Dois semestres de álgebra linear básica — um manual do professor

Carlos Tomei
Departamento de Matemática, PUC-Rio

Prefácio e garantia

A diferença entre a revolução (teoria e práxis) e a conversa de bar (ideologia e tira-gostos) é grande. Sugerir um curso e fazê-lo funcionar também são duas coisas muito diferentes. Esse texto tem a pretensão de ir além da simples lista de sugestões: o material foi exaustivamente discutido e já foi testado mais de uma vez na situação real (alunos, provas, equipes de professores, computadores).

Resulta disso que esse texto é uma combinação de dois modos de apresentação, indicativos de dois aspectos didáticos. Certas seções são justificativas para inserção (ou eliminação) de tópicos, outras são descrições de aulas, roteiros apurados pelo uso.

Tudo é passível de crítica, de alteração. Cada um de nós tem seus tópicos preferidos: aqueles apresentados aqui foram triados por anos de conversa com colegas de várias especialidades, pela minha experiência profissional, e pelo fato que existe mais material do que tempo de ensino. A vantagem que esse texto tem sobre a n-ésima conversa é que aqui estão filtrados e explicitados os argumentos: podemos começar a discussão de um ponto mais avançado. Expostos, os argumentos podem ser desmentidos com mais facilidade. Num mundo de textos abertos, gostaria muito que a comunidade tomasse essas notas como um ponto de partida para um banco de dados de exercícios, discussões e temas sobre o ensino básico de álgebra linear. Com a ajuda de Ana Pavani, do Departamento de Engenharia Elétrica da PUC-Rio, está disponível um endereço para os interessados em levar o projeto adiante: por enquanto, perguntem a tomei@mat.puc-rio.br.

Os agradecimentos são extensos: a Percy Deift, Peter Lax e George Svetlichny por razões cármicas, Lício Bezerra, Derek Hacon, Paulo Henrique Viana Barros, Celso Wilmer, por infinitas conversas, às várias equipes de cursos de Álgebra Linear de que participei na PUC-Rio, ao Departamento de Matemática, PUC-Rio, que me permitiu testar o material. Humberto José Bortolossi e Max Souza ajudaram, como sempre, na edição e ilustrações.

Finalmente, agradeço aos organizadores deste CNMAC pela possibilidade de apresentar esse material. No encontro de 1998, percebi o quanto foi importante para a difusão do cálculo numérico no Brasil que Maria Cristina Cunha, da UNICAMP, vinte anos atrás, tenha trazido a questão de seu ensino a um CNMAC — que a tarefa sugerida esse ano tenha uma fração da sorte que aquela teve!

Um pouco de história, parcial e incompleta

Álgebra linear e teoria de matrizes se confundem com freqüência. Álgebra linear literalmente trataria de questões lineares: espaços vetoriais, transformações lineares. Matrizes apareceriam como representações convenientes de transformações lineares. Mas autovalores são objetos não lineares por excelência, e muito do mérito de álgebra linear vem de seu uso em problemas aparentemente não lineares. Para Derek Hacon, teoria de fibrados é álgebra linear a vários parâmetros; para Peter Lax, todo problema se torna linear em cardinalidade suficientemente alta; para André Weil, a única matemática que se entende é a que se lineariza.

Historicamente, aplicações de matrizes — ou talvez, modismos — têm importância variável. Sylvester acreditava que a matemática do século XX seria o estudo de matrizes cujas entradas são outras matrizes, objetos aliás caseiros entre analistas numéricos, para quem um laplaciano discretizado num retângulo é uma matriz tridiagonal em blocos. Manipulações simbólicas em combinatória e geometria analítica tornaram determinantes fundamentais: hoje, um aluno deveria saber decidir rapidamente se três pontos em um plano estão alinhados. Entretanto, não se espera que saibamos verificar se quatro pontos estão num círculo — um determinante um pouquinho mais complicado que saiu de moda (mas está voltando por razões gráficas). O efeito de perturbações de posto um no espectro e na inversa de uma transformação linear provavelmente foi estudado antes para operadores de Schrödinger (fórmulas do tipo Weinstein-Aronsjan), e depois considerado para matrizes (Sherman-Morrison), com aplicações abundantes em análise numérica.

Matrizes como retângulos de números descrevem tabelas, adjacências de grafos, e se por um lado são ancestrais conceituais de outras espécies matemáticas, como matróides e grupos de Lie, por outro sugerem alternativas aparentemente relegadas pela evolução dos conceitos, como números dispostos em cubos. Aliás, a palavra *matrix*, no latim tardio, designa os registros públicos, onde os cidadãos são associados aos nomes de suas mães, única certeza (e como lista de registros, virou também *matricula*). E disposições mais exóticas de números são de fato estudadas, às vezes de forma escondida: o produto tensorial empregado ao representar um laplaciano discretizado num paralelepípedo (e calcular-lhe o espectro) é um exemplo disso.

Para complicar as coisas, muito do que se aprendeu sobre álgebra linear (anterior à teoria de matrizes) foi feito num período heróico em que a axiomatização era ainda remota. Afinal, grande parte dos problemas que interessavam aos titãs do cálculo eram genuinamente não lineares, e aproximações lineares eram indispensáveis. Lagrange, que não conhecia matrizes, decidia se uma Hessiana era positiva (ou melhor, se um equilíbrio de um sistema mecânico era estável) de forma explícita, computacional, e não calculando seu espectro, como habitualmente fazemos nos cursos de cálculo, o que deixa claro que na verdade não pretendemos fazer essas contas (Lagrange, como a decomposição de Choleski, completava quadrados). Aliás, o próprio método de cálculo de autovalores e autovetores encontrado nos livros básicos habituais é evidência de que esse cálculo é de interesse marginal para os autores dos textos. Ironicamente, é provável que a maioria dos modelos matemáticos com muitas variáveis (na escala de centenas ou mais) seja linear — atualmente, álgebra linear é o cálculo a muitas variáveis.

Não só os temas mudam de relevância no tempo, mas mudam também as motivações para ensiná-los. Geometria sintética e seu oráculo, geometria analítica, são ensinados no colégio para exercitar aptidões visuais e de argumentação lógica e algébrica. Entretanto, é raro que geometria analítica seja realmente usada em classe como a panacéia para a geometria elementar: a descoberta cartesiana é fartamente elogiada, raramente empregada. Uma das razões apresentadas para isso é que as contas freqüentemente se tornam enormes, o que em geral é apenas falta de conhecimento — o apêndice, logo depois da introdução, é um exemplo muito significativo.

Em um certo momento, álgebra linear tornou-se paradigmática do modo profissional de fazer matemática, devido a sua axiomatização muito simples. Os cursos se tornaram mais abstratos, com ênfase em aspectos algébricos, e as motivações iniciais foram sendo esquecidas: não se lineariza nos cursos de álgebra linear e evita-se qualquer discussão analítica, como teoria de perturbação e a estabilidade da resolução de sistemas. Alunos só consideram a diferenciabilidade dos autovalores depois de um curso de análise funcional. Como conseqüência, a proto-análise funcional, em dimensão finita, passa a ser apenas um aspecto do cálculo numérico, por sua vez também frequentemente escamoteado. A diferenciação da inversa de matrizes reais, em alguns cursos de graduação, ficou como um derradeiro exemplo da infinidade de questões que são tão bem descritas no cenário de teoria das matrizes, um dos grandes campos de prova da matemática desse século.

Nas últimas décadas, surgiram novas razões para considerar álgebra linear e geometria analítica: modelagem a muitas variáveis, análise numérica (que mais uma vez faz aparecer sistemas a muitas variáveis), computação gráfica.

O que ensinar, então?

1.O cenário

A proposta de material apresentada nesse texto foi empregada nos últimos dois semestres nos cursos de Álgebra Linear I e II da PUC-Rio, e existe um consenso nos departamentos do Centro Técnico Científico de que convém mantê-la. Nos últimos dois anos, foi estudada por uma comissão de professores do CTC uma alteração substancial dos cursos básicos de engenharia e ciências: o conteúdo dos cursos de álgebra linear foi cuidadosamente considerado, levando em conta os interesses dos departamentos, a formação profissional dos alunos e a modernização das técnicas de ensino, recebendo o aval da comissão.

Todos os alunos dos cursos técnicos são obrigados a cursar ALI, mas só alguns departamentos (entre os quais o de Engenharia Elétrica, Informática e Engenharia Civil) exigem de seus alunos ALII. O próprio Departamento de Matemática dispensa seus alunos de ALII, já que os tópicos são tratados com mais profundidade em cursos posteriores.

Os alunos de ALI acabam de entrar na Universidade, ou estão em seu segundo semestre, e fazem ALII imediatamente depois. Em geral, são mal preparados matematicamente, e seu desempenho nos cursos de cálculo tem piorado nos últimos anos. São freqüentes as equipes com cinco professores (alguns com duas turmas) em ALI e equipes de três professores em ALII.

A avaliação dos cursos é feita por três provas distribuídas pelo semestre: de forma resumida, se os alunos não alcançam uma média (5 ou 6, dependendo de variáveis irrelevantes no momento), têm a oportunidade de trocar uma das notas pela nota de uma quarta prova, que abrange o conteúdo de todo o curso.

O curso de ALI tem quatro horas de aula semanais; ALII tem três horas semanais, uma das quais é nos laboratórios de computação. As aulas teóricas de duas horas são longas demais, em geral: é freqüente interromper em 80 minutos. Uma estratégia interessante é liberar os alunos depois desse período e tornar facultativo um apêndice da aula em que material suplementar é apresentado. A duração dos cursos é de cerca de 16 semanas.

2. Uma primeira descrição do conteúdo

As provas dividem cada curso em três partes. Na primeira parte de ALI, introduzem-se os conceitos básicos de geometria analítica, com ênfase em distância e ângulo, retas e planos. Na segunda parte são estudadas transformações lineares e suas representações matriciais, ressaltando as que são descritas geometricamente de forma simples. A abundância de exemplos geométricos facilita a apresentação do material da terceira parte: autovalores e autovetores, diagonalização de matrizes.

Em ALII, os alunos são apresentados a situações lineares que em princípio não estão relacionadas com geometria. Na primeira parte, são descritos três exemplos expressivos: contagem de caminhos num grafo, um modelo de crescimento populacional e a discretização de um problema de Sturm-Liouville no intervalo, com condições de Dirichlet. A seguir, estudam-se com mais detalhe (inclusive de natureza numérica) sistemas lineares (segunda parte) e teoria espectral (terceira).

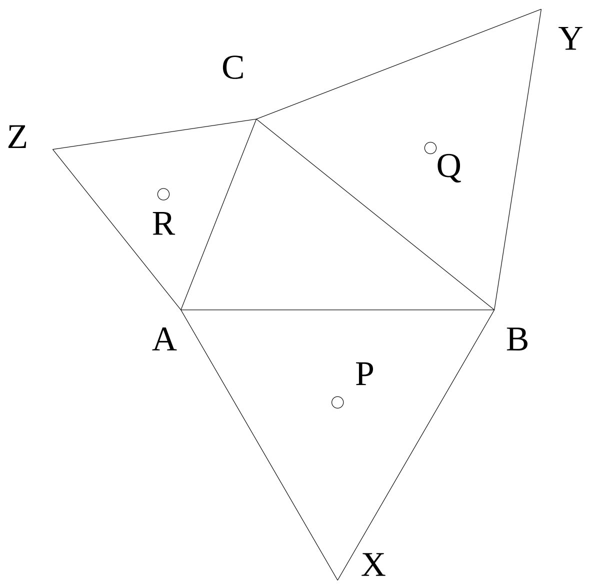
Nos dois cursos, são apresentados exemplos de uma atividade fundamental nas aplicações de matemática: modelagem. Melhor, os exemplos não necessitam de conhecimentos de física, o que indica a versatilidade das ferramentas para além das escassas aplicações tradicionais dos cursos de cálculo.

Os tópicos escolhidos são convenientes também por razões de apresentação: as aulas são quase sempre motivadas por problemas concretos (no vocábulario em voga, são 'problem-oriented') e a modularização torna mais simples para o aluno descobrir seus pontos fracos e fortes. Além disso, as idéias importantes do curso são exemplificadas em um conjunto pequeno de exercícios, o que deve ser explorado na confecção das provas: problemas artificiais não são considerados relevantes, e problemas especialmente bonitos (ou interessantes — fica por conta do estilo de cada um), já que são tão bons, não merecem ser apresentados em provas, e sim em sala de aula.

Não encontramos um livro texto que apresente o material que nos interessa, da maneira que nos interessa. Durante os cursos, os alunos recebem algumas apostilas e listas de exercícios. Eventualmente, espera-se organizar o material de forma mais permanente. O livro *Linear Algebra and Applications*, de G. Strang, é uma excelente referência para boa parte de ALII.

Apêndice 1: O teorema de Napoleão

Considere o seguinte resultado clássico de geometria, às vezes atribuído a Napoleão. Dado um triângulo ABC qualquer, construa sobre os lados, para fora do triângulo, três triângulos eqüiláteros com novos vértices X, Y e Z, como indicados na figura.



O teorema diz que os centros P, Q e R desses três triângulos formam ainda outro triângulo eqüilátero. Para uma demonstração via geometria analítica, suponha que o plano é na verdade $\mathbb{C}$, o plano complexo, e o triângulo original está disposto de maneira a termos $A = 0$, $B = 1$ e $C = z$, um número complexo qualquer. Em princípio, o resultado deve ser demonstrado para todo $z \in \mathbb{C}$ — vamos ver entretanto que basta verificar o resultado para dois valores (praticamente arbitrários) de z! Bom, às contas: os vértices X, Y e Z são obviamente expressões afins de z (isso é da forma $\alpha z + \beta$) — por exemplo, Z é obtido rodando (isto é, multiplicando) C de 60 graus (isto é, $e^{i\pi/3}$). Mas o fato é que não precisamos nem ter as descrições explícitas dos três pontos. Os centros P, Q e R, por serem médias dos vértices de seus triângulos, também são expressões afins em z. O teorema, então, corresponde ao fato que $R - P$ é obtido girando $Q - P$ de 60 graus, que mais uma vez é representado por uma expressão afim em z cujo valor deve ser mostrado igual a 0, para qualquer valor de z. Mas, para verificar isso, basta justamente escolher dois valores simples para z e neles verificar a validade do teorema: tome, por exemplo C no semiplano superior de maneira a fazer ABC eqüilátero, e C no ponto médio de AB, ou $C = A$. É possível escolher C no semiplano inferior com ABC eqüilátero, mas cuidado com o que X, Y e Z querem dizer nesse caso.

O argumento acima exemplifica um fato desprezado em nossa árvore de ensino (mas que é bem conhecido por pesquisadores especializados): quase todos os resultados que ensinamos em geometria são equivalentes a relações algébricas muito simples, e como tal, podem ser demonstrados a partir de um número muito reduzido de casos. Enfim, praticamente toda a geometria que ensinamos admite demonstração por (poucos) exemplos, aquilo que um aluno espontâneamente faz, sem saber porquê pode fazer. Claro, resta saber quantos (e quais) exemplos são necessários em cada caso: essas técnicas são freqüentes em geometria algébrica e, mais recentemente, em computação simbólica.

Álgebra Linear I

O começo do curso não trata de álgebra linear estritamente: são apresentados os fundamentos de geometria analítica. Os pré-requisitos são quase nulos: uma das dificuldades da preparação das aulas é descrever problemas interessantes usando material tão simples. Por quê ensinar isso?

- Para treinar visualização.
- Para falar de geometria sem ambiguidade. Na linguagem empregada em sala de aula, pense em transmitir imagens para um cego, ou para o cego absoluto: uma máquina.
- Para preparar o aluno para computação gráfica.
- Para acostumar-se ao dicionário geometria-álgebra.
- Para perceber eventualmente que, entre tantas operações geometricas, tranformações lineares são abundantes e simples.

Por isso, ALI se limita ao plano $\mathbb{R}^2$ e ao espaço $\mathbb{R}^3$, com convites ocasionais a generalizações.

A. O primeiro terço do curso (quatro semanas de teoria)

A.1 Coordenadas de pontos, vetores

Plantas como projeções

Pontos no plano podem ser apresentados em um desenho, e pontos no espaço são dados por *dois* desenhos, correspondentes à projeção ortogonal dos pontos em dois planos coordenados — esse é o começo de geometria descritiva. Pela sua naturalidade, essa representação tem um certo efeito teatral: imagine um barco construído dentro de um galpão, com plantas desenhadas em duas paredes. Uma terceira planta, numa terceira parede, contém informação repetitiva, mas que pode ser conveniente.

