PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DO CONJUNTO DE JULIA

LIBERATO, Serginei José do Carmo[1]; MIRANDA, Alexandre Alves[2]

Conceitos Iniciais

Neste Trabalho nosso objetivo é determinar uma forma de mensurar o Conjunto de Julia, para isso usaremos principalmente as referências [1], [9] e [10]. Precisamos primeiramente das seguintes definições:

Definição 1 *Seja S uma superfície de Riemann e T uma superfície de Riemann compacta. Uma coleção $\mathcal{F}$ de funções holomorfas de S para T é chamada família normal se o seu fecho $\overline{\mathcal{F}} \subset HOL(S,T)$ é um conjunto compacto.*

Equivalentemente se cada sequência de funções $f_n \in \mathcal{F}$ contém uma subsequência que converge localmente uniformemente para alguma função limite $g : S \to T$.

Definição 2 *Seja S uma superfície de Riemann compacta, seja $f : S \to S$ uma aplicação holomorfa e seja $f^n : S \to S$ a n-ésima iterada. O domínio de normalidade da coleção de iteradas f^n é chamado **Conjunto de Fatou** para f. O seu complementar é chamado de **Conjunto de Julia**.*

Definição 3 *Seja $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ um polinômio complexo mônico de grau $d \geq 2$. Denotamos por P^n a n-ésima iterada de P. O Conjunto de Julia Cheio é definido por*

$$K(P) = \{z : P^n(z), \text{ não tende para } \infty\}$$

Exemplo 4 *Para o polinômio $P_0(z) = z^d$ o conjunto de Julia Cheio $K(P_0)$ é o disco unitário fechado, e o conjunto de Julia $J(P_0)$ é o círculo unitário.*

Propriedades dos Conjuntos de Julia e Fatou

Lema 5 (Lema da Invariância): *O Conjunto de Julia $J = J(f)$ de uma aplicação holomorfa $f : S \to S$ é totalmente invariante sobre f. Isto é, z pertence a J se, e somente se, a imagem $f(z)$ pertence a J.*

Lema 6 (Lema da Iteração): *Para algum $k > 0$, o Conjunto de Julia $J(f^k)$ da k-ésima iterada coincide com o Conjunto de Julia $J(f)$.*

Demonstração: O conjunto de Julia de f coincide com o conjunto de Julia de f^k, pois se f^k é normal sobre um conjunto aberto U então f^{nk} também é normal sobre U. Por outro lado se f^{nk} é normal sobre U então f^k também é normal sobre U, e assim segue o resultado.

Lema 7 (Conjunto de Julia com Interior): *Se f é racional de grau 2 ou mais, então o Conjunto de Julia $J = J(f)$ é não vazio.*

Demonstração: Suponha que $J = \emptyset$, então f^n é uma família normal sobre toda $\widehat{C}$, e então existe uma subsequência $\{n_j\}$ tal que $f^{n_j}(z) \to g(z)$ para alguma função analítica g de $\widehat{C}$ para $\widehat{C}$. Se g é constante então a imagem de f^{n_j} está contida em uma pequena vizinhança de um valor constante, o que é impossível, pois f^n converge em $\widehat{C}$. Se g é não constante então f^{n_j} tem o mesmo número de zeros de g, o que é impossível já que f^n tem grau d^n.

Corolário 8 *Se o Conjunto de Julia contém um ponto interior, então ele deve ser igual a toda a esfera de Riemann.*

Propriedades Geométricas do Conjunto de Julia

Teorema 9 (Teorema de Böttcher): *Suponha P um polinômio mônico com Conjunto de Julia Cheio conexo. Então existe um único isomorfismo analítico $\varphi_P : \widehat{\mathbb{C}} - K(P) \to \Delta$ tal que*

$$\varphi_P \circ P = P_0 \circ \varphi_P,$$

onde $P_0(z) = z^d$ e $\Delta = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| > 1\}$.

Obs.: Da proposição interior vemos que o Conjunto de Julia Cheio é conexo, a inversa de $\varphi_P(z)$ denotada por ψ_P é uma função meromorfa univalente definida sobre Δ e tem a forma

$$\psi_P(z) = z + \frac{b_0}{z^0} + \frac{b_1}{z^1} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots, \text{ para } |z| > 1.$$

Daí do Teorema de Böttcher temos que

$$P \circ \psi_P = \psi_P \circ P_0.$$

Proposição 10 *Suponha P um polinômio mônico e centrado de grau $d \geq 2$ com $K(P)$ conexo. Então*

$$K(P) \subset \{w : |w| \leq 2\}.$$

Teorema 11 *Suponha que P_1 e P_2 são polinômios mônicos com grau $d_1 \geq 2$ e $d_2 \geq 2$, respectivamente, e $K(P_1) \subset K(P_2)$ então $d_2 \leq d_1$.*

Demonstração: Suponha $A_1 = \widehat{\mathbb{C}} - K(P_1)$ e $A_2 = \widehat{\mathbb{C}} - K(P_2)$ os domínios de φ_{P_1} e φ_{P_2} dados pelo teorema de Böttcher, daí:

$$\varphi_{P_1}(P_1(z)) = (\varphi_{P_1}(z))^{d_1}; \quad \varphi_{P_2}(P_2(z)) = (\varphi_{P_2}(z))^{d_2}$$

