe alguma constante $\lambda > 1$ tal que $f'(x) \geq \lambda$ para todo $x \in S^1$. A constante λ é chamada de constante de expansão de f . (Notem que se λ é uma constante de expansão para f então todo $\lambda^* \in (1, \lambda)$ também é.)

²**EXERCÍCIO:** ter $d(f, T_2) < \frac{1}{4}$ é próximo o suficiente.

Logo podemos reformular a observação acima do seguinte modo:

Proposição 5.1. *Se $g \in C^1(S^1)$ é tal que $d(g, T_2) < 1$, então g é uma aplicação expansora de grau 2.*

Na verdade, vale algo mais geral:

Proposição 5.2. *Se $f \in C^1(S^1)$ é aplicação expansora de grau 2, então existe δ tal que se $d(g, f) < \delta$ então g também é expansora de grau 2.*

Demonstração. Dada $\lambda > 1$ uma constante de expansão de f , seja g tal que

$$d(g, f) < \min\{\lambda - 1, \frac{1}{4}\}.$$

O fato de estar a uma distância C^0 (i.e. distância ponto-a-ponto) menor do que $\frac{1}{4}$ garante que g tem o mesmo grau de f ($= 2$, neste caso). E o fato da distância C^1 ser menor do que $\lambda - 1$ garante que a derivada de g é estritamente maior que $\lambda - (\lambda - 1) = 1$ em todos os pontos do círculo. Como a derivada de g é contínua e o círculo é compacto, segue pelo teorema de Weierstrass que existe constante $\lambda_g > 1$ tal que $g'(x) \geq \lambda_g$ para todo $x \in S^1$. \square

Resumindo:

A condição de ser expansora de grau 2 é aberta em $C^1(S^1)$.

Pergunta: Tá, mas o que uma aplicação f ser expansora de grau 2 nos diz sobre a dinâmica de f ?

Resposta: tudo, topologicamente falando.

Vamos esclarecer essa afirmação bombástica examinando a dinâmica simbólica de f :

Teorema 5.1. *Dada $f : S^1 \rightarrow S^1$ uma aplicação expansora de grau 2, então existem um subconjunto f -invariante \tilde{S}_f tal que $S^1 \setminus \tilde{S}_f$ é enumerável, e um homeomorfismo $\pi_f : \tilde{S}_f \rightarrow \tilde{\Sigma}$ que conjuga $f|_{\tilde{S}_f}$ com $\sigma|_{\tilde{\Sigma}}$.*

Demonstração. Não faremos os detalhes desta demonstração pois ela é análoga à construção da dinâmica simbólica de T_2 . Vamos apenas indicar o roteiro da adaptação para o caso não-linear.

- 1) A aplicação f , sendo de grau 2, tem um único ponto fixo no círculo, digamos p_0 . Chame de A e B os intervalos abertos de S^1 que tem p_0 como extremo.

Vale então que $S^1 = A \cup B \cup \{p_0\}$, onde a reunião é disjunta. (Obviamente, os comprimentos de A e B não são necessariamente iguais a $\frac{1}{2}$, mas isso não terá nenhuma importância.)

- 2) Retire do círculo todas as pré-imagens dos ponto p_0 por iterados de f (ou seja, todos os pontos eventualmente fixos de f). Como f tem grau 2, cada ponto tem 2 pré-imagens, e portanto o conjunto retirado é enumerável. Chame de \tilde{S}_f o que restou do círculo.
- 3) Agora defina a função sinalizadora $\theta : \tilde{S} \rightarrow \{A, B\}$ analogamente ao que foi feito no caso de T_2 , e defina o shift $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ e a aplicação $\pi : \tilde{S}_f \rightarrow \tilde{\Sigma}$ *exatamente* como elas foram definidas no caso de T_2 .

Observação. *Enquanto que aqui o conjunto \tilde{S}_f não é o mesmo conjunto que o \tilde{S} que apareceu no caso de T_2 (mas será homeomorfo a ele), o conjunto $\tilde{\Sigma}$ que aparece aqui é exatamente o mesmo subconjunto de Σ_2 que apareceu no caso de T_2 .*

É fácil ver que vale $\pi(f(x)) = \sigma(\pi(x))$ para todo $x \in \tilde{S}_f$.

- 4) Usando argumentos análogos aos usados na demonstração do Teorema 4.1, verificamos que π é um homeomorfismo entre \tilde{S}_f e $\tilde{\Sigma}$.