Os alunos são convidados a pensar em algumas dificuldades associadas a essa representação. Por exemplo, não é fácil descobrir o comprimento de um segmento (sua verdadeira grandeza, no vocabulário de descritiva) a partir de suas projeções, ou ainda pior, calcular o ângulo entre dois segmentos.

Coordenadas

Coordenadas são uma representação alternativa eficiente, abundantemente empregada em computação gráfica. Um conjunto de pontos no espaço, por exemplo, corresponde a uma lista de triplas de números, e as projeções desse conjunto nos planos coordenados, equivalentes às plantas descritivas, por sua vez são listas obtidas facilmente a partir da lista original.

Seguem alguns exemplos interessantes: talvez alguns sejam difíceis demais para sua turma.

1. Para verificar o nível da turma, desenhe um paralelepípedo com faces paralelas aos planos coordenados, chame de (a, b, c) e (d, e, f) dois vértices opostos e faça as perguntas óbvias: quais são as coordenadas dos outros vértices, o que têm em comum todos os pontos de uma face, quais os comprimentos dos lados...

2. Desenhe um retângulo com pequenos retângulos espalhados regularmente em seu interior: uma representação de uma fachada com janelas. Forneça informações métricas suficientes, e pergunte quais as coordenadas de todos os vértices da figura. O problema é um bom exercício de notação, e pode ser usado para falar de 'loops' (iterações) em programação.

3. Encontre as coordenadas dos vértices de, digamos, um pentágono regular centrado na origem, tendo o ponto $(1, 0)$ como um dos vértices.

Vetores e certas dificuldades notacionais

Nesse curso, vetores são pontos de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ — em outras palavras, vetores são n-uplas. O que mais poderiam ser? Na tradição dos tempos de colégio, vetores têm setinha e ponta, e se apoiam em algum lugar: vetores são representações de forças, incluindo sua direção, sentido, intensidade e ponto de aplicação. Numa linguagem mais matemática, os vetores "do colégio" são elementos do espaço tangente de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, e não membros desses conjuntos. Não há perda substancial de significado físico ao interpretar vetores como pontos — vetores continuam sendo forças, todas aplicadas a um ponto só — e ganha-se muito em simplicidade. Um erro típico é achar que vetores de um plano são perpendiculares a um vetor normal do plano. O vetor "do colégio" é um segmento, possivelmente orientado.

Coerentemente, não se deve dizer que dois vetores são paralelos, e sim, que eles estão na mesma reta pela origem — pontos não são paralelos. Neste texto, evito o abuso freqüente em livros de álgebra linear: colinearidade e coplanaridade têm seu significado habitual — dois vetores são sempre colineares, três são sempre coplanares. Nesse texto, afirmações do tipo "três vetores são L.D. quando são coplanares" estão erradas — alguns planos de $\mathbb{R}^3$ não passam pela origem.

Como freqüentemente nesse curso consideramos operações afins, é conveniente ressaltar quando os objetos em discussão (retas, planos) contêm a origem ou não.

Soma e multiplicação por escalar de vetores, espaços vetoriais

Obviamente, as operações vetoriais básicas devem ser apresentadas algebrica e geometricamente. Em particular, as duas diagonais do paralelogramo naturalmente associadas aos vetores u e v merecem consideração. Seguem alguns exemplos de complexidade didática enganadora.

1. Somas são convenientes para descrever translações. Desta forma, uma lista de 2-uplas representando um conjunto de pontos importantes de uma figura planar dá origem a outra lista de 2-uplas associadas a pontos de uma translação desta figura . Em particular, padrões periódicos são fáceis de implementar, sem que cada componente (lista) seja guardada exaustivamente na memória. (O problema da fachada com janelas pode ser re-estudado).

2. A soma das cinco raízes quintas da unidade é zero (estamos pensando nas cinco raízes como sendo vetores do plano, obtidos em um exemplo acima) — os alunos são facilmente convencidos disto pela interpretação de força resultante. Essa aliás é uma oportunidade interessante para introduzir um argumento de simetria: o conjunto formado por esses cinco vetores é invariante por uma rotação de $2\pi/5$, logo a soma também deve

ser: mas o único vetor invariante por uma rotação não trivial é o vetor 0. Esse fato geométrico por sua vez implica em duas identidades trigonométricas (uma em cada coordenada) que não são óbvias.

3. Ao verbalizar a operação $v \mapsto 2v$, dizemos que cada vetor é duplicado, mas isso não quer dizer para os alunos que figuras inteiras sejam duplicadas. Mais concretamente, alunos têm dificuldades de aceitar que essa operação leva todo e qualquer círculo unitário a outro círculo de raio 2. Um bom exercício aliás é fazê-los obter o diagrama comutativo que combina translações e dilatações (isto é, transladar de v e dilatar por k é a mesma coisa que dilatar por k e transladar por kv).

Composições de funções devem ser exaustivamente exploradas no curso, pela mesma razão que rotinas são escolhidas como peças fundamentais ao escrever programas de computação gráfica.

4. Explique o funcionamento do pantógrafo.

5. Divida segmentos no espaço em partes iguais. (Um problema como esse tem mais de uma interpretação: algébrica? geométrica? considere a maturidade da turma).

Alunos que entram para a universidade não têm necessariamente uma compreensão operacional da reta dos números. Não acho que valha a pena, entretanto, começar o curso com ela. Esse exercício é uma boa oportunidade para situar pontos na reta.

Definir ou não espaços vetoriais?

Considerando a totalidade dos cursos de engenharia, não vejo porque ensinar as definições de corpo e espaço vetorial nos primeiros cursos de álgebra linear. É difícil encontrar aplicações genuínas desses conceitos na generalidade além dos espaços euclideanos (se os alunos estudarem códigos ou espaços de funções, a história é outra, mas isso vem muito depois em suas vidas acadêmicas, se vem). Historicamente, nossos avós fizeram muito sem essa axiomatização (que aliás é desse século). A frase ouvida com freqüência de que o conceito de espaço vetorial é geométrico é discutível: o que é geométrico é o conceito de espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão pequena. Aliás, em certos momentos do curso, quando as contas passam a envolver números complexos, os argumentos geométricos (no sentido matemático da palavra) são uma fonte inesgotável de confusão, e os alunos não estão sozinhos: já vi matemáticos pouco à vontade quando se expressam em termos de retas complexas.

Na verdade, existe um processo sutil no uso matemático da palavra 'geometria', comparável ao abuso no emprego da palavra 'intuitivo'. Que duas retas diferentes em $\mathbb{R}^n$ se encontrem no máximo em um ponto não é um fato geométrico óbvio — a educação matemática não treina nossos olhos a ver em $\mathbb{R}^n$. Ela em vez nos habitua a descobrir quais relações entre palavras do vocabulário geométrico são passíveis de generalização: o jogo funciona tão bem que passamos a considerar essas extensões como evidentes. Esse, aliás, é um dos grandes testes de uma axiomatização. Raramente em cursos de matemática consideramos questões dessa natureza, e provavelmente fazemos bem em evitar o assunto: talvez, para nossos alunos de graduação em matemática, exemplos eventuais podem ser interessantes. Para os alunos iniciantes, entretanto, o assunto pode ser conceitualmente difícil. É certamente interessante mostrar aos alunos durante os cursos como o procedimento que permite a um cego ou uma máquina fazer geometria na verdade nos liberta para operar em situações onde a nossa visão não alcança. Ironicamente, um dos objetivos desse curso é justamente ajudar os alunos a apreciar melhor o próprio espaço tridimensional.

Axiomatizar espaços vetoriais, então, não vale a pena: estaremos sempre em $\mathbb{R}^n$. Por outro lado, é muito conveniente falar de subespaços dos espaços euclideanos, inclusive para ressaltar a idéia de dimensão. A definição fica muito mais fácil: são conjuntos fechados em relação às duas operações vetoriais.

A.2 Distância e ângulo

Distância é Pitágoras, e os alunos em princípio já viram no colegial. O argumento tridimensional não é tão fácil para eles.

Daí, segue a definição de norma de um vetor, sem dificuldades, e as equações para círculo no plano e esfera. Um exemplo fundamental: a equação $x^2 + y^2 = 1$ não é uma esfera em três dimensões.

Ângulo é bem mais complicado: obviamente, defina o produto interno habitual, e *afirme* que

$$\langle u, v \rangle = ||u|| \; ||v|| \; \cos(u, v),$$

até antes de mostrar a bilinearidade do produto interno. Com isso, fica claro que a estranha definição de produto interno na verdade é muito conveniente: estamos calculando ângulos fazendo contas simples, sem invocar a trigonometria que seria usada no colegial. O problema é que a demonstração dessa equação não é simples: sugiro que seja apresentada, se houver interesse, num apêndice a uma aula.

1. Liste as coordenadas dos vértices de um cubo, em posições simples em relação aos eixos. Faça o mesmo para o tetraedro: deixe os alunos abordarem o problema colocando uma das faces no plano horizontal, calculando alturas etc. ,etc., e depois faça notar que um vértice sim, outro não do cubo são os quatro vértices do tetraedro. Se quiser, dê um passo além: da mesma maneira que os três vetores canônicos do espaço são os vértices de um triângulo eqüilátero, com representação em coordenadas muito simples, os quatro vetores canônicos de $\mathbb{R}^4$ induzem coordenadas ainda mais simples para os vértices de um tetraedro regular. Aliás, o segmento ligando vértices opostos do cubo unitário n-dimensional cresce com n: talvez sua turma ache isso interessante (e o volume da bola inscrita vai a zero...).

2. Obtenha coordenadas para o octaedro. Corte pirâmides a partir de cada vértice do octaedro, de modo a obter um sólido cujas faces são quadrados e hexágonos regulares: obtenha os vértices desse sólido. Cópias iguais dele enchem o espaço, e são usadas como sub-células dentro de petroleiros para minimizar vazamentos devidos a quebra dos tanques.

3. A molécula de metano, CH_4, tem seus quatro átomos de hidrogênio nos vértices de um tetraedro regular, cujo centro é

ocupado pelo átomo de carbono. O que é maior, um ângulo com vértices HCH ou o ângulo interno de um pentágono regular?

4. Os ângulos das faces dos tetraedro e octaedro regulares são suplementares: verifique — o que isso quer dizer visualmente?

5. Passe um plano por um cubo de modo a obter como seção um hexágono regular. Mostre que as coordenadas desse hexágono no espaço podem ser descritas por números mais simples do que as obtidas se desenharmos o hexágono no plano.

6. (difícil) Os vértices de um icosaedro regular são divididos de forma conveniente de modo a pertencerem a duas pirâmides de base pentagonal (as bases estão no interior do icosaedro), ligadas pr uma coroa de dez dentes triangulares, cinco saindo de cada pirâmide. A partir dessa descrição, obtenha coordenadas para os vértices do icosaedro.

7. Como obter coordenadas para os vértices do dodecaedro regular a partir dos vértices do icosaedro regular?

8. Como obter coordenadas para os vértices do sólido mais importante de nossa cultura, a bola de futebol, a partir das coordenadas dos vértices do icosaedro? A costura habitual da bola de futebol corresponde a um sólido cujas faces são hexágonos e pentágonos regulares, com dois hexágonos e um pentágono encontrando-se em cada vértice. Para os puristas, essa é também a disposição dos átomos de carbono na molécula de *fullereno*, C_{60}: ligações duplas ocorrem em arestas entre hexágonos.

Como obter coordenadas para os vértices da bola de modo a sugerir movimentos — rotação, afastamento? Isso vai ser respondido mais adiante.

9. Identidades do paralelogramo e de polarização — bons exemplos do emprego de notação vetorial. Para alunos mais espertos, faça notar que quem sabe elevar ao quadrado, sabe multiplicar (que é o conteúdo da identidade de polarização para o produto interno). Em particular, é mais fácil obter a fórmula da derivada do produto de duas funções sabendo a regra da cadeia (um fato geométrico...) e a derivada de $x \mapsto x^2$. Ou: para conhecer a Hessiana de uma função f num ponto p,

basta saber calcular segundas derivadas em p de f restrita a qualquer reta por p.

10. Descreva elipse, parábola e hipérbole de forma geométrica e obtenha suas equações, para disposições simples das figuras.

Ortogonalidade pode esperar um pouco.

A.3 Retas e planos parametrizados

Depois que as duas operações vetoriais estão domesticadas, é natural ensinar as equações paramétricas de retas. Aqui, as dificuldades são de outra natureza:

1. o fato que a mesma reta pode ser parametrizada de várias maneiras,

2. a necessidade de explicitar em que domínio está o parâmetro (é freqüente encontrar alunos que acham que o parâmetro é um inteiro positivo).

Com um pouco de algebrismo, mostra-se que toda reta no plano é da forma $ax + by = c$: a ambiguidade da representação tem que ser considerada explicitamente — o tempo é bem usado. Não há necessidade nesse momento de descrever retas no espaço como um sistema de duas equações.

Vale a pena ressaltar a maravilhosa generalidade da descrição paramétrica, um grande progresso em relação à matemática ensinada no colegial: uma reta é dada por um ponto e uma direção em qualquer cenário.

1. Medianas de um triângulo se encontram em um único ponto, que divide cada mediana em dois segmentos, um duas vezes maior do que o outro (excelente exemplo de emprego de notação vetorial).

2. Um exercício de visualização: inclinando a cabeça, duas retas reversas ficam em dois planos horizontais.

3. Ache retas tangentes a círculos e esferas: aqui, falar de ortogonalidade pode ser conveniente.

O problema a seguir pode ser interpretado de várias formas, além de admitir mais de um nível de formalismo.

4. Rotações no plano levam retas em retas. Construa (regua e compasso? descrição algébrica?) um triângulo eqüilátero, sabendo que cada vértice pertence a uma de três retas dadas. Você pode até escolher um dos vértices.

5. Roubando um pouquinho, fale sobre espelhos parabólicos. A única dificuldade é obter a reta tangente à parábola em um ponto. Para isso, basta puxar um limite do vetor direção de retas secantes. Aliás, com um pouco de geometria clássica, não é nem necessário usar cálculo.

Planos parametrizados são um pouco mais complicados: precisamos de dois vetores direção. O sinfinitos exercícios possíveis são canônicos. Esse é o momento no curso para introduzir *combinações lineares*. Ressalte também a diferença entre retas e planos pela origem e o caso geral: especifique translações de um para o outro.

O passo seguinte é interpretar de forma geométrica a equação 'não paramétrica' de retas e planos. Agora sim, vamos usar ortogonalidade.

A.4 Ortogonalidade e as equações de reta e plano revisitadas

1. Submeta sua pobre turma à seguinte experiência (que já fiz várias vezes em cursos de cálculo). Desenhe quadrados sobre os três lados de um triângulo retângulo e diga que eles são feitos de ouro, com a mesma espessura. Ao perguntar para aos alunos se eles preferem ganhar os dois pequenos ou somente o maior, a turma se divide em partes iguais — poucos, muito poucos, percebem que, por Pitágoras, dá no mesmo. (A experiência deveria contar como um teste estatístico para a validade do teorema!). A seguir, desenhe, sobre os três lados do mesmo triângulo, três versões homotéticas da mesma figura, digamos, um busto de Pitágoras, e repita a pergunta à turma. Discuta.

Depois da definição óbvia de ortogonalidade de vetores, o teorema de Pitágoras (em $\mathbb{R}^n$?) é um bom exemplo de manipulação simbólica (ou melhor, da boa escolha de axiomas de álgebra linear).

Agora, interprete as equações $ax + by = 0$ no plano e $ax + by + cz = 0$ no espaço como relações de ortogonalidade.

Retas (planos) paralelas são os conjuntos de vetores que fazem o mesmo produto interno com um vetor fixo. Isto dá conta das equações de retas e planos que não passam pela origem, interpreta geometricamente desigualdades lineares, e torna fácil apresentar os primeiros exemplos (planares) de programação linear.

Uma outra coleção habitual de problemas com esse material é o cálculo de distância entre pontos, retas, planos.

B. Entre a segunda e a terceira prova — funções e transformações lineares (mais quatro semanas de teoria)

O vocabulário para falar de funções no plano e no espaço já está disponível.

