Soliton de Ricci Gradiente Steady Localmente Conformemente Flat

Hiuri Fellipe Santos dos Reis (hiurifellipe@gmail.com)

Orientador: Dr. Romildo da Silva Pina (romildo@mat.ufg.br)

Resumo

Neste trabalho classificamos os solitons de Ricci n-dimensionais ($n \geq 3$) gradiente steady localmente conformemente flat completo e não compactos. Em particular, provamos que um soliton de Ricci gradiente completo, não compacto, não flat, steady e localmente conformemente flat é o soliton de Bryant.

Soliton de Ricci Gradiente

Dizemos que uma variedade Riemanniana completa (M^n, g) é um soliton de Ricci se existem um campo diferenciável V sobre M e um número real λ, tal que

$$Ric_g = \frac{1}{2}\mathcal{L}_V g + \lambda g, \tag{0.1}$$

onde $\mathcal{L}_V g$ é a derivada de Lie do tensor métrico g na direção de V e Ric_g é o tensor de Ricci.

Quando $\lambda > 0$, $\lambda < 0$ ou $\lambda = 0$, temos que o soliton é shrinking, expanding ou steady, respectivamente.

Os Solitons de Ricci são generalizações naturais da métrica de Einstein, basta considerar V sendo o campo nulo.

Um caso especial é quando o campo V é o gradiente de alguma função F sobre M, neste caso dizemos que o soliton é gradiente, a função F é a função potencial e a imagem inversa de qualquer valor regular c da função potencial F, $\Sigma_c = \{p \in M; F(p) = c\}$, é a hipersuperficie potencial . Assim a equação (0.1) passa a ser dada por:

$$Ric_g = \nabla^2 F + \lambda g, \tag{0.2}$$

onde $\nabla^2 F$ é a hessiana de F na métrica g.

Os solitons de Ricci gradiente são soluções estacionarias (auto-similares) do Fluxo de Ricci, ver [4], isto significa que existe uma família a um parâmetro de difeomorfismos $\varphi_t : M \to M$ e de funções $\tau(t) : M \to \mathbb{R}$, tal que a família de métricas $g(t) = \tau(t)\varphi_t^*(g_0)$, satisfaz o fluxo de Ricci:

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric_{g(t)}. \tag{0.3}$$

Exemplo 1. *(**Cigarro de Hamilton**) Em dimensão dois, Hamilton descobriu o primeiro exemplo de um soliton steady não compacto sobre $\mathbb{R}^2$, chamado cigarro de Hamilton, onde a metrica é dada por*

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2},$$

com função potencial

$$F = ln(1 + x^2 + y^2).$$

A curvatura escalar do cigarro de Hamilton é dada por

$$R = \frac{1}{1 + x^2 + y^2},$$

que é positiva e atinge seu máximo na origem. Além disso o cigarro é assintótico ao cilindro.

Exemplo 2. *(**Soliton de Bryant**) Exemplos de solitons gradiente steady não compactos foram descobertos por Robert Bryant sobre $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$). Eles são rotacionais simétricos e tem curvatura seccional positiva. Além disso temos que eles são únicos a menos de homotetia, ver [4].*

Segue agora algumas equações diferenciais que os solitons de Ricci gradiente satisfazem:

Lema 1. *Seja (M^n, g, F, λ) um soliton de Ricci gradiente, então:*

1. $\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} = R_{ijkl}\nabla^l F$,
2. $\nabla_i R = -2R_{ij}\nabla^j F$,
3. $R + \|\nabla F\|^2 + 2\lambda F = C_0$,
4. $R = \Delta F + n\lambda$,
5. $\nabla G_\lambda = -\nabla R = 2Ric(\nabla F, .)$,

onde $G_\lambda := \|\nabla F\|^2 + 2\lambda F$.

Soliton de Ricci Gradiente Localmente Conformemente Flat

Dizemos que uma variedade Riemanniana (M^n, g) é localmente conformemente flat se para cada ponto $p \in M$, existe uma vizinhança U de p e uma função φ definida sobre U, tal que $(U, e^{2\varphi}g)$ é flat, (i.e. o operador curvatura de $e^{2\varphi}g$ é nulo sobre U).