Portanto

$$d_1 = \frac{\log|\varphi_{P_1}(P_1(z))|}{\log|\varphi_{P_1}(z)|}; \quad d_2 = \frac{\log|\varphi_{P_2}(P_2(z))|}{\log|\varphi_{P_2}(z)|}$$

Por $K(P_1) \subset K(P_2)$ e

$$\frac{\varphi_{P_1}(z)}{z} \to 1 \ (z \to \infty); \quad \frac{\varphi_{P_2}(z)}{z} \to 1 \ (z \to \infty)$$

Conseguimos que:

$$\frac{\varphi_{P_1}(z)}{\varphi_{P_2}(z)} \to 1 \ (z \to \infty)$$

Daí $\varphi_{P_1}(z) \sim \varphi_{P_2}(z)$ para z suficientemente grande.
Agora seja $z_0 \in A_1$ e $z_0 \notin A_2$, assim $P_1^n(z_0) \to \infty$ mas $P_2^n(z_0) \not\to \infty$. Daí podemos encontrar z_1 suficientemente grande tal que

$$|\log\varphi_{P_2}(P_2(z_1))| \leq |\log\varphi_{P_1}(P_1(z_1))|$$

e como

$$\varphi_{P_1}(z_1) \sim \varphi_{P_2}(z_1)$$

Temos que $d_2 \leq d_1$.

Teorema 12 *Suponha que $P(z) = z^d + a_{d-2}z^{d-2} + \cdots + a_0$ é um polinômio centrado e mônico com $K(P)$ conexo, então*

$$Dia(K(P)) \leq \sqrt{8\left(1 + \left|\frac{a_{d-2}}{d}\right|\right)}.$$

Dimensão de Hausdorff do Conjunto de Julia

Para se determinar uma cota inferior para o Conjunto de Julia precisamos da definição de Medida de Hausdorff.

Definição 13 *Seja E algum subconjunto de $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$(a esfera de Riemann) e t um inteiro positivo. Para cada $\delta > 0$, consideremos as possíveis coberturas de $\{A_j\}$ de E por conjuntos de diâmetro menor do que δ. Definimos*

$$m_t^\delta(E) = inf\left\{\sum_j |A_j|^t : |A_j| < \delta, E \subset \bigcup_j A_j\right\}.$$

Como δ decresce, a classe de tais convergências de E diminuem e definimos a medida t-dimensional $m_t(E)$ de E por

$$m_t(E) = \lim_{\delta \to 0} m_t^\delta(E) = sup_{\delta > 0} m_t^\delta(E)$$

Tal limite sempre existe, e $m_t(E)$ é chamada a t-dimendional medida de Hausdorff.

Lema 14 *Se $m_t(E) < +\infty$ e $t < T$, então $m_T(E) = 0$*

Definição 15 *Uma consequência imediata do lema anterior é a existência de um número não negativo $d(E)$ tal que*

$$m_t(E) = \begin{cases} +\infty \text{ se } & t < d(E) \\ 0 \text{ se } & t > d(E) \end{cases}$$

tal número $d(E)$ é denominado a dimensão de Hausdorff de E, e será denotado por $Dim_H(E)$.

Com esta definição temos o seguinte teorema

Teorema 16 *Seja f uma aplicação racional de grau d, onde $d \geq 2$. Se $\infty \in F(f)$, então*

$$Dim_H(J) \geq \frac{log(d)}{log K_0}$$

e este limite é o menor possível. Onde $K_0 = max\{|f'(z)| : z \in J\}$.

Referências

[1] Guaxiao Yang, *Complex Variables, Theory and application: An International Journal*, 2001, pp.383-391.

[2] Alan F. Beardon, *Iteration of Irational Functions*, Complex Analytic Dynamicals Systems, Spring-Verlag, 2000.

[3] Kenneth Falconer, *Fractal Geometry second edition*, Wiley, 2009.

[4] Paulo Ruffino, *Uma Iniciação aos Sistremas Dinâmicos Estocásticos*, IMPA, 2009.

[5] H. L. Royden and P. M. Fitzpatick, *Real Analysis*, 4° edição, China Machine Press, 2010.

[6] C. A. Rogers, *Hausdorff Measures*, Cambrisge University Press, 1970.

[7] John Milnor, *Dynamics One Complex Variable*, rincenton University Press, Annuals of Mathematics Studies, Vol. 60.

[8] Lennart Carleson and Theodore W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Spring-Verlag, 1992.

[9] Ch. Pommerenke, *Univalent Functions*, Vandenhoeck and Ruprecht, Gottingen, 1975.

[10] Ch. Pommerenke, Communicated by M.M Schiffer, On the Grunsky Inequalities for Univalent Functions, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1969, Volume 35, 234-244.

Universidade Federal de Viçosa
1: sergineiliberato@gmail.com, 2: amalves@ufv.br