B.1 Funções em geral

Convém começar com exemplos de funções naturais que admitam uma descrição geométrica e que não sejam necessariamente lineares. Os exemplos clássicos estão em perspectiva cônica e confecção de mapas, mas o mundo é enorme.

1. Desenhe no quadro (e represente algebricamente) os três eixos coordenados, um plano vertical (a tela), um ponto (o olho), e calcule o ponto na tela onde passa a reta pelo olho e um ponto arbitrário. Enfatize algumas distorções dessa projeção: igualdade de comprimentos não é preservada, ângulo também não. Aproveite para treinar o vocabulário de funções: domínio, contradomínio, imagem, injetividade, sobrejetividade, invertibilidade.

2. Apresente alguma forma de representação cartográfica, por exemplo, projeção estereográfica ou Mercator. Mais uma vez, chame a atenção para as distorções inevitáveis.

B.2 Transformações lineares

O material dessa seção foi vertido para uma apostila entregue aos alunos: é o Apêndice 2.

Comece com uma rotação pela origem no plano. Mostre geometricamente que somas vão em somas, e que multiplicação por escalares também é preservada pela função. Explique porquê, a partir desses fatos, basta saber onde dois vetores praticamente arbitrários são mandados pela rotação para saber sua ação sobre um vetor qualquer. Detalhe a seqüência de cálculos: a escolha de dois vetores (os dois canônicos, por exemplo), o cálculo de suas imagens, a representação de um vetor arbitrário como combinação linear dos dois vetores escolhidos, e finalmente o cálculo da imagem do vetor arbitrário. Repita o processo com uma projeção ortogonal sobre um plano pela origem em $\mathbb{R}^3$.

Na aula seguinte, defina transformações lineares. Enfatize sua rigidez: quem sabe onde uns poucos vetores são levados, sabe onde todos são. Apresente, *como teorema*, uma lista de transformações lineares (projeções, ortogonais ou não, sobre retas e planos pela origem, rotações pela origem, espelhamentos por retas e planos pela origem). É bom mostrar geometricamente a linearidade de alguns exemplares da lista, mas os desenhos associados em geral são confusos e só tratam de casos particulares (ninguém escolhe dois vetores em lados opostos do espelho ao verificar linearidade do espelhamento). Em particular, em provas, só é razoável pedir para mostrar a linearidade de transformações que constam na lista (o que é quase trivial: é só verificar que a reta/plano na descrição passa pela origem), ou que são descritas algebricamente.

Discuta geometricamente a existência de inversa para essas várias operações. Composições vão aparecer em breve. Ressalte que translações ou espelhamentos por elementos que não passam pela origem não são transformações lineares.

1. Um exemplo importante em aplicações é a reflexão por um plano dado por seu vetor normal n. A matriz resultante é chamada de matriz de Householder e pode ser obtida de duas maneiras de interesse didático para o curso:

a. a partir de três vetores cujas imagens são fáceis de calcular,

b. a partir da fórmula $v \mapsto v - 2\langle v, n\rangle n$, que deve ser apresentada com cuidado.

A segunda representação merece comentários (quantos, depende da turma): a fórmula faz sentido em dimensão alta e exige pouco cálculo — essa é a primeira manifestação de desacoplamento no curso, um tema que será tratado com detalhe mais adiante. Nesse caso, não é necessário decompor o vetor em uma base ortogonal contendo n: o coeficiente associado a n não depende da escolha da base! Mais geometricamente, decompondo o vetor $v = \alpha n + u$, onde $u \perp n$, o espelhamento é dado por

$$\alpha n + u \mapsto \alpha n - u.$$

Alunos têm dificuldade de obter a representação matricial da transformação a partir dessa fórmula: convém fazer as contas em sala. Melhor: esse exercício mostra que nem sempre a representação matricial é a melhor implementação de uma transformação linear — uma rotina de espelhamento faz menos contas se fizer uso da fórmula. Analistas numéricos sabem que freqüentemente o cálculo de $v \mapsto Av$ *não* passa pela matriz associada a A — laplacianos discretizados são um exemplo. Espelhamentos são perturbações de posto um da identidade: todos os vetores no plano do espelho ficam parados — é isso que torna as contas mais fáceis.

Da mesma maneira, vale a pena apresentar a fórmula correspondente a uma projeção ortogonal.

Um problema para o professor: descreva explicitamente uma base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ contendo o vetor $(1, 1, \ldots, 1)$. (Sugestão: novamente Householder — tente fazer o problema de outra maneira).

2. Encontre uma transformação linear que preserva o tamanho dos vetores levando um vetor v a um outro vetor w satisfazendo $||w|| = ||v||$. (Considere um espelhamento que leve v em w: concretamente, reflita pelo plano perpendicular ao vetor $v-w$)

Sistemas lineares

Toda a informação a respeito de resolução de sistemas nesse curso se resume a esse fato: tire uma variável de uma equação e jogue nas outras.

Não há razão para ensinar escalonamento se todos os sistemas considerados são pequenos ou muito simples. Em ALII escalonamento é levado a sério, junto com aspectos superficiais de sua programação.

Para inverter uma transformação, resolva o sistema associado para um lado direito arbitrário.

B.3 Representações matriciais, ou quase

Transformações lineares admitem representações matriciais, e só elas. Mais: a composição de transformações lineares corresponde ao produto de matrizes. Enalteça a matriz identidade, fale de inversas. Essa é uma das transições entre geometria e álgebra. Deixe claro que translações não têm representações matriciais.

Mais uma escolha, idiossincrática para alguns: matrizes nesse curso representam apenas transformações lineares sendo descritas em termos de bases canônicas. Em particular, não se fala de matrizes que mudam de base, nem de representar matrizes em outras bases. Os alunos têm muita dificuldade com esses temas, e seu conteúdo operacional não é maior do que a receita indicada acima para obter representações algébricas de transformações lineares (escolher uma base em que a representação é simples é a mesma coisa que dizer que é fácil calcular a imagem de alguns vetores). Isso não elimina a discussão sobre diagonalização de matrizes, como veremos adiante.

Projeções, espelhamentos, por subespaços afins

Agora é o momento de, por exemplo, espelhar no plano por uma reta r que não passa pela origem. Descreva a função empregando os dois ingredientes mais simples: uma translação τ que leva r a uma reta r' pela origem e o espelhamento E por r' (uma transformação linear) — a função é $\tau^{-1} \circ T \circ \tau$: enfatize a ordem das operações, fonte inesgotável de erros.

Todos os problemas envolvendo transformações lineares podem ser transplantados para situações afins. Nesse curso avaro de novas palavras, não convém falar de subespaços afins.

1. Rotações em torno de eixos pela origem no espaço são facilmente descritas usando composições. Seja n o vetor normal indicativo do eixo de rotação e a o ângulo de rotação. Um espelhamento E pode ser usado para levar n ao vetor, digamos

e_3: a rotação é $ER_{-a}E$, onde R_{-a} gira de $-a$ em torno de e_3, o que é fácil de representar algebricamente. Note a troca de sinal do ângulo de rotação: explique porque com cuidado.

Espelhamentos e orientação

Alunos raramente são expostos nos cursos básicos ao fenômeno de troca de orientação: espelhamentos fornecem uma boa oportunidade para isso. É difícil falar sobre orientação de forma precisa e simples — para isso, trapaceie e use as mãos direita e esquerda, tanto no plano quanto no espaço.

Tendo tempo, fale sobre a pergunta clássica: é possível explicar o que é direita/esquerda para uma forma de vida que não vê a parte do universo que nós vemos? Ou, dito de forma mais precisa (mais fascinante), as leis do universo são invariantes por espelhamento? Se alguém vê um filme num espelho, estranha isso? Alguns alunos ficam muito intrigados com a pergunta (e sua resposta!). Vá um pouco além: depois de falar de orientação no plano, é fácil mostrar que a faixa de Möbius não é orientável — e se nosso universo não for orientável? o que aconteceria se, depois de uma longa viagem, voltássemos do outro lado? Fale de moléculas espelhadas de açúcares, ressalte que orientabilidade é uma propriedade *global* do espaço. Tudo isso, claro, se houver tempo, condições.

B.4 Bases, ortogonais ou não

Como o curso se limita ao plano e ao espaço, falar de bases em generalidade é pedante e desnecessário. Uma base do plano (do espaço) são dois (três) vetores cujas combinações lineares preenchem o plano (espaço). Bases têm uma motivação simples: são os conjuntos minimais de vetores a partir dos quais se descreve uma transformação linear — os exemplos já vistos no curso são abundantes. O Apêndice 3 é uma apostila que os alunos receberam com o material de ortogonalidade.

Ainda não temos determinantes: para decidir se três vetores do espaço formam uma base, tente escrever um vetor arbitrário do espaço como combinação linear deles. O argumento é elementar, preciso (isto é, dispensa teoremas que provavelmente não seriam demonstrados) e não é computacionalmente tão mais caro quanto calcular um determinante.

Esse é o momento para ressaltar as virtudes de bases ortogonais (ou ortonormais). Expressar um vetor numa base é resolver um sistema. Expressar um vetor numa base ortogonal é resolver várias equações lineares a uma variável: se v_1, v_2, v_3 são vetores de uma base ortogonal do espaço, e u é qualquer, os números x_1, x_2, x_3 que resolvem

$$u = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$$

são

$$x_1 = \frac{\langle v_1, u\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}, x_2 = \frac{\langle v_2, u\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle}, x_1 = \frac{\langle v_3, u\rangle}{\langle v_3, v_3\rangle},$$

como vemos tomando produtos internos na equação em u.

Freqüentemente no curso, bases ortogonais são obtidas a partir de um vetor normal a um plano, outro vetor arbitrário no plano e um terceiro vetor, que pode ser obtido resolvendo um sistema linear (isto é, pedindo que este terceiro vetor seja ortogonal aos outros dois), ou fazendo o *produto exterior* dos dois vetores (que, de brinde, dá origem a uma base orientada positivamente). Dedique um pouco de tempo ao *produto exterior*, muito empregado em física e engenharia. Para defini-lo, procure um vetor perpendicular a (x, y, z) e (a, b, c): armando o sistema, a solução mais simples sem denominadores é o produto exterior dos dois vetores, a menos possivelmente de sinal. Essas contas motivam a definição. A seguir, apresente um argumento memnônico (mas cuidado, você pode contaminar suas provas para o resto do semestre com i, j, k em absolutamente qualquer contexto!), e a lista das propriedades favoritas: ortogonalidade, orientação e o fato que

$$||u \times v|| = ||u|| \; ||v|| \text{ sen } \theta,$$

onde θ é o ângulo entre u e v (que é diferente do ângulo entre v e u). Produtos exteriores facilitam as contas em problemas de distâncias mínimas envolvendo retas e planos.

Tópico extra: séries de Fourier

A proposta parece delirante, mas é possível como tópico facultativo, da maneira que o curso vem sendo apresentado:

em uma hora, obtenha a série de Fourier de uma função, e indique alguma aplicação em síntese ou estudo de sinais.

Para isso, 'puxe um limite' do produto interno em $\mathbb{R}^n$ para o produto interno em $L^2(0, 2\pi)$. Faça notar que ortogonalidade continua a fazer sentido, e que sua base preferida (com senos, cossenos e constante, em $[0, 2\pi]$, talvez) forma um conjunto ortogonal, facilmente normalizavel. Pelas fórmulas dos coeficientes na expansão de um vetor numa base ortogonal, obtemos uma expansão de uma função em termos desse conjunto de vetores. O material se torna muito mais expressivo se houver um computador em sala.

C. Da segunda à última prova (mais quatro semanas de teoria)

Estamos prontos para autovalores ou autovetores, ou quase. Antes, é vantajoso passar *uma semana* em determinantes e *outra* em números complexos — o segundo grau não trata desses tópicos com o cuidado necessário.

C.1 Determinantes

Comece com matrizes 2×2 (o caso 1×1 é confuso). Mais precisamente, resolva um sistema geral com duas incógnitas e duas equações e mostre que a resposta pode ser memorizada de forma fácil se for expressa em termos de determinantes — isso serve de motivação. Produto interno, exterior e determinantes foram motivados da mesma maneira: são seqüências de símbolos suficientemente freqüentes para merecer uma abreviação — isso dessacraliza um pouco esses objetos e indica a possibilidade de definir ainda outros.

Informe que o módulo $|d|$ do determinante de uma matriz M é a taxa de ampliação da área da transformação linear T associada à M, e que seu sinal indica se T preserva orientação ou não. Não vale a pena demonstrar o resultado, mas exemplos são indispensáveis. Não é difícil convencer aos alunos que o quadrado com vértices $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ e $(1, 1)$ é levado a um paralelogramo de área $|d|$: passar desse quadrado para a figura geral envolve manipulações com linearidade (para tratar de quadrados de lados paralelos ao original em qualquer lugar do plano) e o argumento do busto de Pitágoras, discutido na Seção A.4 — enfim, o detalhamento fica por conta da competência da turma. Conclua o inevitável quando o determinante é zero: que a transformação T e a matriz M não são inversíveis (essa palavra não existe no Aurélio, mas deveria — ninguém quer um carro convertível), que as colunas de M não formam uma base do plano.

Agora, refaça o que quiser para matrizes 3×3: motivação, processo memnônico para calcular o determinante, interpretação geométrica — e dê o salto: defina o determinante para matrizes $n \times n$ expandindo por uma linha.

Conte pacientemente quantas multiplicações são necessárias para calcular um determinante por essa definição, e deixe claro que determinantes em geral não são calculados de forma tão incompetente: os alunos verão formas alternativas em ALII, junto com formas de resolver sistemas mais eficientes do que a famigerada regra de Cramer (aliás, porquê ninguém ensina a contra-partida da regra de Cramer para cálculo de autovetores? pergunta retórica: não vale a pena nesse curso).

Agora que os fundamentos estão apresentados, ainda que sem demonstração, apresente alguns atalhos para o cálculo de determinantes. Em particular, expanda por linhas (colunas) com muitos zeros — trate de matrizes triangulares e diagonais — e some múltiplos de uma linha (coluna) à outra. Enfatize que não há nada de sagrado em passar de linhas para colunas durante o cálculo. Não exagere: os alunos vão se confundir com a abundância de alternativas, e o assunto é gigantesco.

1. Essa é uma segunda oportunidade no curso para falar de transformações (matrizes) inversíveis, núcleo, etc.

2. Calcule áreas e volumes mais difíceis — quadriláteros no plano, tetraedros dados por seus quatro vértices, um icosaedro regular?!

3. Expresse a equação da reta por dois pontos no plano usando um determinante. O mesmo para a equação de um plano no espaço. Mais difícil: escreva a equação do círculo por três pontos do plano usando um determinante. Problemas desse tipo fazem surgir determinantes grandes: decida se um ponto

do plano está sobre o gráfico de um polinômio de grau cinco passando por seis pontos dados, sem calcular o polinômio (isto é, descreva o polinômio interpolador com um determinante).

4. Calcule a área da imagem do círculo por uma transformação linear dada por uma matriz diagonal — melhor ainda, identifique essa imagem como sendo uma elipse (certifique-se de que os alunos conheçam elipses).

C.2 Números complexos

Seja paciente: os alunos provavelmente nunca viram números complexos.

Em princípio, tudo decorre do fato que um símbolo novo, i, tem a estranha propriedade que $i^2 = -1$. O assunto fica mais palatável, se você apresentar outros símbolos como maneiras formais de resolver equações anteriormente insolúveis (o sinal de raiz quadrada 'resolve' $x^2 = 2$, o sinal de menos 'resolve' $x + 2 = 0$). Preservando as propriedades habituais das quatro operações sobre os reais, seguem as definições das operações complexas. Ensine a inverter números complexos e gaste boa parte da aula com interpretações geométricas, especialmente multiplicação. Empregue os termos *partes real* e *imaginária*, e não esconda o jogo: complexos são os pontos do plano, com uma operação de multiplicação que não tinha sido considerada antes. Tópico extra muito chique: multiplicações em $\mathbb{R}^n$.

1. Resolva o seguinte problema (de pesquisa operacional...) com notação complexa. Piratas enterram um tesouro numa ilha da seguinte forma. As pedras A e B e o coqueiro C determinam novos pontos A' e B', obtidos por rotação de AC e BC de 90 graus nos sentidos anti-horário e horário respectivamente. O tesouro então é enterrado no ponto médio de $A'B'$. Agora, recupere o tesouro sem fazer uso da posição do coqueiro, marco efêmero.