Para qualquer variedade Riemanniana (M^n, g)

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}(g_{ik}R_{jl} - g_{il}R_{jk} - g_{jk}R_{il} + g_{jl}R_{ik}) + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$$

é o tensor de Weyl, e denotamos por

$$C_{ijk} = \nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)}(g_{ij}\nabla_k R - g_{ik}\nabla_j R)$$

o tensor de Cotton. É bem conhecido que, para $n = 3$, W_{ijkl} é identicamente nulo e $C_{ijk} = 0$ se, e somente se, (M^3, g) é localmente conformemente flat; para ($n \geq 4$), $W_{ijkl} = 0$ se, e somente se, (M^n, g) é localmente conformemente flat. Além disso, para $n \geq 4$, o anulamento do tensor de Weyl W_{ijkl} implica no anulamento do tensor de Cotton C_{ijk}.

Agora derivaremos uma formula para o quadrado do tensor de Cotton para os soliton de Ricci gradiente com tensor de Weyl nulo.

Lema 2. *Para qualquer soliton de Ricci gradiente n-dimensional, $n \geq 3$, com tensor de Weyl nulo, $W_{ijkl} = 0$, temos*

$$|C_{ijk}|^2 = \frac{1}{(n-2)^2}(|R_{ik}\nabla_j F - R_{ij}\nabla_k F|^2 - \frac{2}{(n-1)}\|R\nabla F - \frac{1}{2}\nabla G_\lambda\|^2)$$

onde C_{ijk} é o tensor de Cotton.

Usando esse lema, mostramos que o tensor de Ricci de (M^n, g, F, λ) tem, a não ser no ponto critico de F, no máximo dois auto-valores distintos.

Lema 3. *Para qualquer ponto $p \in \Sigma_c$ o tensor de Ricci de (M^n, g, F, λ) tem um único auto-valor ρ, ou tem dois auto-valores distintos ρ e μ de multiplicidade 1 e n-1, respectivamente. Em ambos os casos, $e_1 = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}$ é um auto-vetor associado ao auto-valor ρ. Em outras palavras, para qualquer base ortonormal $e_2, ..., e_n$ tangente a superfície de nível Σ_c em p, o tensor de Ricci tem a seguinte propriedade:*

- $Rc(e_1, e_1) = R_{11}$
- $Rc(e_1, e_b) = R_{1b} = 0, b = 2, ..., n$;
- $Rc(e_a, e_b) = R_{aa}\delta_{ab}, a, b = 2, ..., n$;

onde $R_{11} = ... = R_{nn} = \rho$ ou $R_{11} = \rho$ e $R_{22} = ...R_{nn} = \mu$.

Agora daremos algumas informações sobre a geometria da hipersuperficie potencial, $\Sigma_c = \{p \in M; F(p) = c\}$, de valores regulares c de F.

Lema 4. *Sejam (M^n, g, F, λ) um soliton de Ricci gradiente localmente conformemente flat, c um valor regular de F e $\Sigma_c = \{p \in M; F(p) = c\}$. Então:*

(a) A função $G := \|\nabla F\|^2$ é constante sobre Σ_c, i. e., G é função apenas de F;

(b) A curvatura escalar R de (M^n, g, F, λ) é constante sobre Σ_c;

(c) A segunda forma fundamental h_{ab} de Σ_c é da forma $h_{ab} = \frac{H}{n-1}g_{ab}$;

(d) A curvatura média H é constante sobre Σ_c;

(e) Σ_c, com a métrica induzida g_{ab}, tem curvatura seccional constante.

Existe uma outra formula que é valido para todo soliton de Ricci gradiente n-dimensional com tensor de Weyl nulo. Essa nova formula relaciona $|C_{ijk}|^2$ mas explicitamente com a geometria da hipersuperficie de nível de F.