De fato, o importante na demonstração do Teorema 4.1 é justamente o fato de T_2 expandir distâncias no futuro (e portanto contrair distâncias no passado) exponencialmente. E f , sendo expansora, também tem essa propriedade; a única diferença – que não faz nenhuma diferença na demonstração – é que a constante de expansão de f não é necessariamente 2, mas sim alguma constante $\lambda > 1$.

□

Então qualquer aplicação expansora f de grau 2 é topologicamente conjugada ao shift $\sigma|_{\tilde{S}}$ num subconjunto \tilde{S}_f que é essencialmente o círculo inteiro.

Ou seja, se retiramos o pequeno conjunto $S^1 \setminus (\tilde{S}_f)$, então f tem *exatamente* a mesma dinâmica topológica de T_2 . E o que sobrou, os pontos de $S^1 \setminus (\tilde{S}_f)$, são apenas os pontos eventualmente fixos de f .

Segue portanto que *toda f expansora de grau 2 é caótica!*

No final das contas, o que nós mostramos³ foi que:

- 1) *Toda aplicação expansora de grau 2 é (essencialmente) topologicamente conjugada à expansora linear T_2 , e portanto é caótica; segue da existência desta conjugação que*
- 2) *Dadas duas aplicações f e g expansoras de grau 2, então f e g são topologicamente conjugadas⁴; e portanto, como ser expansora de grau 2 é uma condição C^1 -aberta, temos*
- 3) *Toda aplicação expansora de grau 2 é estruturalmente estável!*

Então dada *qualquer* aplicação f expansora de grau 2 sabemos que a dinâmica de f é complicada e caótica – tão complicada e caótica quanto a dinâmica da aplicação T_2 – mas que essa complicação toda permanece essencialmente inalterada quando damos um peteleco C^1 em f .

Se considerarmos as trajetórias dos pontos x do círculo por f , elas variam de maneira radical com pequeniníssimas mudanças em x : variando infinitesimalmente x você passa de um periódico para um eventualmente fixo, e daí para um ponto transitivo, etc etc. Sem falar que órbitas de dois pontos distintos sempre acabam se afastando

³O que apresentamos não chega a ser uma demonstração completa, mas está quase lá. O que falta mostrar é o item (2): que podemos estender o homeomorfismo conjugador entre duas expansoras para o círculo inteiro. Até daria para fazer com um pouquinho de trabalho adicional, mas bateu preguiça.

⁴Pois tanto f quanto g são (essencialmente) conjugadas ao shift, e disso (é aqui que falta um argumentinho extra...) segue que f e g são conjugadas entre si.

em algum momento, pela dependência sensível. Ou seja, f é pra lá de *instável* se você considera perturbações dos pontos iniciais das órbitas.

Mas se você perturba a *própria* f , a dinâmica permanece a mesma, módulo uma pequena mudança de coordenadas (o homeomorfismo conjugador). Essa é justamente a característica fundamental – e mais espantosa – dos sistemas hiperbólicos caóticos: neles, a *instabilidade* das órbitas individuais convive com a *estabilidade* global da dinâmica.

5.2 Expansoras Não-Lineares de Grau k

Tudo o que fizemos até agora nos últimos dois capítulos foi no contexto de aplicações expansoras de grau 2. Mas não há nenhuma razão – exceto a pedagógica – para trabalharmos apenas com aplicações de grau 2.

De fato, dado qualquer $k \geq 2$, podemos considerar a *expansora linear de grau k*

$$T_k : S^1 \rightarrow S^1$$

$$[x] \mapsto [k \cdot x]$$

do círculo nele mesmo. Geometricamente, esta aplicação corresponde a esticar o círculo até ele ter k vezes o seu tamanho original do seu comprimento e enrolá-lo de volta no próprio círculo, dando k voltas completas. Veja na Figura 5.2 o gráfico de T_3 .

Pois bem, módulo pequenas modificações, muito do que observamos sobre T_2 se aplica a T_k :

- i) o ponto $[0]$ é ponto fixo de T_k , e possui k pré-imagens por T_k : os pontos $[0], [\frac{1}{k}], [\frac{2}{k}], \dots, [\frac{k-1}{k}]$;
- ii) existem $k - 2$ outros pontos fixos (**EXERCÍCIO**: quem são?) de T_k . Cada um deles tem k pré-imagens por T_k ;
- iii) o conjunto $EFix(T_k)$ de pontos eventualmente fixos de T_k é denso no círculo. Evidentemente, os elementos deste conjunto são justamente os pontos que caem após alguns iterados em algum dos pontos descritos nos itens (i) e (ii);

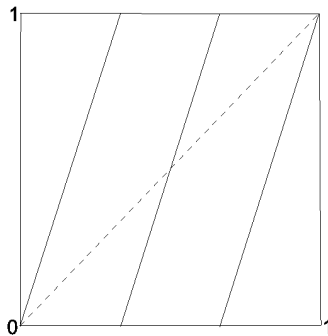


Figura 5.2: O gráfico de T_3

- iv) a dinâmica de T_k é transitiva: existem (infinitos, densos) pontos cujas órbitas futuras são densas no círculo;
- v) o conjunto $Per(T_k)$ de pontos periódicos de T_k é denso no círculo, e além disso existem pontos periódicos de todos os períodos possíveis.
- vi) a dinâmica de T_k tem dependência sensível às condições iniciais, com constante $\frac{1}{k^2}$.