2. Calcule as raízes quintas da unidade.

Fale sobre o teorema fundamental da álgebra, enfatizando o fechamento algébrico dos números complexos. Observe que raízes de polinômios reais vêm em pares conjugados.

3. Rotações no plano são fáceis de ser descritas com números complexos.

4. Somas são mais rápidas de fazer que multiplicações. Mostre que a multiplicação de dois complexos pode ser realizada com apenas três multiplicações reais, em vez das quatro necessárias no procedimento habitual. Sugestão: para calcular $(a+bi)(c+di)$, realize as multiplicações ac, bd e obtenha $ad+bc$ via $(a-b)(c-d)-ac-bd$. Levada a sério, a idéia abre um mundo de algoritmos rápidos para multiplicação, mesmo sobre os reais.

Há um certo interese didático em mostrar aos alunos que nem os processos ensinados no começo de suas vidas matemáticas são isentos de melhoria.

5. Como tópico especial, demonstre o teorema de Napoleão como apresentado no início do texto.primeiro apêndice.

A segunda razão profunda para considerar números complexos é a fórmula

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\text{sen }\theta.$$

A primeira dificuldade é definir os objetos na expressão. Chame a atenção dos alunos que o problema é tão difícil quanto a situação para reais: o que quer dizer $e^1?, e^2, e^\pi, \cos 1$? Depois de falar da série de potências para a exponencial, apresente as séries para seno e cosseno, e mostre a fórmula expandindo tudo. Fale de argumento e módulo, fases.

6. Muita gente motiva série de Taylor dizendo aos alunos que assim se calculam certas funções transcendentes em máquina. Essa é uma mentira em várias direções. Para sugerir uma delas, mostre como *não* faz sentido calcular e^{-10} usando a série (aliás, o que fazer, então?).

Ainda assim, é impossível exagerar a importância da aproximação de operações transcendentes por um número finito de operações elementares.

7. Um dos desenhos mais interessantes que pode ser mostrado a um aluno é a justaposição dos gráficos de seno, x, $x - x^3/6$, $x - x^3/6 + x^5/120$, perto da origem — de novo, aqui um computador em sala seria ótimo.

8. Faça alguma aplicação algébrica de números complexos: por exemplo, some

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx.$$

A idéia de combinar essa soma com sua gêmea envolvendo senos, e daí proceder usando exponenciais, é uma das razões que tornam números complexos interessantes para engenheiros elétricos.

C.3 Autovalores e autovetores

Comece com a definição e sua interpretação geométrica. Exemplifique fazendo uso de projeções, espelhamentos, etc. Apresente a caracterização dos autovalores como raízes do polinômio característico (para isto preparamos o material sobre determinante), e faça as primeiras contas: matrizes simétricas de espectro simples, matrizes triangulares, matrizes com espectro duplo mas admitindo base de autovetores. Finalmente, mostre exemplos de matrizes sem base de autovetores.

Certas contas banais confundem os alunos: peça os autovalores de $\frac{1}{3}M$, para alguma matriz explícita M e poucos encontrarão a resposta. Outra dificuldade computacional: saber uma raiz de um polinômio de grau três reduz o cálculo das outras raízes a um problema envolvendo um polinômio de grau dois — esse fato, combinado com o algoritmo de divisão de polinômios, exige treino. Os tantos pequenos truques para identificar raízes inteiras (ou racionais) de polinômios também são desconhecidos, e provavelmente não convém ensiná-los. Discuta o que acontece a autovalores e autovetores de uma matriz quando ela é multiplicada por uma constante, ou quando a ela soma-se um múltiplo da identidade, ou quando ela é elevada a uma potência.

1. Como comparam os autovalores e autovetores de uma matriz e de sua inversa?

Há duas razões para falar de autovalores e autovetores nesse curso. A primeira é de natureza geométrica: os vetores usados no terço anterior do curso para descrever algebricamente transformações lineares freqüentemente são autovetores.

A outra é a possibilidade de implementar um *cálculo funcional*. Esse tema é tratado no curso de forma superficial, mas é importantíssimo. Em ALII, essa motivação e ainda outra serão exploradas com mais detalhe.

C.4 Cálculo funcional, diagonalização e o teorema espectral

Desenhe no quadro pacientemente as matrizes necessárias para mostrar o seguinte fato algébrico: a equação

$$Mv_i = \lambda_i v_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

é equivalente à equação matricial $MV = V\Lambda$, onde as colunas de V são os autovetores de M e Λ é uma matriz diagonal com entradas diagonais dadas pelos autovalores de M. Logo, se V é inversível, $M = V\Lambda V^{-1}$. Daí, para qualquer polinômio p, vale $p(M) = Vp(\Lambda)V^{-1}$: diagonalizar uma matriz torna possível fazer contas difíceis com ela. Polinômios não são especiais: p pode ser substituído, por exemplo, por exponenciais, inversa, seno...

Se tiver fôlego, você pode apresentar uma versão mais competente do cálculo funcional (veja o Apêndice 6: a apostila sobre cálculo funcional distribuída aos alunos de ALII). Para dar um exemplo, vamos supor que queremos calcular a exponencial de uma matriz M com autovalores 1, 2 e 4. Para isso, encontre um polinômio p que leva 1, 2 e 4 a e^1, e^2 e e^4, respectivamente. Então $\exp M = p(M)$ — note que a conta foi feita sem obter os autovetores de M! O processo se aplica para matrizes diagonalizáveis, mas com pequenas alterações vale para o caso geral: isso fica para um outro curso (na PUC-Rio, isto tem sido ensinado no curso de cálculo que trata de equações diferenciais).

1. A inversa de uma matriz $n \times n$ simétrica M que tenha só dois autovalores distintos é da forma $aM + bI$, para escolha adequada de a e b.

2. Quem aprendeu a exponenciar complexos via Taylor não deve ter dificuldade em aceitar a definição de exponencial de matriz: o cálculo funcional permite calcular uma exponencial de outra forma.

Aqui surgem algumas dificuldades. Em princípio, podemos pedir como exercício que os alunos calculem uma potência de M, mas não há condições de motivar este tipo de contas em ALI. Da mesma maneira, os alunos não vão saber porquê convém exponenciar uma matriz. Essas motivações vão ser desenvolvidas em ALII e no curso de cálculo que trata de equações diferenciais.

3. O cálculo de potências de matrizes surge na obtenção de uma fórmula para o n-ésimo número de Fibonacci, quando o problema é fraseado como uma iteração vetorial $v_{n+1} = Av_n$, onde A é uma matriz 2×2 — contas ficam mais simples se as condições iniciais forem bem escolhidas. Esse exemplo é especialmente interessante porquê nele dois autovetores coexistem, regidos por autovalores diferentes, mas só um tem influência a longo prazo, um tema explorado com mais cuidado em ALII.

Outra dificuldade é o fato que autovalores complexos não admitem interpretação geométrica simples — não tente nada: diga aos alunos, se quiser, que de fato existe uma interpretação mais sofisticada, que não vai ser considerada no curso, mas que podemos encarar a situação como uma questão matemática para a qual os olhos não bastam (assim como a teoria espectral de matrizes 4×4), mas cujas contas são absolutamente análogas. Chame a atenção do fato que autovalores conjugados estão associados a autovetores conjugados — isso poupa contas e muitos erros de álgebra complexa.

Ainda mais uma dificuldade é o cálculo da inversa V^{-1}, que pode ser efetuado resolvendo um sistema linear (as matrizes nunca são grandes) ou enfatizando a escolha de autovalores ortonormais quando possível. Isto motiva os últimos aspectos teóricos do curso: *diagonalização* e o *teorema espectral*.

Nem sempre é possível obter colunas de V para que esta seja inversível. Isso acontece exatamente quando a matriz é *diagonalizável*. Enuncie o fato que matrizes com autovalores distintos são diagonalizáveis. Finalmente, enuncie o teorema espectral: realce a conveniência computacional de lidar com matrizes simétricas — em particular, mostre que a inversa de uma matriz ortogonal (isto é, uma matriz cujas colunas são vetores ortonormais) é sua transposta.

Apêndice 1: Transformações lineares e representações matriciais

Um uso freqüente de matrizes é a representação algébrica de transformações lineares. Nesse texto, você não vai encontrar teoremas — o importante é entender a técnica de construção, que vai ser a mesma em todos os exemplos.

Exemplo 1: Uma rotação no plano

Considere o plano habitual com seus eixos x e y desenhados como sempre. Vamos procurar uma descrição simples da função que leva todo vetor v (=ponto) do plano a outro vetor Rv obtido girando v em torno da origem de um ângulo θ, no sentido anti-horário (essa informação é importante: você em princípio pode girar v em dois sentidos). A idéia fundamental da construção é observar que essa função R é o que chamamos *uma transformação linear*. Isso quer dizer duas coisas:

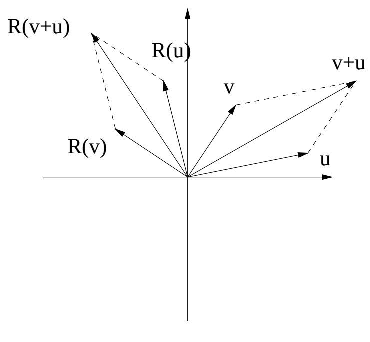
a. R leva a soma de dois vetores v e u para a soma dos vetores para onde v e u são levados. Em símbolos,

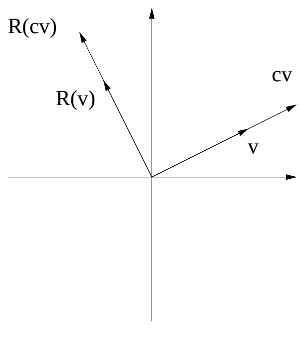
$$R(v+u) = R(v) + R(u), \text{ para quaisquer vetores } v \text{ e } u.$$

b. R leva um múltiplo cv de um vetor v para o mesmo múltiplo $cR(v)$ de Rv, isto é,

$$R(cv) = cR(v), \text{ para qualquer vetor } v \text{ e número } c.$$

Para se convencer disso, olhe as figuras abaixo.





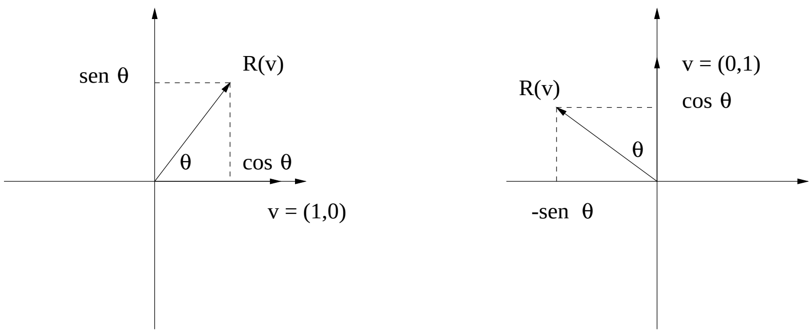
Agora que sabemos isso da rotação R, *para descobrirmos o valor de* Rv para um vetor qualquer $v = (x, y)^T$, *basta saber os valores de* $R((1,0)^T)$ *e* $R((0,1)^T)$. (Todos esses T servem para lembrar a você que os vetores devem ser pensados na vertical — escrevê-los assim, entretanto, poupa espaço). De fato, como todo vetor $v = (x, y)^T$ pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

temos que

$$R(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = xR(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) + yR(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}),$$

usando as propriedades (a) e (b) que caracterizam a linearidade de R. Note que poucas funções têm essa propriedade: para saber onde R leva um vetor qualquer, basta saber onde dois vetores estão sendo levados! Nesse caso, um pouco de trigonometria na figura abaixo nos mostra onde os vetores $(1,0)^T$ e $(0,1)^T$ vão parar.



Assim,

$$R(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad R(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Jogando esses valores na equação acima,

$$R(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ x\operatorname{sen}\theta + x\cos\theta \end{pmatrix},$$

ou, em forma matricial,

$$R(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Enfim, calculamos R para qualquer vetor v fazendo uso de uma matriz

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Exercício: Sejam θ e μ ângulos (em radianos, como nas contas acima). Entenda porque a equação abaixo é óbvia:

$$R_\theta R_\mu = R_{\theta+\mu}.$$

Escreva por extenso as matrizes envolvidas nessa expressão para demonstrar duas das fórmulas mais difíceis dos seus tempos de colégio:

$$\operatorname{sen}(\theta+\mu) = \operatorname{sen}\theta\cos\mu + \operatorname{sen}\mu\cos\theta,$$

$$\cos(\theta+\mu) = \cos\theta\cos\mu - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\mu.$$

Aliás, quanto é a matriz $(R_{\pi/3})^6$?

Exemplo 2: Uma rotação em torno do eixo vertical no espaço

Agora, vamos girar vetores *no espaço* de um ângulo θ em torno do eixo vertical, no sentido anti-horário em relação ao plano horizontal. Vamos chamar o eixo vertical de z, como habitualmente — o plano horizontal contém por sua vez os eixos x e y.

Mais uma vez, o problema fica fácil se você perceber que essa operação também é uma transformação linear (faça figuras para convencer-se disso) — se você souber onde três vetores convenientes são levados, você sabe onde *qualquer* vetor é levado. Chamando mais uma vez essa operação de R, note que, colando do exemplo anterior, você já sabe três vetores especiais e suas imagens por R:

$$(1,0,0)^T \text{ vai para } (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)^T,$$
$$(0,1,0)^T \text{ vai para } (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)^T \text{ e}$$
$$(0,0,1)^T \text{ vai para } (0,0,1)^T.$$

Note que o vetor vertical $(0,0,1)^T$ fica parado pela ação de R. Como, mais uma vez,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

vemos que, em representação matricial,

$$R(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nos dois exemplos acima, os vetores que empregamos para, a partir deles, obter a ação da transformação linear em um vetor qualquer, eram vetores muito simples - os chamados vetores canônicos. Vamos ver um exemplo um pouco mais complicado.

Exemplo 3: Uma reflexão no plano

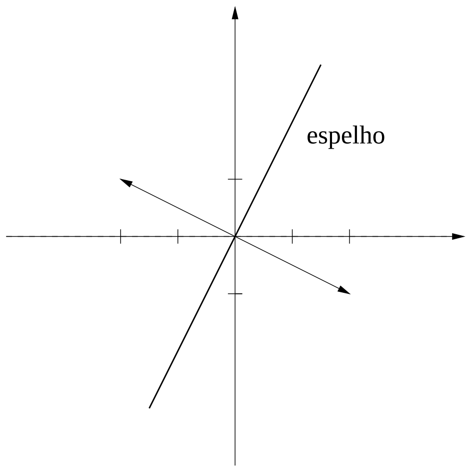
Considere a reta no plano passando pela origem e pelo ponto $(1,2)$. Imagine que essa reta é um espelho — vamos descrever a transformação T que leva cada ponto do plano a sua imagem nesse espelho. Para começar, convença-se fazendo figuras de que T é linear (isto é, verifique que (a) e (b) são satisfeitas pela reflexão). Agora, vamos procurar dois vetores para os quais a reflexão é especialmente simples de descrever — já que podemos escolher praticamente qualquer dois vetores, convém ser espertos nessa escolha. Por exemplo, é fácil ver o que a reflexão T faz com o vetor $(1,2)^T$ — simplesmente nada, isto é,

$$T(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Um outro vetor no qual a reflexão age de forma simples é um vetor que seja perpendicular ao espelho, por exemplo,

$(2, -1)^T$ (você entende porquê esse vetor é perpendicular à reta-espelho?). Uma figura deve convencer você de que

$$R(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}) = -\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



A pergunta seguinte é — como decompor um vetor do plano numa soma de dois ingredientes, um múltiplo de $(1, 2)^T$ e um múltiplo de $(2, -1)^T$? Isto é, dado um vetor $(x, y)^T$ qualquer do plano, ache números a e b tais que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Note que as incógnitas são a e b, e *não* x e y! Bom, essas equações correspondem a resolver o sistema

$$\begin{aligned} x &= 1.a + 2.b \\ y &= 2.a + (-1).b \end{aligned}$$

e depois de contas que não explicitaremos (resolva você!), obtemos

$$a = \frac{x + 2y}{5} \qquad \text{e } b = \frac{2x - y}{5}.$$

Mais uma vez, usando a linearidade de T,

$$\begin{aligned} T(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) &= aT(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) + bT(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}) \\ &= a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3x+4y \\ 4x+3y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e agora estamos prontos para a representação matricial de T,

$$T(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para conferir as contas, verifique que a fórmula acima realmente faz o que deve com os vetores $(1,2)^T$ e $(2,-1)^T$.