Lema 5. *Para qualquer soliton de Ricci gradiente n-dimencional (M^n, g, F, λ), ($n \geq 3$), com tensor de Weyl nulo $W_{ijkl} = 0$, temos:*

$$|C_{ijk}|^2 = \frac{2G^2}{(n-2)^2}|h_{ab} - \frac{H}{n-1}g_{ab}|^2 + \frac{1}{2(n-1)(n-2)}\|\nabla_a G\|^2,$$

onde h_{ab} e H são a segunda forma fundamental e a curvatura media de hipersuperficie de nível $\Sigma_c = \{p \in M; F(p) = c\}$ de qualquer valor regular de F e $G = \|\nabla F\|^2$.

Soliton de Ricci Gradiente Steady Localmente Conformemente Flat

Os seguintes teoremas classificam os solitons de Ricci gradiente steady localmente conformemente flat não compacta de dimensão $n \geq 3$.

Teorema 1. *Seja (M^n, g, F), $n \geq 3$, uma soliton de Ricci gradiente steady n-dimensional localmente conformemente flat não compacto, com curvatura seccional positiva. Então, (M^n, g, F) é isométrico ao soliton de Bryant.*

Demonstração. Lembre que como temos a hipótese que a curvatura seccional é positiva, pelo teorema de Gromoll- Meyer [6] M^n é difeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Além disso a função F é estritamente convexa, tendo assim no máximo um único ponto critico. Em qualquer vizinhança, onde $G \neq 0$, considerando a hipersuperficie equipotencial

$$\Sigma_c = \{x \in M;\ F(x) = c\}$$

podemos expressar a métrica $ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j$ como

$$ds^2 = G^{-1}(F, \theta)dF^2 + g_{ab}(F, \theta)d\theta^a d\theta^b,$$

onde $\theta = (\theta^2, ..., \theta^n)$ denota a coordenada intrínseca de Σ_c. Pelo Lema 4 temos que $G = G(F)$, $g_{ab} = g_{ab}(F)$ e (Σ_c, g_{ab}) é um espaço forma, com curvatura positiva. Também, F tem exatamente um ponto critico, caso contrario F teria uma região flat o que é impossível. Como, em $M \setminus \{x_0\}$ temos

$$ds^2 = G^{-1}(F)dF^2 + \varphi^2(F)g_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

onde $g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ é a métrica padrão da esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1}$, e φ é alguma função diferenciável sobre M dependendo somente de F e zerando em x_0. Assim, (M, g, F) é um soliton de Ricci gradiente steady rotacional simétrico sobre $\mathbb{R}^n$. Desta maneira, ele é o soliton de Bryant , ver [4]. □

Teorema 2. *Seja (M^n, g, F), $n \geq 3$, um soliton de Ricci gradiente steady n-dimensional localmente conformemente flat não compacto. Então (M^n, g, F) é flat ou isométrico ao soliton de Bryant.*

Demonstração. Se o operador curvatura não é positivo, pelo principio do máximo forte de Hamilton o grupo de holonomia é reduzido. Assim a variedade terá que ser um produto Riemanniano, ou um espaço localmente simétrico ou então não localmente simétrico mas irredutível. Estudando estes três casos e usando o Teorema 1 podemos concluir que a variedade é flat ou é o soliton de Bryant. □

Referências

[1] Carmo, M. P. do - Geometria Rieanniana, Projeto Euclides, 2008.

[2] R. Hamilton, Three-manifolds with positive Ricci curvature, J. Differential Geom. 15, 1982, 255-306.

[3] Chow, B. et al., The Ricci flow: techniques and applications. Part I. Geometric aspects. Mathematical Surveys and Monographs, 135. American Mathematical Society, 2007.

[4] Chow, B. et al., Hamiltons Ricci Flow, 2005.

[5] H-D Cao e Q. Chen, On locally conformally flat gradient steady Ricci flow, 2010.

[6] Gromoll, D. and Meyer, W., On complete open manifolds of positive curvature, 1969.

Apoio

UFG

CAPES

Instituto de Matemática e Estatística - Universidade Federal de Goias