As demonstrações destas propriedades são todas análogas às demonstrações para T_2 . Em alguns casos não é necessária quase nenhuma modificação, como nos itens (iv) e (vi). Em outros, como nos itens (ii) e (v), um pouquinho (mas só um pouquinho) de cuidado adicional é necessário. Não faremos nenhuma delas; vocês estão convidados a fazê-las como **EXERCÍCIOS**.

O ponto aqui é que a dinâmica de T^k tem muito em comum com a dinâmica de T_2 . Enfim, T_k também é caótica.

Será que T_k com $k \geq 2$ arbitrário e T_2 têm a mesma dinâmica, módulo homeomorfismo? Isto é, será que elas são topologicamente conjugadas? Hmm...

Não, se pararmos para pensar um pouco veremos que isso não é verdade: para começar T_k e T_2 não tem o mesmo número de pontos

fixos. Mais do que isso, dado um período s sabemos que T_2 tem 2^s pontos fixos por $(T_2)^s$, mas daqui a pouquinho veremos que T_k tem k^s pontos fixos por $(T_k)^s$.

Como conjugações preservam o número de pontos periódicos de um dado período, isso mostra que dados $k \neq \ell$ vale que T_k e T_ℓ não são topologicamente conjugados.

Mas veremos agora que dado um k fixo, existe um modelo simbólico para a dinâmica de T_k . A construção deste modelo tem um sabor parecidíssimo com a do modelo simbólico de T_2 . Os ingredientes são os mesmos, e a receita é quase idêntica. Vamos lá:

Dinâmica Simbólica a la Smale

Ingredientes:

O círculo S^1

Um natural k qualquer⁵

Restos e sobras da dinâmica simbólica de T_2

Uma pitada de noções de topologia

Disponha todos os ingredientes na sua escrivinha. Lave-os cuidadosamente antes de começar o preparo.

1) Fatie o círculo em k pedaços do mesmo tamanho:

$$I_1 \equiv (0, \frac{1}{k}), I_2 \equiv (\frac{1}{k}, \frac{2}{k}), \dots, I_{k-1} \equiv (\frac{k-2}{k}, \frac{k-1}{k}), I_k \equiv (\frac{k-1}{k}, 1)$$

2) Jogue fora o resto, ou seja, os pontos

$$[0], [\frac{1}{k}], [\frac{2}{k}], \dots, [\frac{k-1}{k}]$$

3) Agora descarte também todos os pré-iterados dos pontos do item (2). Não se preocupe com desperdício, você não gastou nenhum dinheiro à toa quando comprou o círculo na feira: o

⁵Pode ser um natural graúdo ou miúdo, tanto faz. Só não pode ser 1, porque aí o prato fica sem nenhuma graça.

que você jogou fora é enumerável, e portanto não tem peso nem gosto nenhum.

Chame o que restou (que é essencialmente o círculo inteiro) de “ \tilde{S} ”. (Notem que este \tilde{S} *não* é o mesmo conjunto que o \tilde{S} que apareceu na construção da dinâmica simbólica de T_2 .) Reparem que este conjunto é invariante por T_k .

- 4) Segure com firmeza o conjunto \tilde{S} e espete nele uma função

$$\theta : \tilde{S} \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$$

que grita “1” quando vê um ponto no intervalo I_1 , “2” quando vê um ponto no intervalo I_2 , e assim por diante.

- 5) Coloque num recipiente separado o espaço Σ_k de sequências de k símbolos ⁶

$$\Sigma_k \equiv \{ \{ \alpha_j \}_{j \in \mathbb{N}^*} : \alpha_j \in \{1, 2, \dots, k\} \text{ para cada } j \}$$

- 6) Meça cuidadosamente a distância entre dois pontos de Σ_k da seguinte forma:

Dados dois símbolos $\alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, k\}$, coloque

$$d^*(\alpha, \beta) \equiv \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha = \beta \\ 1 & \text{se } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

E dadas duas sequências $p, q \in \Sigma_k$, coloque

$$d(p, q) \equiv \sum_{j \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2^j} \cdot d^*(p_j, q_j)$$

Com esta noção de distância Σ_k se torna um espaço métrico completo.