Exercício: Seja $M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Por quê $M^{1000} = M$? (como nos exercícios anteriores, pense visualmente)

Exemplo 4: Uma projeção em três dimensões

O conjunto de pontos (x,y,z) no espaço satisfazendo a equação

$$2x + 3y - z = 0$$

forma um plano π passando pela origem. Considere a reta r passando pela origem e pelo ponto $(0,1,2)^T$ (que aliás não pertence ao plano — por quê?). Procure a representação matricial da função que projeta um ponto do espaço sobre o plano π ao longo da reta r (isto quer dizer o seguinte: dado um ponto v do espaço, trace a reta por v paralela a r — a projeção é o ponto de encontro dessa reta com o plano).

De novo, convença-se antes de que essa projeção é uma transformação linear. Depois encontre três vetores para os quais a projeção é fácil de descrever, e escreva um vetor arbitrário $v = (x,y,z)^T$ numa soma de múltiplos dos três vetores obtidos. Aplique P em toda a expressão e represente $P(v)$ de forma matricial. Aliás, por quê $P^{1000} = P$?

Para que representar transformações de forma matricial? Uma resposta possível é que isso facilita programação: uma rotina que multiplica vetores pela matriz do exemplo 2, por exemplo, pode fazer girar todos os pontos relevantes de uma planta tridimensional de um prédio. Outra resposta, mais exótica, é que usando matrizes podemos pensar em operações geométricas (reflexões, projeções) em dimensões grandes, impossíveis de visualizar, simplesmente seguindo um procedimento algébrico.

Nas próximas aulas, vários dos ingredientes nessa construção serão estudados com mais cuidado — neste resto de parágrafo, vamos pinçar algumas palavras que surgirão no resto do curso. Por exemplo, nem toda escolha de dois vetores no Exemplo 3 serviria: se, por preguiça, você tivesse escolhido os vetores $(1,2)^T$ e $(2,4)^T$ (nos quais a reflexão não faz nada), você não conseguiria escrever um vetor qualquer do plano como uma combinação linear dos dois vetores. Isso entretanto é possível para quase toda a escolha de dois vetores — escolhas boas serão chamadas de *bases*. Note que qualquer base nesse problema deve ter dois vetores, assim como qualquer base no exemplo 4 deve ter três vetores. Esse número, que só depende do espaço em que estamos atuando, é o que chamaremos de *dimensão* do espaço. Retas e planos pela origem são exemplos de *subespaços*. No exemplo 4, a reta r foi mandada à origem pela transformação linear P — ela é o *núcleo* de P, e o plano π é a *imagem* de P. Nos exemplos 2, 3 e 4, alguns vetores não sairam do lugar. No exemplo 3, um vetor foi simplesmente multiplicado por -1. Vetores que só são multiplicados por um número pela ação de uma transformação são chamados de *autovetores* e o fator multiplicativo, *autovalor*.

Apêndice 2: Produto interno e ortogonalidade

Associe aos vetores $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T$ e $v = (v_1, v_2, \ldots, v_N)^T$, com coordenadas reais, o número

$$\langle u, v\rangle = u^T v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i,$$

o *produto interno* de u e v. Convença-se de que você entendeu a linha acima — ela começa com uma notação nova, que estamos definindo de duas formas:

a. ou como o produto de uma matriz $1 \times n$ (o vetor u^T: lembre que vetores estão sempre de pé e a transposição os deita) por uma matriz $n \times 1$ (o vetor v), que tem que dar uma matriz 1×1 (um número!),

b. ou como a soma indicada (que dá o mesmo que multiplicar as matrizes u^T e v).

Bom, e o que o produto interno faz por nós? Duas coisas fundamentais: com ele, podemos falar do tamanho de um vetor, ou como se diz em matemática, da *norma* $||v||$ de um vetor v,

$$||v|| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}},$$

(antes de continuar, verifique que se $v = (3, 4)^T$,então $||v|| = 5$) e do *ângulo* entre dois vetores u e v, ou mais precisamente, de seu cosseno, dado por

$$\cos(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{||u||\ ||v||}.$$

Assim, por exemplo, os vetores $(1, 3, 2)^T$ e $(-2, 3, -4)^T$ no espaço tridimensional formam um ângulo cujo cosseno é

$$\frac{1.(-2) + 3.3 + 2.(-4)}{\sqrt{14}\sqrt{29},}$$

e se você tivesse uma tabela de cossenos (ou uma calculadora com uma tecla arccos), você poderia obter o ângulo a partir desse valor do coseno. (Aliás, desenhe o gráfico do coseno para se convencer de que quem sabe o coseno de um ângulo, sabe o ângulo se ele estiver, por exemplo, no intervalo $[0, \pi]$). Outra coisa: por alguma razão que não é óbvia (e que tem nome, a desigualdade de Cauchy-Schwartz), esse quociente que define o coseno sempre dá um número entre -1 e 1 (ainda bem, é um cosseno...).

Exercício: Todos os vetores de norma 1 do plano são da forma $(\cos\theta, \sin\theta)^T$ para alguma escolha do ângulo θ (e formam um círculo — qual?)

Assim, é muito fácil decidir se dois vetores são perpendiculares entre si — como o cosseno de $\pi/2$ (ou, em graus, 90^o) é zero, basta ver se o produto interno dos dois vetores é zero. Outra coisa: essa é uma maneira prática de falar de vetores perpendiculares (ou, usando um sinônimo matemático, *ortogonais*) em espaços de qualquer dimensão, e não só aqueles nos quais enxergamos algo. Note que, no plano ou no espaço tridimensional, no qual já temos um conceito de ângulo, teríamos que *demonstrar* que a fórmula para o cosseno dada acima coincide com nossa interpretação habitual de ângulo, mas não vamos fazer isso nesse texto. Note também que essa fórmula ajuda muito certas contas: dados três pontos A, B e C de $\mathbb{R}^3$, fica muito fácil calcular o ângulo ABC (ou pelo menos seu cosseno).

Exercício: Ache um vetor do plano perpendicular ao vetor $(a, b)^T$. Supondo $a, b, c \neq 0$, ache dois vetores independentes no espaço ortogonais a $(a, b, c)^T$.

Exemplo: Em $\mathbb{R}^3$, o conjunto $\{(x, y, z) \mid 2x + 3y - z = 0\}$ é um plano π passando pela origem. A equação do plano, pode ser escrita como

$$(2, 3, -1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

ou, usando a notação de produto interno,

$$\langle (2, 3, -1)^T, (x, y, z)^T \rangle = 0.$$

Agora, leia alto essa última linha: os vetores do plano π são os $(x, y, z)^T$ que são perpendiculares ao vetor $(2, 3, -1)^T$ — então um vetor que é perpendicular a todos os vetores do plano é justamente $(2, 3, -1)^T$ (e qualquer múltiplo seu). Um vetor desses é o que se costuma chamar um vetor *normal* ao plano.

Certas propriedades do produto interno são fáceis de verificar e muito práticas:

I. $\langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle$, para vetores quaisquer u_1, u_2, v.

II. $\langle u, v_1 + v_2\rangle = \langle u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle$, para vetores quaisquer u, v_1, v_2.

III. $\langle au, v\rangle = \langle u, av\rangle = a\langle u, v\rangle$ para quaisquer vetores u, v e número real a.

IV. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$, para quaisquer vetores u, v.

Aliás, as três primeiras propriedades simplesmente dizem que o produto interno é linear em cada coordenada.

Vetores $\{v_1, \ldots, v_k\}$ formam um conjunto *ortogonal* se eles forem ortogonais dois a dois. Note que em três dimensões, não existem mais do que três vetores não nulos ortogonais entre si. Uma propriedade clássica (400-500 A.C. na Grécia) de vetores ortogonais é a seguinte.

Teorema (Pitágoras) : Seja $\{v_1, \ldots, v_k\}$ um conjunto ortogonal, e $v = v_1 + \ldots + v_k$. Então

$$||v||^2 = ||v_1||^2 + \ldots + ||v_k||^2.$$

Note que quando o conjunto tem dois elementos, isso é o teorema de Pitágoras do colégio: faça uma figura para convencer-se disso. Com três elementos, o resultado calcula a diagonal maior de um paralelepípedo em termos dos lados. Fazendo uso de um conjunto ortogonal muito óbvio — os vetores $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)^T, e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)^T, \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)^T$ — mostre que o teorema de Pitágoras diz que a norma de um vetor $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T$ é sua distância à origem.

A demonstração é quase óbvia, fazendo uso das definições e propriedades do produto interno:

$$
\begin{aligned}
||v||^2 &= \langle v, v\rangle = \langle v_1 + \ldots + v_k, v_1 + \ldots + v_k\rangle \\
&= \text{ a soma de todos os produtos internos entre } v_i \text{ e } v_j \\
&= \langle v_1, v_1\rangle + \ldots + \langle v_k, v_k\rangle,
\end{aligned}
$$

já que todos os produtos internos cruzados são nulos (os vetores são ortogonais dois a dois!). Mas essa última expressão é exatamente $||v_1||^2 + \ldots + ||v_k||^2$. Note que demonstramos um resultado que vale para vetores em qualquer dimensão, e ainda assim a demonstração foi muito mais simples do que a demonstração do teorema de Pitágoras bidimensional ensinada no colégio. Esse resultado deve convencer você do poder da definições de produto interno e ortogonalidade: geometria fica muito mais fácil expressa dessa forma.

Agora, vamos ver uma aplicação muito importante de conjuntos ortogonais. Suponha que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base ortogonal do espaço de n dimensões (isto é, o conjunto de vetores, além de ser uma base, é ortogonal). Vamos tentar representar um vetor v qualquer do espaço numa combinação linear dos vetores da base:

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n,$$

para uma escolha adequada dos números a_i. Em geral, isso exige a solução de um sistema com n equações e n incógnitas. Nesse caso, não — calcule o produto interno dos dois lados da equação acima com o vetor v_1:

$$
\begin{aligned}
\langle v, v_1\rangle &= a_1\langle v_1, v_1\rangle + a_2\langle v_2, v_1\rangle + \ldots + a_n\langle v_n, v_1\rangle \\
&= a_1\langle v_1, v_1\rangle,
\end{aligned}
$$

já que os vetores são ortogonais entre si. Em geral,

$$a_1 = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}, \ldots, a_n = \frac{\langle v, v_n\rangle}{\langle v_n, v_n\rangle},$$

que é uma conta muito mais rápida que resolver um sistema $n \times n$. Note algo surpreendente: para saber o coeficiente a_i, basta saber quem é v_i — os outros vetores da base são irrelevante para esse cálculo! Frequentemente, dizemos que o problema *desacoplou*: em vez de resolver um sistema $n \times n$, temos só que resolver n sistemas 1×1!

Exemplo: Vamos usar desacoplamento para simplificar as contas do cálculo da representação algébrica da projeção ortogonal P sobre o plano $\{(x, y, z) \mid 2x + 3y - z = 0\}$. Como de costume, procuramos três vetores para os quais conhecemos a ação de P, mas agora vamos escolhê-los ortogonais entre si. O vetor normal $(2, 3, -1)^T$ é levado por P a $(0, 0, 0)^T$. Os vetores no plano ficam parados: um deles, por exemplo, é $(0, 1, 3)^T$. Agora, vamos procurar um vetor $(a, b, c)^T$ no plano que seja ortogonal a esse: isso exige $0.a + 1.b + 3.c = 0$. Como esse vetor pertence ao plano, (ou, o que é a mesma coisa, esse vetor tem que ser ortogonal ao vetor normal ao plano), $2.a + 3.b - 1.c = 0$ — essas duas equações têm muitas soluções: uma delas é $(5, -3, 1)^T$. A simplificação nas contas acontece agora: para expandir um vetor arbitrário do plano nessa base ortogonal,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

é só fazer os produtos internos:

$$s = \frac{\langle (x, y, z)^T, (0, 1, 3)^T \rangle}{\langle (0, 1, 3)^T, (0, 1, 3)^T \rangle} = \frac{y + 3z}{10},$$

$$t = \frac{5x - 3y + z}{35}, \ r = \frac{2x + 3y - z}{14}.$$

(As contas foram feitas em uma seqüência inesperada para convencer você do desacoplamento). Assim, para encerrar o exemplo, a projeção P leva $v = (x, y, z)^T$ para

$$\frac{y + 3z}{10}(0, 1, 3)^T + \frac{5x - 3y + z}{35}(5, -3, 1)^T.$$

A representação matricial fica por sua conta.

Uma base que além de ser ortogonal tem todos seus vetores de norma igual a um é chamada base *ortonormal* — as contas para calcular componentes nessa base são ainda mais fáceis: todos os denominadores são iguais a 1. É fácil passar de uma base ortogonal para uma ortonormal — basta dividir cada vetor da base por sua norma.

Exercício importantíssimo: Seja Q uma matriz $n \times n$ tal que suas colunas são n vetores ortonormais. Mostre que $QQ^T = I$, a matriz identidade. Isto quer dizer que a inversa de Q é muito fácil de calcular, $Q^{-1} = Q^T$ — matrizes com essa propriedade são chamadas de *matrizes ortogonais*. Neste caso, aliás, também é verdade que $Q^TQ = I$ — isto é, se as colunas de Q formam uma base ortonormal, as linhas também formam.

Exercício: Escreva todas as matrizes ortogonais 2×2.

Exercício difícil ou fácil: Sejam a, b, c, d números reais satisfazendo

$$a^2 + b^2 = 1,\ c^2 + d^2 = 1,\ ac + bd = 0.$$

Mostre que, então,

$$a^2 + c^2 = 1,\ b^2 + d^2 = 1,\ ab + cd = 0.$$

Apêndice 3: Alguns exercícios

. Encontre uma representação algébrica do plano passando pelos pontos $A = (1, 2, 3)$ e $B = (2, 3, 4)$ que seja paralelo à reta

$$\{(x, y, z) \mid (x, y, z) = (1, 2, 4) + t\ (1, 0, -1), t \in \mathbb{R}\}.$$

. Encontre uma representação **paramétrica** da interseção dos planos $\{(x, y, z) \mid x + y + z = 1\}$ e $\{(x, y, z) \mid 2x - z = 3\}$.

. Ache a distância entre o ponto $P = (1, 2, 4)$ e o plano que passa pelos pontos $A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 2)$ e $C = (2, 0, -1)$.

. Seja T o triângulo com vértices $A = (0, 1), B = (0, 2)$ e $C = (1000, 0)$. Decida se o ponto $P = (400, 2/3)$ está no interior de T.

. Encontre uma translação do plano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que leva a reta $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 3\}$ a uma reta r_0 pela origem. Descreva r_0 algebricamente. Descreva algebricamente a projeção ortogonal $p_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sobre a reta r_0. Escreva em termos de f e p_0 a projeção ortogonal $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sobre a reta r.

. Considere os vetores $v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (2, 1, 3)$ e $v_3 = (8, 7, a)$. Determine os valores de a para os quais não é possível escrever um vetor arbitrário de $\mathbb{R}^3$ como combinação linear de v_1, v_2 e v_3. Descreva a situação geométrica satisfeita por v_1, v_2 e v_3 nesse caso.

. Seja R^t_α a rotação em $\mathbb{R}^3$ em torno do eixo t (que no nosso caso vai ser x ou y) de um ângulo α no sentido indicado pela regra da mão direita. Mostre ou dê um contra-exemplo: aplicar R^x_θ e depois R^y_μ dá o mesmo resultado que aplicar R^y_μ e depois R^x_θ.

. Verdadeiro ou falso: a função abaixo é uma rotação pela origem:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto (-x, -y)$$

. Considere o espelhamento em $\mathbb{R}^3$ pelo plano

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = b\},$$

onde $b \in \mathbb{R}$ é uma constante. Para que valores de b esse espelhamento é uma transformação linear? Para esse valor de b, obtenha a representação matricial dessa transformação.

. Seja

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcule os autovalores de M. Encontre um autovetor para cada autovalor de M.

