

Linhas assintóticas na vizinhança de um ponto singular tipo andorinha

Douglas Hilário da Cruz douglas.hilario@hotmail.com Orientador: Ronaldo Alves Garcia ragarcia@mat.ufg.br

Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás

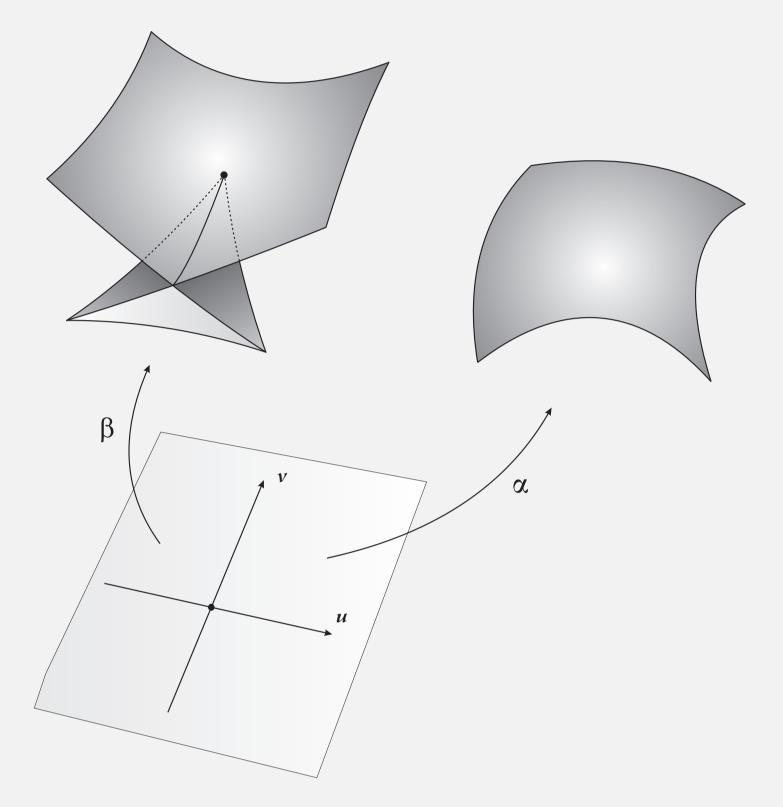
Linhas assintóticas

Numa carta local (u,v) de uma superfície imersa ψ a equação diferencial das linhas assintóticas é dada por:

$$edu^2 + 2fdudv + qdv^2 = 0$$

onde e, f e g são os coeficientes da segunda forma fundamental de ψ . As curvas integrais desta equação diferencial Considere a equação são as *linhas assintóticas* da superfície ψ (veja [1]).

Ponto singular tipo andorinha



Em [3] é definido o ponto swallowtail (ponto singular tipo andorinha):

ullet Um ponto q do plano uv é um ponto singular de uma superfície ψ se em q a aplicação ψ deixa de ser imersão e é um *ponto singular tipo andorinha* se existe uma vizinhança de q difeomorfa à origem de

$$\tau(u,v) = (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v)$$

Superfície regular associada

Em [4] temos várias relações entre uma superfície regular α e uma superfície β com um ponto singular tipo andorinha. A superfície α é dada por:

$$\alpha(u,v) = (u,v,w(u,v))$$

onde

$$w(u,v) = \frac{1}{2}\lambda u^4 - u^2v + \frac{1}{2}v^2$$

e $\lambda \neq 0, 1$. A superfície β é dada por:

$$\beta(u,v) = (w_u, w_v, uw_u + vw_v - w)$$

$$= (2\lambda u^3 - 2uv, v - u^2, \frac{3}{2}\lambda u^4 - 2u^2v + \frac{1}{2}v^2)$$

- As *linhas assintóticas* de α e β coincidem.
- Usando o critério dado em [3] para verificar se um ponto singular é do tipo andorinha temos que (u,v)=(0,0) é ponto singular tipo andorinha de β .
- Um ponto (u,v) é chamado de ponto parabólico de α quando em (u,v) a curvatura Gaussiana de α é nula e a curvatura Média não é nula.
- A curva de pontos parabólicos de α coincide com a curva de pontos singulares de β (veja [4]).

Assim vamos estudar o comportamento das linhas assintóticas na vizinhança do ponto parabólico (u, v) = (0, 0).

Linhas assintóticas na vizinhança de um ponto singular tipo andorinha

Em [1] e no capítulo 6 de [2] é realizado o estudo do comportamento das linhas assintóticas na vizinhança de um ponto parabólico.

$$H(u, v, p) = e + 2fp + gp^2$$

onde $p = \frac{dv}{du}$.