- 7) Tome agora o shift

$$\sigma : \Sigma_k \longrightarrow \Sigma_k$$

⁶Símbolos estes que criativamente denotaremos por “1”, “2”, ..., “ $k-1$ ” e “ k ”.

dado por

$$(\sigma(p))_i = (p)_{i+1}$$

Restrinja este shift ao espaço

$$\tilde{\Sigma} \equiv \{p \in \Sigma_k : p \text{ não se torna constante depois de certa posição}\}$$

- 8) Agora junte o shift com a dinâmica de T_k repetindo os passos da receita do modelo simbólico de T_2 : conjugue $T_k|_{\tilde{\Sigma}}$ com $\sigma|_{\tilde{\Sigma}}$ através do homeomorfismo

$$\begin{aligned} \pi : \tilde{S} &\longrightarrow \tilde{\Sigma} \\ x &\mapsto \pi(x), \end{aligned}$$

onde $(\pi(x))_i \equiv \theta((T_k)^i(x))$.

- 9) Polvilhe formalização a gosto e sirva. Acompanha bem tanto teoria ergódica quanto dinâmica topológica.

Através da dinâmica simbólica do shift σ nós podemos, exatamente como fizemos para T_2 , reobter as propriedades da dinâmica de T_k . A saber: T_k é transitiva, seu conjunto de pontos periódicos é denso (e ocorrem todos os possíveis períodos), e T_k tem dependência sensível às condições iniciais.

E assim como aconteceu com T_2 , a construção acima – e portanto a dinâmica topológica do shift σ – não se aplica somente a T_k , mas a todas as pequenas C^1 perturbações de T_k , e de fato a todas as aplicações expansoras de grau k .

Então vamos poupar vocês de mais uma repetição-de-argumentos-módulo-pequenas-alterações e chegar de uma vez à nossa apoteótica conclusão:

TEOREMA. *Dado qualquer $k \geq 2$ então todas as aplicações expansoras de grau k do círculo são caóticas e estruturalmente estáveis.*

Epílogo: as Três Morais da Estória

Rapidinho:

- Sistemas hiperbólicos são extremamente simples (os Morse-Smale) ou extremamente complicados (“caóticos”, como os expansores do círculo).
- Em sistemas hiperbólicos caóticos, a *instabilidade* das órbitas individuais convive com a *estabilidade* estrutural da dinâmica.
- No fundo, hiperbolicidade e estabilidade estrutural são a mesma coisa.

Estas três morais valem para toda a dinâmica diferenciável, não só para as dinâmicas unidimensionais. Estudem ferraduras, dinâmicas simbólicas, iteração de funções racionais etc etc que vocês descobrirão o quanto isso é verdade. E descobrirão de quebra o quão interessante o estudo da dinâmica é.

Tá, acabou.

Referências

Os três primeiros capítulos deste livro foram adaptados do seguinte brilhante⁷ trabalho em andamento:

- 0) L. F. N. França, *Estabilidade e Densidade dos Difeomorfismos Morse-Smale do Círculo*, dissertação de mestrado PUC-Rio.

E agora, três livros bacanas e razoavelmente elementares sobre dinâmica que incluem tópicos de dinâmica unidimensional:

- 1) M. Brin e G. Stuck, *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.
- 2) R. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Westview Press, 2003.
- 3) R. Robinson, *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*. CRC Press, 1998.

Para quem quer pegar pesado, um livro bacana e não-muito-elementar sobre dinâmica unidimensional:

- 4) W. de Melo e S. van Strien, *One-Dimensional Dynamics*. Springer, 1993.

Para os amantes da apicultura, recomendamos entusiasticamente o

- 5) R. Conrad e G. P. Nabhan, *Natural Beekeeping: Organic Approaches to Modern Apiculture*. Chelsea Green Publishing, 2007.

Finalmente, acreditamos piamente que a Phormação de um Aluno de Matemática nunca estará completa enquanto ele não tiver estudado no original os textos onde as Idéias apareceram pela primeira vez. Isso mesmo se a notação for incompreensivelmente Arcaica e o Aluno não souber uma Palavra da língua do original. Como não tivemos tempo de pesquisar os Primórdios da Dinâmica, recomendamos vivamente a Leitura de uma célebre Obra de Friedrich Ludwig Gottlob Frege:

- 6) F. G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Universität Breslau, 1884.

⁷Palavra do segundo autor destas notas.