. Calcule os autovalores da matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

. Sabendo que os autovalores de A abaixo são 5, 0 e 2, ache um autovetor associado a cada autovetor.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -2 \\ -2 & 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

. Dado que $Av = v$ e $Aw = 2w$, onde $v = (3, 2)$ e $w = (4, 3)$, calcule A^{10}.

. Seja

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Encontre uma matriz ortogonal P e uma matriz diagonal D tais que $M = PDP^{-1}$. Explicite P^{-1}.

. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que projeta vetores ortogonalmente sobre a reta $x + 2y = 0$. Quem são os autovalores de T? Determine um autovetor para cada autovalor de T.

. Um agricultor pode empregar dois tipos de adubo. O primeiro contém 3 gramas de A, 1 grama de B e 8 gramas de C por quilo e custa R$ 10 por quilo. O segundo, por quilo, tem 2g de A, 3g de B e 2g de C, a um preço de R$ 8. Um quilo de adubo dá para 10 m^2 de terra, e a demanda mínima deste solo é de 3g de A, 1.5g de B e 4g de C a cada 10 m^2. Quanto adubo de cada tipo deve ser comprado para cada $10m^2$, de modo a obter o custo mínimo?

. (puxado) Determine a equação da esfera que passa pelos pontos $(0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$ e $(2, 0, 3)$.

. Verifique se a equação

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x - 8y - 24z - 5 = 0$$

representa uma esfera em $\mathbb{R}^3$ e, caso afirmativo, determine seu centro e seu raio.

. Sejam $A = (-1, 0)$ e $B = (0, 1)$. Encontre a equação dos pontos $C = (x, y)$ para os quais a soma das medidas dos segmentos AC e BC é igual a 3.

. Dados os pontos $A = (0, 0)$ e $B = (1, 0)$ encontre a equação dos pontos C do plano para os quais $2 \text{ dist}(C, A) = 5 \text{ dist}(C, B)$.

Álgebra Linear II

Cada semana deste curso tem uma aula teórica de duas horas e uma aula em laboratório de computação de uma hora. Os laboratórios empregados têm uma máquina ligada a uma televisão grande, muito conveniente.

Usamos MAPLE, para o qual a PUC-Rio tem direito de uso em todo o campus. Há razões didáticas fortes para empregar MAPLE: o ambiente de computação é simples, uma eventual programação segue de perto os comandos habituais, o sistema de ajuda é ótimo, é fácil passar de contas simbólicas para numéricas e, finalmente, os códigos fonte são disponíveis: em princípio, nenhum programa é uma caixa preta.

II.A O primeiro terço do curso (quatro semanas)

Vão ser apresentadas três fontes de grandes matrizes, isto é, três problemas considerados através de teoria linear. Esses problemas servirão de motivação para o restante do curso.

A.1 Caminhos em grafos

Defina grafo (não orientado) G e a matriz de adjacência A_G associada a um grafo. A seguir, mostre como a n-ésima potência de A_G conta os caminhos de comprimento n entre dois pontos do grafo. O Apêndice 4 contém um pequeno texto distribuído aos alunos sobre isso.

Há dois aspectos interessantes a considerar. O primeiro é que multiplicação de matrizes é perfeita para esse problema: gaste tempo mostrando que o resultado é verdadeiro para caminhos de tamanho 2. O outro é indução, não necessariamente explicitada: os caminhos de comprimento n podem ser contados a partir dos caminhos de comprimento $n-1$ e os de comprimento 1 — mais verbalmente, todo caminho de comprimento n parte de forma única em um caminho de comprimento $n-1$ seguido de uma aresta do grafo.

A primeira sessão com Maple deve ser usada para criar o mínimo de familiaridade com o software. Os alunos devem aprender as quatro operações (e isso inclui a posibilidade de operar com número arbitrário de dígitos, tanto em aritmética inteira, quanto em ponto flutuante), a invocação with(linalg), a construir matrizes (não exagere: entre linha a linha - operar com blocos, zerar muitas posições, etc., pode ser visto mais tarde), e a somar e multiplicar matrizes (isso inclui o comando evalm).

Isso basta para um primeiro problema. Conte caminhos entre vértices do cubo e do tetraedro, e tente explicar as afinidades entre os resultados.

A.2 Modelos populacionais

Descreva o seguinte modelo. Certa população é dividida num número fixo de faixas etárias, cada uma com suas0 taxas de natalidade e mortalidade. Expresse a transição entre as faixas antes num grafo, depois como um conjunto de equações, e finalmente como a ação de uma matriz sobre um vetor de populações. O Apêndice 5 contém um pequeno texto introdutório.

Com o MAPLE, mostre experimentalmente que a pirâmide etária estabiliza a partir de praticamente qualquer distribuição inicial de populações. Esse resultado vai se manter misterioso até o estudo de autovalores e autovetores — note o potencial teatral do tema: cada aluno escolhe sua condição inicial e todos encontram o mesmo comportamento assintótico, se tudo der certo. A programação vai exigir alguma forma de normalização de um vetor (não necessariamente euclideana: por quê não fazer suas coordenadas somarem 100?), e possivelmente uma iteração, para estudar o comportamento assintótico.

A.3 O problema de Sturm-Liouville e sua discretização

Apresente o problema de Sturm-Liouville mais elementar,

$$-u''(t) + q(t)u(t) = f(t),\ u(0) = 0,\ u(1) = 1.$$

Discretize o intervalo $[0, 1]$ nos pontos

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n+1}, \ldots, x_{n+1} = 1,$$

e aproxime a segunda derivada por

$$u''(t) \approx \frac{u(t+h) - 2u(t) + u(t-h)}{h^2},$$

para obter uma aproximação da solução u por valores u_i nos pontos x_i satisfazendo ao sistema linear habitual. Isto motiva a resolução de grandes sistemas, desde que os alunos admitam que equações diferenciais de segunda ordem são importantes.

Talvez os alunos sejam tão jovens que não saibam porque equações diferenciais são importantes. Uma motivação pequena mas plausível é mostrar que o seno é a solução para uma equação desse tipo: assim, resolver a equação é tabelar o seno. Esse pode ser o tema da sessão de MAPLE da semana: calcular senos resolvendo o sistema linear associado à discretização.

Há dois aspectos computacionais a considerar: as matrizes envolvidas são tridiagonais, e podem ser introduzidas no programa de forma mais compacta. Os alunos são apresentados, ainda que superficialmente, às rotinas de resolução de sistemas.

A4. Problemas

Cada assunto das semanas anteriores é uma caixa de Pandora. Aqui vão extensões, um pouco mais elaboradas nos exercícios do Apêndice 7. As sugestões abaixo podem se estender para muito além de uma semana só.

1. Caminhos de comprimento n num tetraedro são de dois tipos: os abertos e os fechados. Escreva relações recursivas para o número de caminhos de cada tipo. Chame a atenção que equações lineares recursivas estão sendo resolvidas potenciando matrizes. De fato, esses números são obtidos através da matriz de adjacência do tetraedro, mas uma matriz 2×2 já dá conta do problema. Se quiser, mostre que o mesmo pode ser feito para calcular o n-ésimo número de Fibonacci (aliás, o primeiro modelo populacional com um mínimo de sofisticação).

2. Aumente a complexidade do modelo populacional: considere dois sexos, por exemplo. Em vez de falar de taxas de fertilidade, interprete os pesos das arestas do grafo como sendo probabilidades de transição. Um problema interessante: monte as matrizes correspondendo a caminhos aleatórios pelas arestas de um tetraedro e de um cubo: o que há para dizer sobre potências altas dessas matrizes?

3. Considere discretizações com condições de fronteira periódicas.

B. Entre a segunda e a terceira prova — sistemas lineares (quatro semanas)

Vamos resolver sistemas lineares por escalonamento, e interpretar as conseqüências das operações em termos geométricos.

B.1 Escalonamento

Escreva um sistema com três incógnitas e três equações explicitamente, ao lado de sua representação por uma matriz estendida. Mostre que as operações óbvias para quem resolve um sistema (multiplicar uma linha por uma constante, somar uma linha à outra, trocar duas linhas de lugar) correspondem a operações simples na matriz aumentada.

Deixe claro que a soma de linhas é apenas uma forma conveniente de ocasionalmente eliminar de uma equação uma variável que foi explicitada em outra. Interprete em termos do sistema a seqüência de operações na matriz aumentada que corresponde a zerar todas as entradas acima e abaixo de uma entrada não nula fixa.

Escalone simbolicamente: tente, por exemplo, contar o número de multiplicações necessárias para resolver um sistema $Ax = b$ onde A é uma matriz 5×5 tridiagonal.

Mostre como resolver vários sistemas $Ax = b_i$ ao mesmo tempo. Inverta uma matriz.

Na aula computacional, apresente as rotinas que fazem escalonamento (addrow, por exemplo), e escalone passo a passo — na próxima aula, os alunos podem ser confrontados com as rotinas de decomposição LU.

B.2 Escalonamento revisitado: a decomposição LU

Interprete as operações da semana anterior sobre a matriz do sistema como o efeito de multiplicações por matrizes elementares: apresente a decomposição LU de uma matriz. Explique porque sistemas associados a matrizes triangulares são simples.

Compare escalonamento e decomposição LU: conte multiplicações, se tiver tempo.

Na aula computacional, faça uso das rotinas de decomposição LU. Talvez essa seja uma boa oportunidade aliás para acostumar os alunos a operar em aritmética racional e em ponto flutuante. Faça resolver sistemas lineares grandes: por exemplo, calcule o seno usando a aproximação via Sturm-Liouville discretizado por matrizes 200×200.

B.3 Escalonamento e geometria

Considere o problema fundamental: dado um conjunto de vetores $v_1, \ldots, v_k$, decidir se eles geram o mesmo subespaço que um conjunto de vetores com menos elementos. Resolva assim: monte uma matriz M cujas linhas são esses vetores; mostre que as operações elementares não alteram o espaço gerado pelas linhas; escalone até obter vetores obviamente linearmente independentes. Os conceitos de *base* e *dimensão* passam a ter um significado concreto.

Mostre que a imagem de uma transformação linear é o espaço gerado pelas colunas da matriz que a representa (afinal, as colunas são a imagem da base canônica). Em particular, o algoritmo acima obtém uma base para a imagem de uma transformação (o que costuma ser chamado de posto).

Na aula computacional, é interessante fazer notar que a rotina LU do MAPLE calcula o posto da matriz sendo decomposta. Vale a pena mostrar que decidir se um conjunto de vetores é linearmente dependente é uma tarefa numericamente instável.

B.4 Representando vetores em bases

Lembre que expressar um vetor numa base é resolver um sistema linear, o que nesse segundo curso pode ser pensado em dimensão arbitrária. Volte a tratar de um dos temas importantes de ALI: as vantagens de operar com bases ortogonais. Se achar oportuno, fale da decomposição QR de uma matriz (uma versão numericamente estável do método de Gram-Schmidt).

A aula computacional pode ser dedicada à instabilidade da resolução de certos sistemas lineares. Não seja ambicioso:

apresente uma matriz M mal condicionada (isto è, uma matriz que leva a bola unitária a um elipsóide muito excêntrico), e mostre como os erros de resolução variam dependendo da escolha do lado direito do sistema (para isso, é conveniente poder alterar o número de dígitos das contas). Resolva depois esse sistema usando uma decomposição QR (isto é, escreva $M = QR$ e proceda à resolução de dois sistemas) e compare os erros.

C. O terço final do curso — autovalores e autovetores

C.1 Determinantes e números complexos

Essa aula deveria ser apenas uma revisão de material estudado em ALI. Há uma novidade muito interessante: levando em conta que $\det AB = \det A \det B$, aprendemos que a decomposição LU é um processo muito mais eficiente para calcular determinantes do que as expansões por linha.

Na aula computacional, calcule alguns determinantes interessantes (por exemplo, Vandermonde — aproveite para ensinar comandos de fatoração e simplificação), opere com números complexos.

C.2 Autovalores e autovetores

De novo, lembre aos alunos da definição através de um exemplo. Apresente o método de potências para cálculo do autovalor de maior módulo. Explique a relevância do autovalor de maior módulo no comportamento assintótico de $A^n v$.

Na aula computacional, você pode fazer contas com o método de potências e mostrar como o resultado a respeito de distribuições etárias apresentado no primeiro terço do curso se explica parcialmente através dele (faltaria demonstrar que o autovalor de maior módulo de uma matriz de taxas de fertilidade e mortalidade é de fato um número positivo, tem multiplicidade algébrica igual a um, e o autovetor associado tem todas as suas coordenadas positivas, o que garante interpretação física razoável para o comportamento assintótico do sistema — esse é o teorema de Perron-Frobenius, que vai além do objetivo do curso).

C.3 Matrizes diagonalizáveis e cálculo funcional

Repasse os fatos básicos sobre matrizes diagonalizáveis e apresente o cálculo funcional — veja o Apêndice 6.

Na aula computacional, apresente rotinas de interpolação polinomial. Aproveite e mostre como matrizes de Vandermonde estão associadas ao problema de interpolação.

C.4 Outras iterações e o cálculo de outros autovalores

O método de potências é conveniente apenas para calcular o autovalor de maior módulo de uma matriz diagonalizável. Supondo a matriz M diagonalizável, decomponha um vetor v arbitrário em uma base de autovetores,

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n,$$

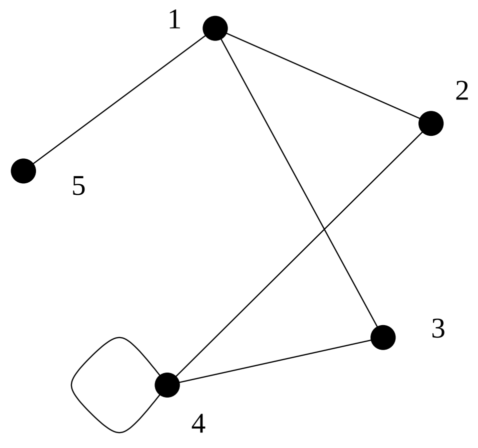
e fazendo contas parecidas com as empregadas na apresentação do método de potências, mostre que

$$f(M)v = a_1 f(\lambda_1) v_1 + \ldots + a_n f(\lambda_n) v_n,$$

o que permite, fazendo escolhas adequadas de f, ressaltar qualquer região do plano complexo. Em particular, use parábolas voltadas para baixo para enfatizar intervalos reais e inversas ($f(x) = \frac{1}{x-a}$), para enfatizar autovalores próximos de a. Se tiver oportunidade, fale de iterações com "shifts". Esta aula é uma janela para algoritmos fundamentais em álgebra linear numérica: não seja ambicioso tentando cobrir matéria demais.

Apêndice 4: Matrizes de adjacência

Um *grafo* é simplesmente um conjunto de pontos, os *vértices*, ligados por alguns segmentos, as *arestas*. Dois vértices são chamados *adjacentes* se são ligados por uma aresta. A figura abaixo, por exemplo, é um grafo com cinco vértices, que foram rotulados $1, 2, \ldots, 5$, e sete arestas (sem nome), e nele os vértices 1 e 4 não são adjacentes. Note aliás que existe uma aresta começando e terminando no mesmo vértice 4. Um caminho entre dois vértices é exatamente o que você está pensando: 1243444315 é um caminho entre 1 e 5 de *comprimento* (isto é, o número de arestas percorridas) igual a 9. Um caminho pode



ir e voltar sobre si mesmo muitas vezes, ou ficar rodando por uma aresta.

Um outro exemplo é o grafo que tem por vértices e arestas os oito vértices e as doze arestas de um cubo.

Grafos são tão simples que é difícil imaginar que existam perguntas interessantes associadas a eles — a situação é exatamente o contrário: para a maioria das perguntas, não se conhece uma resposta satisfatória. Um exemplo de pergunta (que não é tão simples, mas vai ser respondida nesse texto) é a seguinte: quantos caminhos de comprimento 20 existem ligando os vértices 1 e 5 do grafo acima? Outra: quantos caminhos *fechados* (isto é, começando e terminando no mesmo vértice) de comprimento 100 existem no grafo associado ao cubo? Note, aliás, que esses números são provavelmente muito grandes, e que não são fáceis de escrever em termos dos objetos combinatórios que você aprendeu no colégio (arranjos, combinações...) — na verdade, esses objetos são inúteis para abordar esse problema.