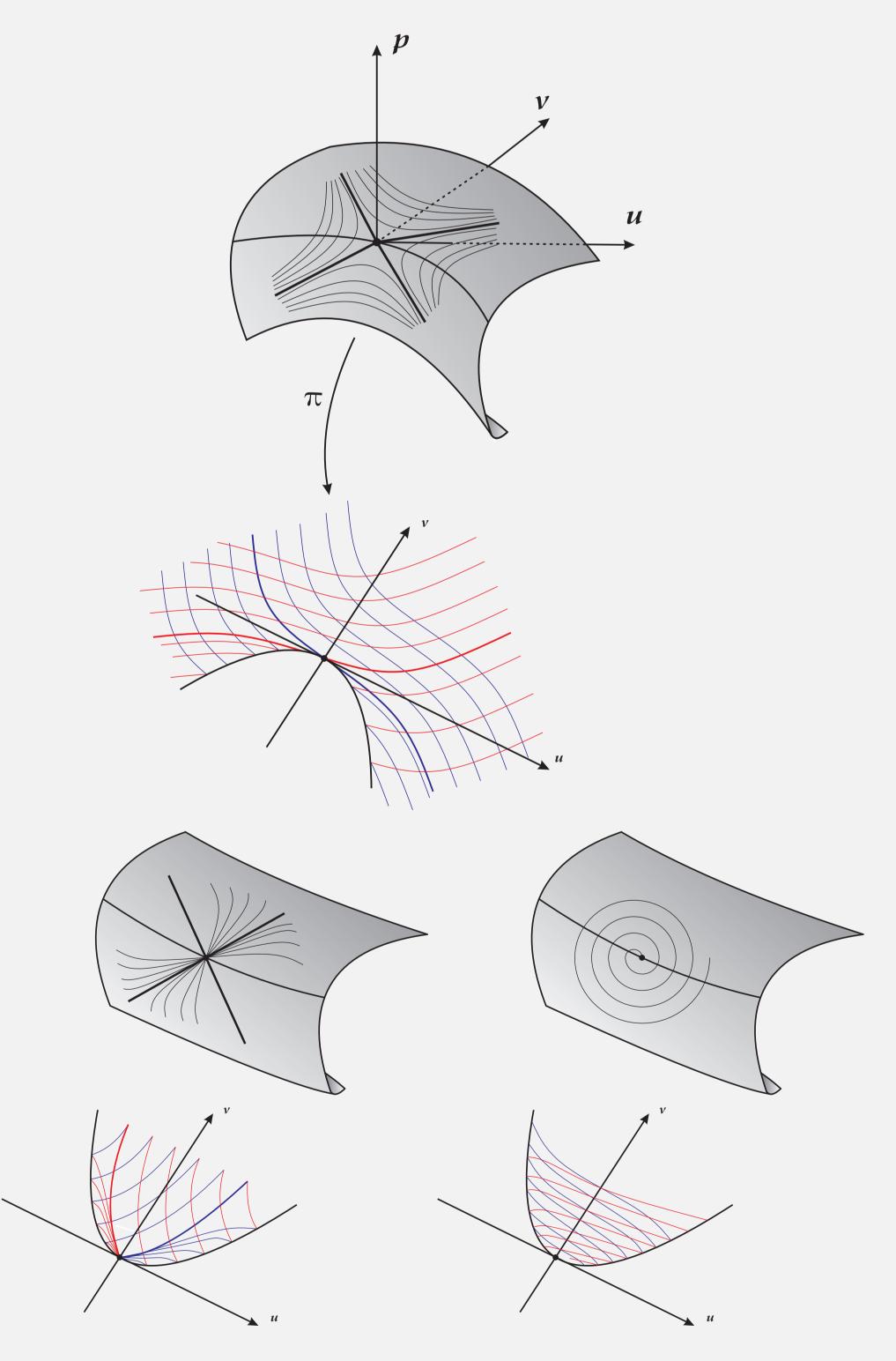
 \bullet $H_v(0,0,0) \neq 0$, assim em uma vizinhança de (0,0,0) $H^{-1}(0)$ é o gráfico de uma aplicação $\xi(u,p)$.

Considere também o campo de *Lie-Cartan* sobre $H^{-1}(0)$ (veja [1] e [2]):

$$X_{H} = H_{p} \frac{\partial}{\partial u} + p H_{p} \frac{\partial}{\partial v} - (H_{u} + p H_{v}) \frac{\partial}{\partial p}$$

- A projeção das curvas integrais de X_H no plano uv por $\pi(u, v, p) = (u, v)$ são as linhas assintóticas de α . ([1], [2])
- A única singularidade de X_H será (u, v, p) = (0, 0, 0).
- A singularidade será do tipo *sela* se $\lambda < 1$, será do tipo *nó* se $1 < \lambda < \frac{25}{24}$ e será do tipo *foco* se $\lambda > \frac{25}{24}$.