Não é nada óbvio que matrizes possam ajudar a responder a essa pergunta: o procedimento, que descrevemos a seguir, é muito empregado em problemas de otimização, matemática discreta, teoria de grafos (!), etc.

Dado um grafo G com n vértices, rotule seus vértices com os números $1, 2, \ldots, n$ e monte a *matriz de adjacência* de G — essa matriz, que vamos chamar de A, é $n \times n$, e só tem os números 0 e 1 em suas posições: mais precisamente, na posição (i, j) de A (isto é, no cruzamento da linha i com a coluna j

de A), colocamos um 0, se os vértices i e j não são adjacentes, e um 1, se o são. Por exemplo, para o grafo G da figura, a matriz A é

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que a matriz A é *simétrica* (isto é, suas posições (i, j) e (j, i) são iguais) — afinal, se o vértice i é adjacente a j, o j é adjacente a i. Estamos prontos para responder à primeira pergunta: o número de caminhos de comprimento 20 ligando os vértices 1 e 5 do grafo da figura é dado pela posição $(5, 1)$ (que o mesmo que a posição $(1, 5)$) da matriz A^{20}. De maneira mais geral, vale o seguinte teorema, bastante inesperado.

Teorema: Seja G um grafo com n pontos rotulados pelos números $1, 2, \ldots, n$, e com matriz de adjacência A. O número de caminhos de comprimento c ligando os vértices i e j é a posição (j, i) da matriz A^c.

Note que a própria matriz de adjacência conta os caminhos de comprimento $c = 1$ entre os vértices i e j: em outras palavras, o teorema para esse caso segue diretamente da definição de matriz de adjacência. Para entender um pouco mais o teorema, vamos considerar o caso $c = 2$ — isto é, vamos ver porque o número de caminhos ligando i a j com um único vértice intermediário é dado pela posição (i, j) da matriz A^2. Para facilitar a notação, vamos escrever $M_{i,j}$ para representar a posição (i, j) da matriz arbitrária M. Note que a posição (i, j) de A^2 (isto é, $(A^2)_{i,j}$) é dada pela expressão

$$(A^2)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} A_{k,j}$$

(para convencer-se disso, eleve uma matriz pequena ao quadrado explicitamente — note, aliás, que essa expressão seria o comando central de um programa que eleva uma matriz ao quadrado). Só há uma maneira do produto $A_{i,k} A_{k,j}$ ser diferente de zero: as posições $A_{i,k}$ e $A_{k,j}$ têm que ser iguais a 1, o que quer dizer que o grafo original tem uma aresta ligando i a k e outra ligando k a j — mas isto é exatamente dizer que existe um caminho entre i e j de comprimento 2 passando por k. Como k pode ser qualquer ponto do grafo (isto é o que quer dizer que no somatório k vai de 1 a n), e cada caminho deste tipo contribui com o número $1 = 1 \times 1$ para o somatório, o termo direito da expressão é o número total de caminhos de i a j de comprimento 2, e o teorema está demonstrado então para esse caso. Para comprimentos arbitrários, a demonstração é muito parecida, combinando esse argumento com indução.

A moral é que um problema combinatório bastante complicado se reduziu a calcular potências de matrizes. Claro, a dificuldade agora é saber calcular potências de forma competente, e para isso temos um curso pela frente.

Exercício: Que multiplicações matriciais você faria para calcular A^{20}? Procure uma seqüência de poucas mutiplicações — use o MAPLE para fazer essas contas.

Essas idéias se estendem para outros tipos de grafos. Por exemplo, poderíamos supor que as arestas são orientadas (e representar isso colocando setinhas em cada aresta), de maneira que seja possível ir de i a j, mas não voltar. Ou poderíamos supor que existem várias arestas ligando i a j. Em cada situação dessas, o problema de contar caminhos continua fazendo sentido, e uma maneira de resolvê-lo é considerar a definição adequada de matriz adjacência em cada caso.

Apêndice 5: Um modelo populacional

Esse é um exemplo de uma situação em que álgebra linear tem muito a dizer. Aos poucos, você vai perceber a enorme aplicabilidade do assunto — álgebra linear serve para tratar de modelos lineares (!), e, francamente, quase tudo que se modela na vida real tem que ser feito assim: a teoria não linear em geral é muito mais difícil.

Queremos fazer um modelo de crescimento populacional que tenha alguma sofisticação. Vamos começar com um primeiro modelo, simples demais. Imagine que você sabe a *taxa de fertilidade* de uma população, usualmente dada por uma porcentagem por unidade de tempo. Assim, por exemplo, se a taxa é de 2% ao ano, e a população em um ano é 500, no ano seguinte ela será 510 (isto é, 1.02×500 — aliás, e dois anos depois?). Em geral, modelos desse tipo fazem uso de informação obtida através de um recenseamento realizado em um certo momento, como é o caso da população e da taxa de fertilidade, e a partir delas esses modelos especulam sobre o comportamento populacional um pouco antes, ou um pouco depois desse momento.

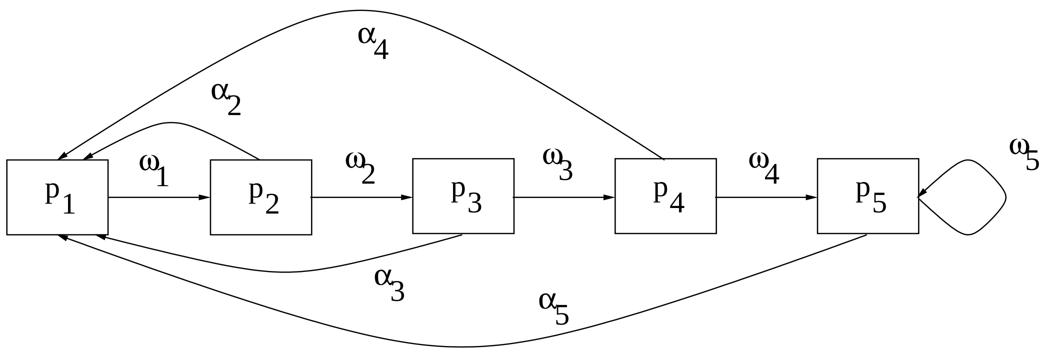
O modelo que queremos estudar é mais complexo. Vamos supor que estamos interessados em prever a *distribuição por idades* de uma população — isto é, gostaríamos de saber como muda a quantidade de indivíduos de uma certa faixa etária a medida que o tempo passa. Por exemplo, vamos considerar uma população dividida em cinco faixas etárias, dadas em anos por intevalos temporais $[0, 1), [1, 2), [2, 3).[3, 4)$ e $[4, \infty)$. A última faixa inclui todos os indivíduos com idade maior ou igual a quatro anos — isso nos dispensa de fixar um prazo de vida terminal para os indivíduos dessa população. Vamos também supor que um recenseamento no tempo $t = 0$ obteve as populações $p_1(0), p_2(0), p_3(0), p_4(0)$ e $p_5(0)$, e vamos pensar como podemos fazer uso dessas informações para aproximar as várias populações alguns anos adiante. Note que chamar o tempo inicial de 0 deve ser irrelevante: o crescimento da população não tem nada a ver com o nome que damos a esse momento. As observações de que necessitamos são quase óbvias:

1. Depois de um ano, cada indivíduo passa de uma faixa etária para a seguinte, a não ser que ele pertença à última faixa. Para ser um pouco mais realista, vamos empregar *taxas de mortalidade* ω_i para indicar que fração da população de uma faixa i sobrevive até o ano seguinte.

2. A cada ano, nascem novos indivíduos, que são acrescentados à primeira faixa etária. Mais uma vez, vamos supor que cada faixa i contribui com uma fração α_i, a *taxa de fertilidade*, para a primeira faixa.

Pode parecer que o modelo não esteja levando em conta a possibilidade de apenas poucas faixas etárias serem realmente férteis: por exemplo, poderíamos imaginar que, depois de uma certa idade, os indivíduos não se reproduzissem. Isso não é problema — basta fazer com que as taxas de fertilidade de algumas faixas etárias tenham o valor zero. Da mesma forma, o modelo é suficientemente versátil para também levar em conta que infantes e idosos morrem mais — basta ajustar adequadamente as taxas de mortalidade associadas. Outra possibilidade seria tratar separadamente do crescimento populacional por idade **e** por sexo (supondo, por exemplo, que a espécie tenha, digamos, dois sexos), mas vamos deixar isso de lado. O importante é que estamos supondo que, assim como dispomos das populações em tempo $t = 0$, somos capazes de obter suas taxas de fertilidade e mortalidade, que, pelo menos por alguns anos, são supostas constantes.

Os itens acima descrevem o modelo, mas existem três outras formas de transmitir a mesma informação, que são de grande interesse em situações desse tipo. A primeira é o gráfico abaixo. As caixas devem conter os valores das populações, e as setas indicam visualmente como indivíduos contribuem para as populações no ano seguinte. Certifique-se de que o gráfico abaixo, devidamente interpretado, contém exatamente a informação descrita nesses itens.



A segunda maneira de descrever o modelo é através das equações abaixo:

$$
\begin{aligned}
p_1(t+1) &= \alpha_2 p_2(t) + \alpha_3 p_3(t) + \alpha_4 p_4(t) + \alpha_5 p_5(t),\\
p_2(t+1) &= \omega_1 p_1(t),\\
p_3(t+1) &= \omega_2 p_2(t),\\
p_4(t+1) &= \omega_3 p_3(t),\\
p_5(t+1) &= \omega_4 p_4(t) + \omega_5 p_5(t).
\end{aligned}
$$

Mais uma vez, convença-se de que essas equações dizem a mesma coisa que os itens *ou* o gráfico acima.

A terceira maneira é simplesmente escrever as equações acima em notação matricial:

$$
\begin{pmatrix} p_1(t+1)\\ p_2(t+1)\\ p_3(t+1)\\ p_4(t+1)\\ p_5(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5\\ \omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \omega_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \omega_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \omega_4 & \omega_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(t)\\ p_2(t)\\ p_3(t)\\ p_4(t)\\ p_5(t) \end{pmatrix}.
$$

Para facilitar a notação, defina um vetor com cinco coordenadas,

$$p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t), p_5(t))^T,$$

onde o T indica que o vetor está sendo pensado na vertical, e seja M a matriz 5×5 acima. O modelo então é equivalente á equação

$$p(t+1) = M\ p(t).$$

É claro, aliás, que $p(t+2) = M^2 p(t)$, ou, se quisermos avançar n anos, $p(t+n) = M^n\ p(t)$.

As duas últimas representações do modelo são implementáveis em máquina. Desta forma, em princípio, podemos estudar computacionalmente a evolução temporal de uma população com os dados iniciais indicados acima. Note que esse modelo só é satisfatório enquanto não houver alteração substancial das taxas de fertilidade e mortalidade. Por exemplo, numa situação de super-população, esses parâmetros mudam drasticamente. Um modelo desse tipo, aliás, foi empregado por alguns anos para estabelecer uma largura conveniente dos buracos das redes de pesca no Mediterrâneo — pense como.

Se todas as descrições acima são equivalentes, por quê interessar-se pela representação matricial? A primeira razão é simples de entender: usando vetores e matrizes, é mais fácil programar modelos desse tipo em computador. A outra razão é que, a partir de álgebra linear, podemos deduzir fatos que não são evidentes a respeito dessas evoluções — vamos dar um exemplo. Em vez de considerarmos a população em cada faixa etária, vamos estudar como muda a fração correspondente a cada faixa etária na população total: isso é equivalente a, dada uma população (vetorial!) $p(t)$, dividirmos todas as coordenadas de $p(t)$ pelo mesmo número de modo a obter um novo vetor, digamos $q(t)$, cuja soma de todas as coordenadas seja igual a 1: as coordenadas de $q(t)$ são números entre 0 e 1, denotando as frações que nos interessam. O vetor $q(t)$, então, descreve a *distribuição etária* da população no tempo t. Como sempre, vamos fixar as taxas de fertilidade e mortalidade e estudar os vetores $p(t)$ e $q(t)$, que obviamente dependem fortemente da condição inicial $p(0)$ (a partir da qual podemos obter $q(0)$). O fato surpreendente é que, para hipóteses muito gerais, a medida que t aumenta, o vetor $q(t)$ converge (isto é, aproxima-se mais e mais) de um vetor fixo que não tem nada a ver com a distribuição etária inicial!. Isto quer dizer, por exemplo, que distribuições etárias muito diferentes vão dar origem a longo prazo a praticamente a mesma distribuição. A demonstração disso usa um teorema bastante difícil de álgebra linear, mas na terceira parte do curso veremos algumas situações parecidas com essa.

Apêndice 6: Aproximando soluções de equações diferenciais simples

Quase todas as equações diferenciais não podem ser resolvidas explicitamente com os símbolos habituais de matemática. O que se faz para contornar essa dificuldade é tentar encontrar aproximações para as respostas, e isso pode ser feito bastante bem, e de forma fácil. Como exemplo muito simples de uma técnica muito geral (a palavra-chave desse assunto é *discretização*), vamos aproximar a solução da equação

$$f''(x) + q(x) = r(x), \quad x \in (0,1), \quad f(0) = 0 = f(1),$$

onde $q(x)$ e $r(x)$ são funções dadas, estamos procurando a função $f(x)$ e f'' denota a segunda derivada de f na variável x. O primeiro passo parece ingênuo, de tão simples: de Cálculo I, sabemos que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

e isso torna bastante razoável que, para h pequeno,

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Essa, aliás, não é a única aproximação que se pode fazer de $f'(x)$, mas para o que vamos fazer outras ainda não interessam. A segunda derivada também pode ser aproximada por um quociente esperto,

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2},$$

o que pode ser mostrado aplicando L'Hôpital duas vezes para calcular o limite. Então, de novo para h pequeno,

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

O segundo passo é colocar n números igualmente espaçados no intervalo aberto $(0,1)$,

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n, x_{n+1} = 1.$$

Note que a distância entre dois pontos seguidos é dada por $h = 1/(n+1)$ (repare bem: esses n pontos quebram o intervalo em $n+1$ sub-intervalos de mesmo tamanho), e de quebra, é fácil ver que $x_i = ih$. O que vamos fazer para aproximar a solução da equação diferencial original é o seguinte. Em vez de procurar por $f(x)$, vamos fixar um certo número de pontos n e procurar aproximações $\hat{f}(x_i)$ da função f só nos pontos x_i. A boa notícia nesse mundo cheio de inseguranças é que as aproximações já são bastante boas com uns poucos pontos, e que podem se tornar arbitrariamente boas, escolhendo n grande, em princípio. A má notícia é que isso pode levar a ter que fazer muitas contas. Que contas, aliás? Vamos ver isso agora.

Para facilitar, suponha que $n = 4$ e escreva a equação de interesse nesses quatro pontos:

$$\begin{aligned}
f''(x_1) + q(x_1)f(x_1) &= r(x_1),\\
f''(x_2) + q(x_2)f(x_2) &= r(x_2),\\
f''(x_3) + q(x_3)f(x_3) &= r(x_3),\\
f''(x_4) + q(x_4)f(x_4) &= r(x_4).
\end{aligned}$$

Lembre que q e r são funções dadas, logo todos os valores dessas funções são conhecidos. O próximo passo é substituir as segundas derivadas por suas aproximações. Escolhendo h como sendo o espaçamento entre dois x_i seguidos, temos que

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}.$$

Agora, jogando as várias aproximações de $f''(x_i)$ nas quatro equações acima, obtemos equações aproximadas

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h^2} + q(x_1)f(x_1) &\approx r(x_1),\\
\frac{f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1)}{h^2} + q(x_2)f(x_2) &\approx r(x_2),\\
\frac{f(x_4) - 2f(x_3) + f(x_2)}{h^2} + q(x_3)f(x_3) &\approx r(x_3),\\
\frac{f(x_5) - 2f(x_4) + f(x_3)}{h^2} + q(x_4)f(x_4) &\approx r(x_4),
\end{aligned}$$

onde $f(x_0) = f(0) = 0$ e $f(x_5) = f(1) = 0$. Finalmente, o último truque: se tudo der certo, as equações aproximadas acima viram equações se trocarmos os valores corretos $f(x_i)$ por aproximações adequadas $\hat{f}(x_i)$:

$$\frac{\hat{f}(x_2) - 2\hat{f}(x_1)}{h^2} + q(x_1)\hat{f}(x_1) = r(x_1),$$

$$\frac{\hat{f}(x_3) - 2\hat{f}(x_2) + \hat{f}(x_1)}{h^2} + q(x_2)\hat{f}(x_2) = r(x_2),$$

$$\frac{\hat{f}(x_4) - 2\hat{f}(x_3) + \hat{f}(x_2)}{h^2} + q(x_3)\hat{f}(x_3) = r(x_3),$$

$$\frac{-2\hat{f}(x_4) + \hat{f}(x_3)}{h^2} + q(x_4)\hat{f}(x_4) = r(x_4).$$

Escrevendo em notação matricial, essas equações viram

$$\begin{pmatrix} -2/(h^2) + q(x_1) & 1/(h^2) & 0 & 0 \\ 1/(h^2) & -2/(h^2) + q(x_2) & 1/(h^2) & 0 \\ 0 & 1/(h^2) & -2/(h^2) + q(x_3) & 1/(h^2) \\ 0 & 0 & 1/(h^2) & -2/(h^2) + q(x_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{f}(x_1) \\ \hat{f}(x_2) \\ \hat{f}(x_3) \\ \hat{f}(x_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(x_1) \\ r(x_2) \\ r(x_3) \\ r(x_4) \end{pmatrix}$$

Daqui para a frente, é questão de aprender a resolver sistemas de equações — esse é o material do segundo terço do curso. Na aula computacional, vamos ver que não só os $\hat{f}(x_i)$ são de fato boas aproximações da solução, mas que escolher o n maior faz obter aproximações realmente melhores.

Apêndice 7: Cálculo Funcional

Vamos mostrar um procedimento para calcular funções $f(A)$ de uma matriz A. Os exemplos que nos interessam especialmente são $f(x) = x^n$ e $f(x) = e^x$: potências e exponenciação de matrizes.

A primeira versão, mais simples, basta para matrizes diagonalizáveis. Lembre que uma matriz é diagonalizável quando tem uma base de autovetores: duas classes são fáceis de identificar, matrizes simétricas e matrizes cujos autovalores são todos diferentes.

Uma maneira possível de fazer essas contas seria calcular autovalores e autovetores de A, e escrevê-la na forma familiar,

$$A = PDP^{-1},$$

onde P tem os autovetores de A em suas colunas, e D é uma matriz diagonal, com os autovalores de A em sua diagonal. Então

$$A^2 = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1},$$

ou de forma mais geral,

$$f(A) = Pf(D)P^{-1}.$$

Isso é fácil de ver se f é um polinômio, e precisa de uma demonstração mais cuidadosa quando f é uma série de Taylor (como no caso da exponencial), mas nem por isso deixa de ser verdade. Finalmente, note que $f(D)$, também uma matriz diagonal como D, é muito fácil de calcular: basta aplicar f a cada posição diagonal de D.

Agora, vamos ver o procedimento que nos interessa, para o qual não é nem necessário calcular os autovetores de A. Recapitulando, suponha que você quer calcular $f(A)$, onde A é uma matriz diagonalizável. Comece calculando seus autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, descartando os autovalores repetidos. A seguir, procure um polinômio p tal que

$$p(\lambda_1) = f(\lambda_1), \ldots, p(\lambda_k) = f(\lambda_k).$$

A matriz procurada, $f(A)$, é simplesmente $p(A)$.

Exemplo: Se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix},$$

seus autovalores são 1 e 15 (confira; qual é o autovalor duplo?). Como A é simétrica, é diagonalizável. Para calcular A^{1000}, vamos procurar um polinômio levando 1 a $1^{1000} = 1$ e 15 a 15^{1000}. Uma mera reta faz isso:

$$p(x) = \alpha x + \beta,$$

onde

$$\alpha = \frac{15^{1000} - 1}{14} \quad , \quad \beta = \frac{15 - 15^{1000}}{14}.$$

Então

$$\begin{aligned} A^{1000} &= p(A) = \alpha A + \beta I \\ &= \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta & 2\alpha & 3\alpha \\ 2\alpha & 5\alpha + \beta & 6\alpha \\ 3\alpha & 6\alpha & 10\alpha + \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Note que um pequeno milagre aconteceu no exemplo acima: para calcular uma matriz à milésima potência, bastou calcular um polinômio linear dela.

Exercício: Usando o MAPLE, se quiser, mostre que os autovalores da matriz de adjacência do grafo associado ao cubo são os números $-3, -1, 1$ e 3, aliás, com multiplicidade $1, 3, 3$ e 1. Calcule o número de caminhos fechados de comprimento 1000 nesse grafo. Isto responde de forma muito satisfatória a uma pergunta feita na primeira aula do curso.

Por quê esse procedimento funciona? No caso do cálculo de uma potência de uma matriz diagonalizável, é muito fácil explicar. Suponha que você quer calcular A^n. Diagonalizando $A = PDP^{-1}$, temos que $A^n = PD^nP^{-1}$, onde D^n é a matriz diagonal obtida elevando a n as posições diagonais de D, que são aliás os autovalores de A. Agora, se p é um polinômio que no autovalor λ_i de A toma o valor λ_i^n, temos que $p(A) = Pp(D)P^{-1}$, e $p(D) = D^n$, já que as duas matrizes são matrizes diagonais cujas posições diagonais são da forma $p(\lambda_i) = \lambda_i^n$. Em uma frase, o argumento é quase banal: se A é diagonalizável, duas funções f e g que tomam os mesmos valores nos autovalores de A vão ser tais que $f(A) = g(A)$! Essa idéia elementar é uma fonte de simplificações em cálculos envolvendo matrizes, e por alguma razão misteriosa, não tem a divulgação merecida.

Vamos ver agora o procedimento para uma matriz A geral — note que agora não é sequer possível escrever $A = PDP^{-1}$, já que A não é necessariamente diagonalizável, mas o procedimento, como no caso anterior, não vai precisar dessa expressão.

Nesse caso, calcule os autovalores $\lambda_1 \ldots, \lambda_k$, e suas multiplicidades $m_1, \ldots, m_k$.

Agora, procure um polinômio p tal que

$$p(\lambda_1) = f(\lambda_1), p'(\lambda_1) = f'(\lambda_1), \ldots,$$

$$p^{(m_1-1)}(\lambda_1) = f^{(m_1-1)}(\lambda_1),$$

$$\ldots$$

$$p(\lambda_k) = f(\lambda_k), p'(\lambda_k) = f'(\lambda_k), \ldots,$$

$$p^{(m_k-1)}(\lambda_k) = f^{(m_k-1)}(\lambda_k).$$

De novo, a matriz procurada, $f(A)$, é $p(A)$.

Exemplo: Se

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 21 & -32 & -7 \end{pmatrix},$$

os autovalores são $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$, com multiplicidades $m_1 = 1, m_2 = 2$. Para calcular e^A, procure p tal que

$$p(1) = e^1, p(0) = e^0, p'(0) = e^0,$$

já que a derivada de e^x é e^x. Para satisfazer esses três pedidos, um polinômio de grau dois deve bastar, $p(x) = ax^2 + bx + c$. De fato, tome $c = 1, b = 1$ e $a = e - 2$. Então

$$e^A = (e-2)A^2 + A + 1.I,$$

que poderia ser escrita por extenso em forma matricial, mas fica por sua conta. Mais uma vez, um pequeno milagre: a exponencial da matriz A é polinômio de grau 2 dela.

A demonstração desse procedimento mais geral é mais difícil: as duas trilhas naturais fazem uso de resultados que não vimos no curso — o teorema de Cayley-Hamilton ou a forma de Jordan. Fica para um outro...

Em vez disso, vamos terminar esse texto apresentando um atalho para o procedimento geral, que pode de interesse para matrizes maiores. Para isso, vamos usar o conceito de *polinômio minimal*, sem defini-lo (mais uma vez: se você tiver curiosidade, pergunte a seu professor, ou consulte um livro, ou faça mais um curso de álgebra linear). Seja A uma matriz com polinômio minimal

$$(\lambda - \lambda_1)^{\mu_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{\mu_k)}.$$

Então o procedimento geral vale trocando as multiplicidades m_i pelos expoentes μ_i. Isso pode fazer com que o polinômio interpolador tenha que satisfazer menos exigências, e seja então mais fácil de calcular. O procedimento para matrizes diagonalizáveis segue do procedimento geral ao notar que nesse caso todos os expoentes μ_i são iguais a 1: de novo, você só pode entender isso com um pouco mais de teoria.

Exemplo: Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

os autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$, com multiplicidades $m_1 = 2, m_2 = 2$, e expoentes do polinômio mínimo $\mu_1 = 2, \mu_2 = 1$. Para calcular, por exemplo, e^A, basta então procurar um polinômio satisfazendo $p(1) = e, p'(1) = e$ e $p(2) = e^2$, sem exigir que $p'(2) = e^2$. Para isto, um polinômio de grau 2 basta — daqui para a frente, fica por sua conta.

Apêndice 8: Alguns exercícios

. Seja $F(n)$ o número de caminhos de comprimento n que começam e terminam no mesmo vértice V de um tetraedro. Seja $A(n)$ o número de caminhos de comprimento n que começam em V e terminam em outro vértice W, $W \neq V$. Mostre que $F(n) = 3A(n-1)$ e que $A(n) = F(n-1)+2A(n-1)$. Quem são $A(1)$ e $F(1)$? Quanto é $F(5)$? Mostre como obter $A(n)$ e $F(n)$ usando potências de matrizes.

Sugestão: Considere o vetor coluna cujas componentes são $F(n)$ e $A(n)$ e escreva, com base nas equações acima, uma relação matricial entre este vetor e o vetor coluna cujas componentes são $F(n-1)$ e $A(n-1)$.

Seja T a matriz de adjacência do tetraedro, onde rotulamos os seus vértices de uma maneira qualquer. O que T^n tem a ver com $F(n)$ e $A(n)$?

. Considerados como grafos, os poliedros regulares (o tetraedro, o cubo, o octaedro, o icosaedro e o dodecaedro) gozam da seguinte propriedade: o número de arestas incidentes em cada vértice é o mesmo para todos os vértices. Assim, por exemplo, há três arestas incidentes em cada vértice do cubo e 3 em cada vértice do tetraedro. Grafos com essa propriedade são chamados *regulares*, e chamamos de *valência* do grafo esse número. Desenhe alguns grafos regulares que **não** sejam grafos de poliedros. Seja A a matriz de adjacência de um grafo regular de valência λ, e denote por v o vetor coluna com λ posições, todas iguais a 1. Quem é o vetor Av?

. Considere a matriz A cuja distribuição de entradas não nulas é dada abaixo.

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \\ 0 & x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \end{pmatrix}$$

Que permutações das linhas (e colunas, por quê não?) em princípio diminuem o número de contas na solução de $Ax = b$ por eliminação gaussiana?

. Ache a decomposição LU da matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & e \\ 0 & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix},$$

permutando linhas se necessário, nos seguintes casos.

1. As entradas a e b são diferentes de zero
2. A entrada a é zero, mas e, junto com b, não são.

. Seja G um grafo com cinco vértices, A, B, C, D e E, onde A é adjacente aos outros quatro vértices, e as outras arestas são BC, CD, DE e EB. Chame de C(V,n) o número de caminhos começando e terminando no vértice V passando por n arestas. Mostre que $C(A, 4) > C(B, 4)$. Mais difícil: Seja A a matriz de adjacência de G. Mostre que as 25 posições de A^n são no máximo quatro números diferentes.

. Considere a equação diferencial

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} = f(x), \;\; x \in [0, 1]$$

com condições adicionais $u(0) = u(1) = 0$. Discretize essa equação, dividindo o intervalo $[0, 1]$ em cinco sub-intervalos iguais, e usando aproximações

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) \approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2},$$

$$\frac{du}{dx}(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}.$$

Escreva as equações obtidas em forma matricial.

. Uma determinada população de coelhos foi dividida por sexo e faixa etária: de 0 a 1 ano, de 1 a 2 , de 2 a 3, de 3 a 4, e de mais de 4 anos. Suponha os fatos abaixo.

a.O percentual de machos da faixa etária i que morre após um ano é ω_i, e o percentual de fêmeas da mesma faixa etária que morre após um ano é ρ_i.

b. As fêmeas da faixa etária i geram um percentual α_i da faixa etária i de filhotes, e o número de filhotes de cada sexo é igual.

Denote o vetor de populações no tempo t por

$$p(t) = (m_1(t), \ldots, m_5(t), f_1(t), \ldots, f_5(t))^T,$$

onde $m_i(t), f_i(t)$ são respectivamente as populações de machos e fêmeas da faixa etária i no tempo t. Determine a equação matricial relacionando os vetores $p(t+1)$ e $p(t)$. Que relação matricial existe entre $p(t+5)$ e $p(t)$?

. Uma população de peixes em um determinado lago foi dividida em cinco faixas etárias: 0 a 2 anos, 2 a 4, 4 a 6, 6 a 8 e mais de 8 anos. Os peixes são de dois tipos: pintados e listrados. Após um ano de pesquisa, colheram-se as informações abaixo.

a. Os peixes na primeira faixa etária, tanto listrados quanto pintados, não se reproduzem. Já a taxa de mortalidade observada variou de acordo com o tipo: 20% para os pintados, 24% para os listrados.

b. Da segunda faixa etária até a quarta, os peixes apresentam a mesma taxa de fertilidade, 16% para os pintados, 18% para os listrados. Peixes de tipos diferentes não se cruzam.

c. As taxas de mortalidade também são constantes nas segunda, terceira e quarta faixa etária: 11% para os pintados, 13% para os listrados.

d. Na última faixa etária, os peixes apresentam uma fertilidade baixa, 2% para os pintados, 5% para os listrados. A taxa de mortalidade é a mesma nos dois tipos, 40%.

A população inicial de peixes pintados é dada por $p(0) = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)^T$ e a dos peixes listrados é $l(0) = (l_1, l_2, l_3, l_4, l_5)^T$. Suponhamos também que as taxas de fertilidade e mortalidade apresentados acima são constantes.

Qual é a equação matricial que fornece as populações de peixes pintados por faixa etária após 10 anos? Qual é a equação matricial para as populações por faixa etária dos dois tipos de peixe após 10 anos? Como se distribuem a longo prazo as populações por faixa etária? É possível estabelecer a longo prazo uma taxa de crescimento para as duas populações? Haverá uma espécie predominante? Qual a dimensao do núcleo de T? Escreva uma base para esse núcleo.

. Dados dois vetores linearmente independentes v_1 e v_2 em $\mathbb{R}^3$, considere a transformação linear

$$v \mapsto \begin{pmatrix} \langle v, v_1 \rangle \\ \langle v, v_2 \rangle \\ \langle v, v_2 \rangle \end{pmatrix}.$$

Qual é a matriz que representa esta transformação? Qual é a dimensão do núcleo desta transformação? Ache uma base para a sua imagem.

. Seja P a projeção sobre o plano de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, 0, 1)$ e $v_2 = (1, 0, -1)$ que leva um vetor ortogonal a este plano a zero. Calcule os autovetores e autovalores de P. Ache uma base ortonormal de autovetores de P. Decida se a matriz que representa P é diagonalizável ou não. Exiba matrizes S e D tais que $P = SDS^{-1}$.

. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

onde a e b são números reais. Calcule os autovalores e autovetores de A. Calcule A^n, para n inteiro.

. Seja A uma matriz 4×4 tal que a dimensão de sua imagem é 1. O que você pode afirmar sobre os autovalores de A? E sobre os autovetores?

. Seja A uma matriz diagonalizável que tem 5 entre os seus autovalors, e tal que todos os seus outros autovalores λ satisfazem $|\lambda| < 5$. Descreva alguma propriedade interessante da seqüência $v, Av, A^2v, \ldots, A^nv, \ldots$, onde v é um vetor genérico.

. Calcule uma matriz A para a qual

$$A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Faça o mesmo para

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

. Calcule potências arbitrárias (positivas ou negativas) de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Use estas contas para calcular

$$\frac{d^4}{dt^4}(e^t\text{sen t} - e^t\text{cos t}) \qquad \text{e} \qquad \int (3e^t \text{ sen t } + 5e^t \text{ cos t }).$$

Sugestão: veja como a derivada atua em $v_1 = e^t$ sen t e $v_2 = e^t$ cos t .

. Calcule e^{tA} e A^n para

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

. Diagonalize as matrizes abaixo.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}.$$