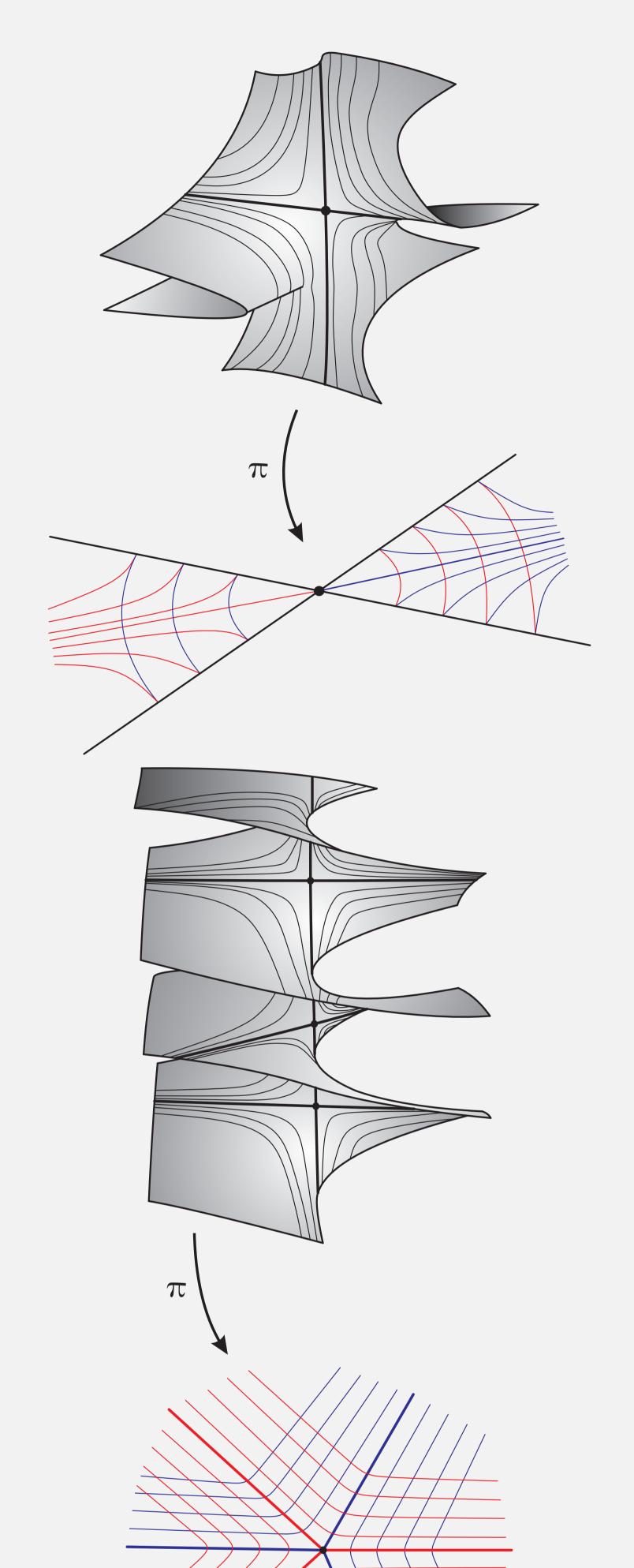
O comportamento das linhas assintóticas na vizinhança do ponto singular tipo andorinha é dado pelas figuras abaixo:



No caso acima, a curva de pontos parabólicos é uma curva regular. Modificando w(u, v) pode ocorrer:

- ullet O conjunto dos pontos parabólicos é uma cruz e X_H possui uma sela no eixo p (próxima figura). Este caso e outros 4 casos são estudados em [5].
- O ponto (u, v) = (0, 0) é o único ponto parabólico de α e X_H possuí três *selas* no eixo p (última figura).

Este ponto é chamado de **Darbouxiano tipo 3** (D_3) (veja [2]). Este caso e os outros dois casos, **Darbouxiano tipo 1 e 2** (D_1 e D_2), são estudados em [2] e [5].



Os softwares distribuídos livremente na página pessoal de Àngel Montesinos [6] permitem:

- vizualizar a andorinha (pode ser usado o Superficies).
- visualizar o comportamento das linhas assintóticas em toda a andorinha (Superficies ou ODEinR2).
- vizualizar a superfície $H^{-1}(0)$ e o campo X_H de Lie-Cartan em $H^{-1}(0)$ (*ODEinR*2).

As figuras das superfícies $H^{-1}(0)$ com o campo de *Lie*-Cartan e sua projeção no plano uv aparecem em diversos livros e artigos. Veja por exemplo [1], [2], [4] e [5].

Referências

- [1] GARCIA R. and SOTOMAYOR J. Structural Stability of Parabolic Points and Periodic Asymptotic Lines. Matemática Contemporânea, 12:83-102, (1997).
- [2] R. GARCIA, J. SOTOMAYOR, Differential equations of classical geometry, a qualitative theory. Publicações Matemáticas, IMPA, 27º Colóquio Brasileiro de Matemática,
- [3] SAJI, KENTARO; UMEHARA, MASAAKI; YAMADA, KOTARO, The geometry of fronts. Ann. of Math. (2) 169 (2009), no. 2, 491-529.
- [4] URIBE-VARGAS, RICARDO, A projective invariant for swallowtails and godrons, and global theorems on the flecnodal curve. Mosc. Math. J. 6 (2006), no. 4, 731-768, 772.
- [5] BRUCE, J. W.; TARI, F., On binary differential equations. Nonlinearity 8. (1995), no. 2, 255-271.
- [6] A. MONTESINOS, Softwares distribuídos livremente na página pessoal de Ángel Montesinos, http://www.uv.es/montesin/, Universitat de València, (2009).